بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اراک
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان:

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و نوسانی با استفاده از روش رونگه کوتا نیستروم

توسط:

چنگیز گلی کشاورزی

استاد راهنما:

دکتر بهنام سپهریان

استاد مشاور:

دکتر علی‌محمد نظری

فروردین ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی روش های رونگه کوتای صریح و ضمنی می‌پردازیم و شرایط پایداری برخی از آنها را بیان می کنیم. سپس با استفاده از تئوری گراف ها به نحوه ساخت روش های رونگه کوتا و به تبع آن روش های رونگه کوتا نیستروم می‌پردازیم. همچنین روش‌های تکرار موازی و پیشگو—اصلاحگر را در مورد آنها اعمال می‌کنیم و در نهایت با استفاده از روش رونگه کوتا نیستروم صریح روش خاصی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل نوسانی به دست می آوریم.

واژه‌های کلیدی: روش رونگه کوتا، روش رونگه کوتا نیستروم، روش تکرار موازی، روش پیشگو—اصلاحگر، معادله دیفرانسیل نوسانی

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی

در این فصل مطالبی که در پایان‌نامه به آن نیاز می‌شود به اختصار معرفی می‌گردد.

قضیه ۱.۰.۱ **بسط تیلور توابع دو متغیره.** اگر $f \in C^{n+1}([a,\ b] \times [c,\ d])$، آنگاه برای هر دو نقطه $x+h$ و $y+k$ در $[a,\ b] \times [c,\ d] \subseteq R^2$ داریم:

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^i f(x,y) + E_n(h,k)\,,$$

که در آن

$$E_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k).$$

در اینجا θ عددی بین 0 و 1 است.

برهان: ([21]، صفحه ۲۵) □

قضیه ۲.۰.۱ تقریب پاده $(j,\ k)$ برای e^z به صورت زیر داده می‌شود.

$$R_{jk}\left(z\right) = \frac{P_{jk}\left(z\right)}{Q_{jk}\left(z\right)}\,,$$

که

$$P_{jk}\left(z\right) = 1 + \tfrac{k}{j+k}z + \tfrac{k(k-1)}{(j+k)(j+k-1)}\tfrac{z^2}{2} + \cdots + \tfrac{k(k-1)\cdots 1}{(j+k)(j+k-1)\cdots(j+1)}\tfrac{z^k}{k!} \quad ,$$

$$Q_{jk}(z) = 1 - \tfrac{j}{j+k}z + \tfrac{j(j-1)}{(j+k)(j+k-1)}\tfrac{z^2}{2} + \cdots + \tfrac{j(j-1)\cdots 1}{(j+k)(j+k-1)\cdots(j+1)}\tfrac{z^j}{j!}$$

با خطایی که به صورت زیر است.

$$e^z - R_{jk}(z) = (-1)^j \frac{j!k!}{(j+k)(j+k+1)!} z^{j+k+1} + O\left(z^{j+k+2}\right).$$

تقریب کسری فوق یک تقریب یکتا از مرتبه $j+k$ برای e^z است که در آن درجه چند جمله‌ایهای صورت و مخرج به ترتیب برابر با k و j است.

برهان: ([14]، صفحه ۵۰) □

روش رونگه کوتای s گامی.

مساله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{۱.۱}$$

فرض کنید b_i، a_{ij} $(i,j = 1, ..., s)$ اعداد حقیقی و c_i ها نیز در شرایط زیر صدق کنند.

$$c_2 = a_{21}, \quad c_3 = a_{31} + a_{32}, \quad \ldots \quad , c_s = a_{s1} + \cdots + a_{s,s-1},$$

یا به اختصار

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}. \tag{۱.۲}$$

روش

$$\begin{aligned} k_i &= f(x_0 + c_i h, y_0 + h \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j), \qquad i = 1, ..., s, \\ y_1 &= y_0 + h \textstyle\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

یک روش رونگه کوتای s گامی نامیده می‌شود. وقتی $a_{ij} = 0$ برای $i \leq j$، روش فوق را صریح (ERK[1]) می‌نامند. در این حالت روش به صورت زیر در می آید.

