d

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

گرایش نظری

مطالعه پتانسیل های بدون انعکاس از روش ابر تقارن

از :

محمد حسین حبیبی

استاد راهنما :

دکتر حسین پناهی

شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم به همسر مهربان و دلسوزم

به پاس تمام تلاش ها و محبت هایش

تقدیر و قدردانی

فصلی از کتاب زندگی ورق خورد و من به خود می بالم که آن را در محضر استادی گرانمایه و دانشمند سپری نمودم. اینجا جا دارد که از همه زحمات و دلسوزی های استادم دکتر حسین پناهی که نه تنها به عنوان رهنما، رهنمود اینجانب بودند، بلکه با کمک ها و نصیحت هایشان مایع انگیزه و افزون گر تلاش من نیز شدند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که با عنایات روز افزون الهی بتوانم در ادامه راه خویش برای درک بهتر هستی، از اندوخته خویش بهره جویم تا در مسیر تعالی خود قادر باشم با تمام توان به تعالی کشور عزیزم نیز کمکی هر چند اندک نمایم.

با تشکر

محمدحسین حبیبی

۲۳/۰۵/۱۳۹۲

چکیده:

عنوان : مطالعه پتانسیل های بدون انعکاس از روش ابرتقارن

نگارنده : محمد حسین حبیبی

روش ابرتقارنی به ما این اجازه را می دهد که بین ضرایب جذب و انعکاس از دو سیستم کوانتومی که شریک ابرتقارنی همدیگر هستند، در ناحیه طیف انرژی پیوسته، ارتباط بر قرار نمائیم. ازاینرو با استفاده از روش ابر تقارن و تقارن شکل ناوردایی سعی می کنیم دسته وسیعی از پتانسیل های بدون انعکاس را بدست آوریم . بنابراین ابتدا پتانسیل ثابت را که یک پتانسیل بدون انعکاس است را به عنوان پتانسیل مرجع اختیار می کنیم و سپس از فرمالیسم ابر تقارن پتانسیل شریک مربوطه را بدست می آوریم و نشان می دهیم که پتانسیل حاصل بدون انعکاس و ضریب انعکاس آن صفر است. پتانسیل حاصل ، خود به عنوان یک پتانسیل جدید بدون انعکاس در نظر گرفته می شود و شریک ابرتقارنی آن را مجدداً محاسبه و نشان می دهیم که یک پتانسیل بدون انعکاس جدید می باشد. فرمالیسم موجود را ادامه و سلسله هامیلتونی های بدون انعکاس را بدست می آوریم.

ابتدا با معرفی کردن عملگر های بالابرنده و پایین آورنده بر مبنای یک تابع ابرپتانسیل، معادلات مربوط به سلسه مراتب هامیلتونین ها و پتانسیل های شریک را بدست می آوریم. چون سعی مان بر این است که هر چقدر که می توانیم به مسئله ساده نگاه کنیم، کارمان را با در نظر گرفتن یک پتانسیل ثابت، که در گسیل موج بر آن گذار مطلق دارد یعنی ضریب انعکاسی برابر صفر دارد، شروع می کنیم. با حل معادلات حاصله ابرپتانسیل های شریک بدست آورده می شوند و با بدست آمدن این ابرپتانسیل ها دیگر توانایی این را داریم که پتاسیل های شریک با پتانسیل ثابت را نیز بدست آوریم. با حل معادلات حاصله، ابرپتانسیل های شریک بدست آورده می شوند و با استفاده از این ابرپتانسیل ها می توانیم پتانسیل های شریک از پتانسیل ثابت را بدست بیاوریم.

در انتهای پایان نامه شکل بعضی از این پتانسیل های بدون انعکاس بدست آمده را برای مقادیر خاص از پارامترهای پتانسیل ها رسم می کنیم.