[1] Explicit Runge Kutta

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) \\
k_2 &= f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1) \\
k_3 &= f(x_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
&\vdots \\
k_s &= f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s1} k_1 + \cdots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\
y_1 &= y_0 + h(b_1 k_1 + \cdots + b_s k_s)
\end{aligned} \tag{۱.۴}
$$

به اختصار می‌توان روش فوق را با استفاده نمادگذاری بوچر[1] در جدول زیر نمایش داد.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

وقتی $a_{ij} = 0$ برای $i < j$ و حداقل به ازای یک i، $a_{ii} \neq 0$ روش فوق ضمنی قطری (DIRK[2]) نامیده می‌شود. به علاوه اگر همه مولفه‌های قطری یکسان باشند ($a_{ii} = \lambda$ برای $i = 1, ..., s$) روش، ضمنی قطری مجرد (SDIRK[3]) نامیده می‌شود. در حالات دیگر روش فوق، ضمنی (IRK[4]) نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۰.۱ روش رونگه کوتای (۱.۳) را از مرتبه p گوئیم اگر برای مساله به اندازه کافی هموار (۱.۱) داشته باشیم

$$||y\left(x_0 + h\right) - y_1|| \leq K h^{p+1},$$

که در آن $y(x_0 + h)$ جواب دقیق و y_1 جواب تقریبی مسأله در نقطه $x_1 = x_0 + h$ است. به عبارت دیگر روش رونگه کوتای (۱.۳) را از مرتبه p گوئیم اگر بسط تیلور جواب دقیق $y(x_0 + h)$ و y_1 تا مرتبه p با هم یکسان باشند یا به طور معادل خطای برشی موضعی روش $\mathcal{O}(h^{p+1})$ باشد.

[1] Butcher

[2] Diagonal Implicit Runge Kutta

[3] Singly Diagonal Implicit Runge Kutta

[4] Implicit Runge Kutta

چند جمله‌ایهای لژاندر

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

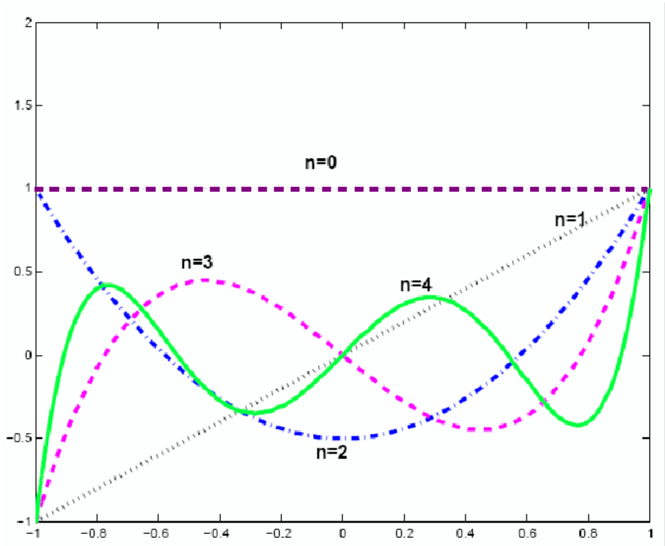
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0\,,\qquad x\in[-1,1]\,,\ \ n=0,1,2,...$$

توابع لژاندر در واقع جواب‌هایی از معادله دیفرانسیل فوق هستند. هر چند جمله‌ای $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است که آن را می‌توان با استفاده از فرمول رودریگرز[1] به صورت زیر به دست آورد.

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right].$$

دنباله چند جمله‌ایهای لژاندر در بازه $[-1,1]$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$\begin{aligned}
&P_0\left(x\right)=1,\\
&P_1\left(x\right)=x\,,\\
&P_2\left(x\right)=\tfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\,,\\
&P_3\left(x\right)=\tfrac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\,,\\
&P_4\left(x\right)=\tfrac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)\,,\\
&P_5\left(x\right)=\tfrac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)\,,\\
&\ \ \vdots\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$



[1] Rodrigues

مهمترین ویژگی چند جمله‌ایهای لژاندر این است که آنها نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ در بازه $[-1,1]$ متعامد هستند.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

که δ_{mn} بیانگر دلتای کرونکر[1] می‌باشد. برخی از ویژگی‌های چند جمله‌ایهای لژاندر را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$P_n\left(-x\right) = \left(-1\right)^n P_n\left(x\right)\ ,$$
$$\left(n+1\right) P_{n+1}\left(x\right) = \left(2n+1\right) xP_n\left(x\right) - nP_{n-1}\left(x\right)\ ,$$
$$\tfrac{x^2-1}{n}\tfrac{d}{dx}P_n\left(x\right) = \left(2n+1\right) xP_n\left(x\right) - P_{n-1}\left(x\right).$$

چند جمله‌ایهای لژاندر انتقال یافته به بازه $[0,1]$

چند جمله‌ایهای لژاندر انتقال یافته به صورت $P_n^*(x) = P_n(2x-1)$ تعریف می‌شوند. در اینجا تابع انتقال $x \to 2x-1$ به گونه‌ای انتخاب شده است که بازه $[-1,1]$ بر روی $[0,1]$ تصویر شود. چند جمله‌ایهای $P_n^*(x)$ نیز بر بازه $[0,1]$ متعامد هستند.

$$\int_{0}^{1} P_m^*(x)P_n^*(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\delta_{mn}\ .$$

چند جمله‌ایهای لژاندر انتقال یافته را می‌توان به صورت صریح زیر بیان نمود.

$$P_n^*\left(x\right) = \left(-1\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-x\right)^n\right].$$

دنباله چند جمله های لژاندر انتقال یافته در بازه $[0,1]$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$P_0^*\left(x\right) = 1,$$
$$P_1^*\left(x\right) = 2x-1,$$
$$P_2^*\left(x\right) = 6x^2-6x+1,$$
$$P_3^*\left(x\right) = 20x^3-30x^2+12x-1,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

حال در زیر به برخی از ویژگی های این چند جمله‌ایها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۳.۰.۱ : چند جمله‌ایهای $P_n^* : [0,1] \to R$، $n = 0,1,2,\ldots$ در شرایط زیر صدق

[1] Kronecker

می کنند.

$$P_n^*(1) = 1, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$
$$P_n^*(1-x) = (-1)^n P_n^*(x), \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$
$$P_n^*(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - x)^n, \ n = 0, 1, 2, ...,$$
$$nP_n^*(x) = (2x-1)(2n-1)P_{n-1}^*(x) - (n-1)P_{n-2}^*(x), \ n = 2, 3, 4...,$$

و در نهایت اینکه P_n^*، $n = 1, 2, ...$ دارای n ریشه حقیقی در بازه $(0, 1)$ است.

برهان: ([2]، صفحه ۱۹۰—۱۸۹) □

قضیه ۴.۰.۱ فرض کنید c_1، c_2، c_3، ...، c_s صفر های چند جمله‌ای P_s^* باشند. آنگاه اعداد مثبت b_1، b_2، ... و b_s وجود دارند به طوریکه

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{s} b_i \varphi(c_i)\ , \tag{۱.۵}$$

و این تقریب برای چند جمله‌ایهای تا درجه $2s-1$ دقیق است.

برهان: ([2]، صفحه ۱۹۹) □

قضیه ۵.۰.۱ در فرمول (۱.۵) فرض کنید $c_i \in [0, 1]$، $i = 1, 2, ..., s$ و $c_s < ... < c_2 < c_1$ و $b_i > 0$، $i = 1, 2, ..., s$.

i) اگر c_i ها ریشه‌های چند جمله‌ای $P_s^*(x) + P_{s-1}^*(x)$ باشند، آنگاه $c_1 = 0$ و روش عددی فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجه $2s-2$ دقیق است (روش عددی حاصل را روش رادو[1] I می‌نامند).

ii) اگر c_i ها ریشه‌های چند جمله‌ای $P_s^*(x) - P_{s-1}^*(x)$ باشند، آنگاه $c_s = 1$ و روش عددی فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجه $2s-2$ دقیق است (روش عددی حاصل را روش رادو II می‌نامند).

iii) اگر c_i ها ریشه‌های چند جمله‌ای $P_s^*(x) - P_{s-2}^*(x)$ باشند، آنگاه $c_1 = 0$، $c_s = 1$ و روش

[1] Radau

عددی فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجه $2s-3$ دقیق است (روش عددی حاصل را روش لوباتو[1] III می‌نامند).