کلید واژه: پتانسیل بدون انعکاس، ابرتقارن، شکل ناوردایی، ضرایب انعکاس و جذب

فهرست

۱- مقدمه ۱۷

۲- تعاریف و مفاهیم پایه ۲۳

۲-۱) معرفی روش های بدست آوردن ضرایب جذب و انعکاس ۲۳

۲-۲) ابرتقارن در مکانیک کوانتومی ۲۴

۲-۳) سلسله مراتب ابرتقارن ۲۶

۲-۳-۱) فرمالیسم کلی برای سلسله مراتب ابرپتانسیل ها ۲۶

۲-۳-۲) دست یابی به یک روش کلی در فرمالیسم پتانسیل های بدون انعکاس ۲۷

۲-۴) پتانسیل های شکل ناوردا ۲۸

۳- ابرتقارن و محاسبه ضرایب نفوذ و جذب پتانسیل های پراکننده ۳۰

۳-۱) مقدمه ۳۰

۳-۲) ابرتقارن در مکانیک کوانتومی و عملگر انتقال پارامتر ۳۰

۳-۳) حل دقیق تابع موج در فرمالیسم ابرتقارن ۳۲

۳-۴) بررسی حالت مجانبی توابع موج در نظریه ابرتقارن ۳۴

۳-۵) شکل عمومی تابع موج مجانبی و ضرایب نفوذ و جذب ۳۶

۳-۵-۱)بررسی یک مسئله ۳۸

۴- پتانسیل های بدون انعکاس یک بعدی ۴۲

۴-۱) مقدمه : ۴۲

۴-۲)پتانسیل های بدون انعکاس از روش ابرتقارن ۴۲

۴-۳) پتانسیل های پایین شریک با پتانسیل V_N ۴۵

۴-۳-۱) پتانسیل های بدون انعکاس عکس توانی ۴۶

۴-۳-۲) ساختار سلسله مراتبی پتانسیل های بدون انعکاس عکس مجذور توان ۴۸

۴-۳-۳) سلسله مراتب پتانسیل ها بدون انعکاس با تقارن کروی با عکس مجذور توانی ۵۰

۴-۳-۴) سلسله مراتب پتانسیل های ایجاد شده به وسیله ابر پتانسیل $W(X)-C_{OT\,H}(X)$ ۵۱

۴-۴) جستجوی شکل کلی پتانسیل های بدون انعکاس به روش حل معادله دیفرانسیل ۵۲

فهرست

۵- نتیجه گیری و پیشنهادات ۶۷

منابع ۷۰

فهرست نمودارها

شکل۱- تابع پتانسیل $V_2(X)$ به ازای N=1 ..... ۴۸

شکل ۲- نمودار پتانسیل ثابت ۵۴

شکل ۳- نمودار مربوط به پتانسیل حاصل از ابرپتانسیل W=-B/(X+X0) با C های متفاوت..... ۵۵