برهان: ([2]، صفحه ۲۰۶) □

نکته: با توجه به اینکه $P_n^*(1)=1$، $n=0,1,2,...$ (طبق قضیه ۳.۰.۱) در نتیجه $x=1$ ریشه $P_s^*(x)-P_{s-1}^*(x)$ و $P_s^*(x)-P_{s-2}^*(x)$ است. مجدداً با توجه به اینکه $P_n^*(1)=1$ و همچنین $P_n^*(1-x)=(-1)^nP_n^*(x)$ (طبق قضیه ۳.۰.۱)، $x=0$ ریشه $P_s^*(x)+P_{s-1}^*(x)$ و $P_s^*(x)-P_{s-2}^*(x)$ است.

معادلات سخت

یک معادله سخت، معادله دیفرانسیلی است که در حل عددی آن با استفاده از برخی از روش‌ها(آن هم در بعضی از بازه‌ها) ضرورت دارد که طول گام به قدر کافی کوچک در نظر گرفته شود. در غیر این صورت یک ناپایداری عددی در جواب ظاهر می‌شود. به طور کلی نمی توان تعریف دقیقی از سختی یک معادله دیفرانسیل ارائه داد، اما شاخص اصلی آنها این است که شامل جملاتی هستند که باعث تغییر سریع در جواب می‌شود. به عنوان مثال‌هایی از معادلات سخت می‌توان به معادلات زیر اشاره کرد.

i) معادله $y'=ky+f(t)$ که $|k|$ عددی بزرگ است.

ii) دستگاه $y'=Ky+f(t)$ که K یک ماتریس مربعی با حداقل یک مقدار ویژه l که $|l|$ عددی بزرگ است.

iii) دستگاهی به شکل $y'=f(t,y(t))$ که ژاکوبین f دارای حداقل یک مقدار ویژه m است که $|m|$ عددی بزرگ است.

[1] Lobatto

پیوسته لیپ شیتز[1]

فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متریک باشند. تابع $f : X \to Y$ پیوسته لیپ شیتز نامیده می‌شود اگر یک ثابت حقیقی مانند $K \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x_1, x_2 \in X$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$d_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) \leq K d_X\left(x_1, x_2\right).$$

کوچکترین عدد حقیقی $K \geq 0$ که در رابطه فوق صدق می‌کند را ثابت لیپ شیتز می‌نامند.

شرط لیپ شیتز یک طرفه[2]

تابع $f : [a, b] \times R^N \to R^N$ در شرط لیپ شیتز یک طرفه صدق می‌کند اگر یک ثابت l — که ثابت لیپ شیتز یک طرفه نامیده می‌شود — وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in [a, b]$ و برای هر $u, v \in R^n$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\langle f\left(x, u\right) - f(x, v)\ ,\ u - v\rangle \leq l\left\|u - v\right\|^2.$$

قضیه ۶.۰.۱ مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$y'\left(x\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right)\ ,$$
$$y\left(a\right) = y_0,$$

که $f : [a, b] \times R^N \to R^N$ در متغیر اولش پیوسته و در شرط لیپ شیتز یک طرفه نیز صدق می کند. آنگاه مسأله فوق دارای یک جواب یکتا است.

برهان: ([2]، صفحه ۲۴) □

---

[1] Lipchitz Continuous

[2] One Sided Lipchitz Condition

۱.۱ پایداری روش های رونگه کوتا

با استفاده از رابطه (۱.۳) و بااعمال روش صریح بر معادله $y' = \lambda y$، $(\lambda \in R)$ داریم:

$$k_i = \lambda(y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j)\,,$$
$$y_{m+1} = y_m + h\lambda\sum_{j=1}^{s} b_j k_j.$$

با جایگزینی معادله اول در معادله دوم می‌توان نوشت:

$$y_{m+1} = R(h\lambda)y_m\,,$$

که

$$R\,(z) = 1 + z\sum_{j} b_j + z^2\sum_{j,k} b_j a_{jk} + z^3\sum_{j,k,l} b_j a_{jk}a_{kl} + \cdots\,, \qquad (۱.۶)$$

یک چند جمله‌ای از درجه بزرگتر یا مساوی s است.

تعریف ۱.۱.۱ تابع $R(z)$ در رابطه (۱.۶) را تابع پایداری روش می‌نامند که می‌تواند به عنوان جواب عددی (بعد از گام اول) برای

$$y' = \lambda y, \quad y_0 = 1.$$

با $z = h\lambda$ تعبیر شود (زیرا با اعمال روش رونگه کوتای (۱.۳) بر مساله فوق، در گام اول جوابی به صورت $y_1 = R(h\lambda)y_0$ به دست می آید و با توجه به اینکه $y_0 = 1$ است داریم $y_1 = R(z)$ که $z = h\lambda$). مجموعه $S = \{z \in C\ ;\ |R(z)| \le 1\}$ را حوزه پایداری روش می‌نامند.

قضیه ۱.۱.۱ اگر روش رونگه کوتا از مرتبه p باشد آنگاه

$$R\,(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^p}{p!} + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

برهان: ([14]، صفحه ۱۸) □

قضیه ۲.۱.۱ اگر روش رونگه کوتای s گامی (۱.۳) بر $y' = \lambda y$ اعمال شود، داریم $y_1 = R(h\lambda)y_0$ که در آن

$$R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e, \tag{۱.۷}$$

و

$$b^T = (b_1, ..., b_s) \quad , \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^s \quad , \quad e = (1, ..., 1)^T.$$

برهان: ([14]، صفحه ۴۱) □

قضیه ۳.۱.۱ تابع پایداری (۱.۷) در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$R(z) = \frac{\det(I - zA + zeb^T)}{\det(I - zA)}.$$

برهان: ([14]، صفحه ۴۱) □

تعریف ۲.۱.۱ یک روش رونگه کوتا که حوزه پایداری‌اش شامل مجموعه زیر باشد، A—پایدار نامیده می‌شود.

$$C^- = \{z\,;\, Rez \leq 0\}.$$

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید تابع پایداری یک روش رونگه کوتا به صورت $R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ باشد در اینصورت روش A—پایدار است اگر و تنها اگر:

i) همه قطبهای R (یعنی ریشه های $D(z)$) در نیم صفحه سمت راست محور موهومی در صفحه مختلط باشند.

ii) برای هر $y \in R$ داشته باشیم $E(y) = D(iy)D(-iy) - N(iy)N(-iy) \leq 0$.

برهان: ([2]، صفحه ۲۱۴) □

در زیر به بیان مفهوم $A-$ پایداری می‌پردازیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم با اعمال یک روش رونگه کوتا بر معادله آزمون $y' = \lambda y$ جوابی به صورت $y_{n+1} = R(h\lambda)y_n$ به دست می‌آید. به سادگی می‌توان دید که $y_n = (R(h\lambda))^n y_0$.
از طرفی می‌دانیم که با شرط اولیه $y(0) = 1$ جواب دقیق مسأله به صورت $y(t) = e^{\lambda t}$ است که برای $\lambda < 0$ وقتی $t \to +\infty$، $y \to 0$. حال اگر جواب های عددی نیز چنین رفتاری از خود نشان دهند آنگاه روش را $A-$ پایدار گوئیم و این معادل است با این که $|R(h\lambda)| < 1$ که در این صورت وقتی $n \to \infty$، $y_n \to 0$.

مثال: روش اویلر صریح $A-$ پایدار نیست.

روش اویلر صریح به صورت $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ می‌باشد. با اعمال آن بر معادله آزمون $y' = \lambda y$ داریم:

$$y_{n+1} = y_n + h(\lambda y_n) = (1 + h\lambda) y_n \Rightarrow y_{n+1} = (1 + h\lambda)^n y_0.$$

بنابراین $R(z) = 1 + z$ و در نتیجه حوزه پایداری روش اویلر صریح به صورت زیر است.

$$S = \{z \in C \,:\, |1 + z| < 1\}.$$

حوزه پایداری روش اویلر صریح یک گوی به مرکز -1 و شعاع 1 می‌باشد. بنابراین روش اویلر صریح $A-$ پایدار نمی‌باشد (زیرا برای $A-$ پایداری باید حوزه پایداری شامل نیم صفحه چپ محور موهومی در صفحه اعداد مختلط باشد).

مثال: نشان می‌دهیم روش ذوزنقه‌ای $A-$ پایدار است.

فرمول روش ذوزنقه‌ای به صورت زیر می‌باشد.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right).$$

با اعمال آن بر معادله آزمون $y' = \lambda y$ داریم:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(\lambda y_n + \lambda y_{n+1}) \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda} y_n.$$

بنابراین $R(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z}$ و حوزه پایداری به صورت زیر می‌باشد.

$$S=\left\{z\in C\ :\ \left|\frac{1+\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z}\right|<1\right\}$$

حوزه پایداری شامل نیم صفحه چپ محور موهومی در صفحه اعداد مختلط است. بنابراین روش ذوزنقه‌ای A−پایدار است.

A− پایداری قادر به پاسخگویی به همه مشکلات ناشی از معادلات سخت نیست. به عنوان مثال با اینکه روش ذوزنقه‌ای A−پایدار است اما در حل برخی از مسائل رفتار نامطلوبی از خود نشان می‌دهد. همین امر انگیزه‌ای برای تعریف مفهومی به نام L− پایداری شد که در زیر به بیان آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۳.۱.۱ یک روش را L−پایدار گوئیم اگر A−پایدار باشد و به علاوه $\lim\limits_{z\to\infty}R(z)=0$.

قضیه ۵.۱.۱ اگر روش IRK (۱.۳) با ماتریس A نامنفرد در یکی از شرایط زیر صدق کند، آنگاه $R(\infty)=0$. این ویژگی، روش A−پایدار را L−پایدار می‌سازد.

(i $\quad a_{sj}=b_j\,,\quad j=1,...,s,$

(ii $\quad a_{i1}=b_1\,,\quad i=1,...,s,$

برهان: ([14]، صفحه ۴۵) □

تعریف ۴.۱.۱ یک روش رونگه کوتا را B-پایدار گویند اگر شرط انقباضی زیر

$$<f(x,y)-f(x,z),\,y-z>\leq 0,$$

ایجاب کند که برای هر $h\geq 0$، رابطه زیر برقرار باشد.

$$\|y_1-\bar{y}_1\|\leq\|y_0-\bar{y}_0\|\,.$$

که در رابطه بالا y_1 و $\bar{y}_1$ تقریب‌های عددی برای گام اول هستند که با مقادیر اولیه مختلف y_0 و $\bar{y}_0$ به دست می آیند.

قضیه ۶.۱.۱ اگر ضرایب یک روش رونگه کوتای ضمنی در شرایط زیر صدق کند، آنگاه روش، B–پایدار است.

i) $b_i \geq 0$ برای $i = 1, ..., s$.

ii) $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{s} = (b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j)_{i,j=1}^{s}$ یک ماتریس معین منفی باشد.

برهان: ([14]، صفحه ۱۹۳) □

تعریف ۵.۱.۱ هر روش رونگه کوتا که در شرایط i) و ii) قضیه (۶.۱.۱) صدق می کند پایدار جبری نامیده می‌شود. در واقع پایداری جبری یک محک جبری برای B–پایداری است.

تئوری A–پایداری بر اساس معادله خطی $y' = \lambda y$ است. در حالی که B–پایداری بر اساس دستگاه معادلات غیر خطی $y' = f(x, y)$ می باشد. سوالی که پیش می آید این است که آیا تئوری پایداری معقولی بین این دو طرف وجود دارد. ایده‌ای که به نظر می‌رسد این است که معادله اسکالر خطی زیر را مورد بررسی قرار دهیم.

$$y' = \lambda(x) y \ , \quad Re\, \lambda(x) \leq 0. \qquad (۱.۸)$$

که $\lambda(x)$ یک تابع مختلط دلخواه است. نتیجه جالب این بخش این است که پایداری مساله (۱.۸) برای بسیاری از روش‌های رونگه کوتا معادل با B–پایداری است.

با اعمال روش رونگه کوتای (۱.۳) برای مساله (۱.۸) داریم:

$$g = ey_0 + AZg \quad , \quad Z = diag(z_1, ..., z_s) \quad , \quad z_j = h\lambda(z_0 + c_j h) \quad j = 1, ..., s \, ,$$

که

$$g = (g_1, ..., g_s) \quad , \quad e = (1, ..., 1)^T, \quad y(z_0) = y_0 \, ,$$

محاسبه g در بالا و قرار دادن آن در $y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_0 + c_i h, g_i)$ می‌دهد

$$y_1 = K(Z) y_0 \quad , \quad K(Z) = 1 + b^T Z (I - AZ)^{-1} e \, .$$

تعریف ۶.۱.۱ یک روش رونگه کوتا را AN-پایدار گوئیم اگر

$$|K(Z)| \leq 1$$

برای هر $Z = diag(z_1, ..., z_s)$ که $Re\, z_j \leq 0$ و $z_j = z_k$ وقتی که $c_j = c_k$ $(j, k = 1, ..., s)$.

قضیه ۷.۱.۱ برای روشهای رونگه کوتا داریم:

B−پایداری ⇐ AN−پایداری ⇐ A−پایداری.

برهان: ([14]، صفحه ۱۹۷) □

قضیه ۸.۱.۱ روش های لوباتوIIIA و لوباتوIIIB (در بخش بعد شرح داده خواهند شد) AN-پایدار نیستند و در نتیجه B−پایدار نیز نمی‌باشند.

برهان: ([14]، صفحه ۱۹۷) □

۲.۱ ساخت روشهای رونگه کوتای ضمنی

همان طور که می‌دانیم همه روش های رونگه کوتا برای معادلات دیفرانسیل سخت مناسب نیستند. در این بخش به روشهای رونگه کوتایی که دارای ویژگیهای پایداری خوبی هستند می‌پردازیم. ساخت چنین روشهایی مبتنی بر چندین فرض ساده‌کننده زیر می‌باشد.

$$B(p) : \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q}, \qquad q = 1, ..., p,$$

$$C(\eta) : \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_i^{q-1} = \frac{c_i^q}{q}, \qquad i = 1, ..., s \ , \ q = 1, ..., \eta,$$

$$D(\xi) : \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} a_{ij} = \frac{b_j}{q}\,(1 - c_j^q), \qquad j = 1, ..., s \ , \ q = 1, ..., \xi,$$

شرط $B(p)$ به سادگی این معنی را می‌دهد که فرمول عددی (b_i, c_i) از مرتبه p است (یعنی رابطه (۱.۵) با انتخاب نقاط b_i و c_i برای چند جمله‌ایهای تا مرتبه p دقیق است). اهمیت دو شرط دیگر را می‌توان در قضیه اساسی زیر مشاهده نمود.

قضیه ۱.۲.۱ اگر ضرایب b_i، c_i و a_{ij} یک روش رونگه کوتا در $B(p)$، $C(\eta)$، $D(\xi)$ برای $p \leq \eta + \xi + 1$ و $p \leq 2\eta + 2$ صدق کند آنگاه روش از مرتبه p می‌باشد.

برهان: ([13]، صفحه ۲۰۸) □

روش s گامی گاوس:

در این روش c_i ها صفرهای چند جمله‌ای لژاندر انتقال یافته (به بازه $[0,1]$) $P_s^*(x)$ هستند و ضرایب b_i با استفاده از $B(s)$ و ضرایب a_{ij} با استفاده از $C(s)$ به دست می‌آیند.

قضیه ۲.۲.۱ روش s گامی گاوس از مرتبه $2s$، تابع پایداری‌اش تقریب پاده (s,s) تابع e^z و A−پایدار است.

برهان: ([14]، صفحه ۷۶) □

در زیر به برخی از روش‌های گاوس اشاره می کنیم.

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

روش گاوس مرتبه ۴   روش گاوس مرتبه ۲

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9}-\frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36}-\frac{\sqrt{15}}{30} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{36}+\frac{\sqrt{15}}{24} & \frac{2}{9} & \frac{5}{36}-\frac{\sqrt{15}}{24} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36}+\frac{\sqrt{15}}{30} & \frac{2}{9}+\frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} \\ \hline & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \end{array}$$

روش گاوس مرتبه ٦