شکل ۴- برای پتانسیل مربوط به ابرپتانسیل W=-B/(X+X0) با C های یکسان..... ۵۶

شکل ۵- برای پتانسیل مربوط به ابرپتانسیل W=-B/(X+X0) با C های صفر ۵۷

شکل۶– نمودار مربوط به پتانسیل شریک (۴۵.۴) ۵۸

شکل۷- نمودار مربوط به پتانسیل (۱۶.۴) ۵۹

شکل ۸ تا ۱۱ مربوط به تغییرات پتانسیل شریک

V1=Abs[A]^2*(1+(B1/Cosh[c*Abs[A]*(x+x0)/a]^2)) می باشند

شکل ۸ –نمودار تابع فوق با در نظر گرفتن C=2/5..... ۶۰

شکل۹- نمودار تابع فوق با در نظر گرفتن C=0.1 ..... ۶۱

شکل۱۰- نمودار تابع فوق با در نظر گرفتن C=0.01 ..... ۶۲

شکل۱۱- نمودار تابع فوق با در نظر گرفتن C=0.001 ..... ۶۳

فصل اول

۱ـ مقدمه

تونل‌زنی کوانتومی[۱] اشاره به فرآیند کوانتومی تونل زنی ذره در طول یک سد ـ که از نظر کلاسیک ذره قادر به عبور از آن نیست ـ دارد. این اتفاق مهم در چندین پدیده فیزیکی دیده می‌شود. برای مثال، در واکنش‌های هسته‌ای که در رشته اصلی ستارگان [۲] مثل خورشید اتفاق می‌افتد، به چشم می‌خورد. همچنین کاربردهای مهمی در وسایل مدرن و جدید مانند دیود تونلی دارد. این پدیده در اوایل قرن بیستم پیش بینی شده بود و در اواسط همین قرن به عنوان یک پدیده کلی فیزیکی پذیرفته شد. تونل زنی معمولاً با عنوان اصل عدم قطعیت هایزنبرگ توضیح داده می‌شود. در واقع مفاهیم مکانیک کوانتومی حول این پدیده می‌باشند، و می‌توان گفت تونل زنی کوانتومی یکی از تعاریف ویژگی‌های مکانیک کوانتومی و خاصیت دوگانگی موج – ذره در جسم می‌باشد. این اثر در زمان فرمول بندی مکانیک کوانتومی شالوده اصلی آن بوده و مطالعات زیادی برروی بعضی ویژگی های آن شده است. با این حال، سال های گذشته به پژوهش درباره بعضی ویژگی های آن پرداخته اند، که نگاهی نسبتاً غیر معمول به مسأله دارند. برای مثال می توان به: تشدید کننده تونلی، تقویت قابلیت نفوذ در یک سد، شدت تقارن تونلی در جهت مقابل

---

۱. Quantum tunneling
۲. main sequence stars

گسیل یک سیستم چند ذره ای، گذار مطلق برای انرژی های کمتر از سد ($E<V_0$) و انعکاس برای پتانسیل های بیشتر از سد پتانسیل ($E>V_0$) و ... اشاره کرد [۱].

روش های اصلی با هدف فهم عمیق تری از ویژگی های آنها پیشرفت کرده اند، در اینجا روش ابرتقارن در کوانتوم مکانیک به ما این امکان را می دهد که انواع مختلف سیستم های کوانتومی را هم در حالت های مانا و گسسته و هم در حالت های پیوسته بپردازیم. در مورد تشدید کننده تونلی، پتانسیل ضریب نفوذی مساوی با یک دارد و ذرات گسیلی در ترازهای جداگانه و در طیف انرژی پیوسته اند. مورد دوم نیز که پتانسیل آنها و سیستم های کوانتومی مرتبط ، بدون انعکاس یا گذار مطلق نامیده می شوند[۲] .

پتانسیل های بدون انعکاس در عمل در همه طیف انرژی پیوسته ضریب نفوذی برابر یک دارند که به نظر غیر معمول است. پتانسیل های بدون انعکاس بوسیله روش های مستقیم و معکوس می توانند مورد تحقیق و بررسی واقع شوند. در اینجا از مرجع [۴] و در مراجع مروری بسیار عالی [۵و۶] که روش ابرتقارن در مکانیک کوانتوم را بررسی کرده اند که در این پایان نامه از آنها استفاده می شود. در اینجا هر دو پژوهش برای مطالعه جزئیات ویژگی های سیستم های کوانتومی یک و چند کاناله بدون انعکاس (به طور عمده در ناحیه طیف انرژی گسسته) و شیوه های ساده برای فهم کیفی ارائه شده است. همه این پژوهش ها و مقالات(هم در مسائل مستقیم و هم معکوس) کاربردشان در تئوری پراکندگی است.

آنچه که به طور قابل ملاحظه در روش ابرتقارن و در اینجا بررسی می شود پتانسیل های شکل ناوردایی است که با تغییر پارامترهای پتانسیل به صورت تغییر مقیاس و یا انتقال آنها به همدیگر، شکل پتانسیل تغییر نمی کند، که برای نمونه می توان مقالات [۷و۸] را مشاهده کرد. همچنین به عنوان یک رهنمون متفاوت از موضوع می توان پتانسیل های شبه حل پذیر را از شابات[۱] و اسپایریدونو[۲] [۹و۱۱] مطالعه کرد. البته بهترین مقاله، مقاله کوپر[۱] را می توان مرور کرد. این نظریه در سال های اخیر پیشرفت چشمگیری داشته و به عنوان یک روش جبری در حل سیستم های کوانتومی بسیار مورد توجه قرار گرفته است به طوری که به بسیاری از شاخه های دیگر فیزیک تعمیم داده شده است که از کاربردهای ویژه آن می توان در ماده چگال

۱.Shabbat
۲.spiridonov

و فیزیک آماری و... نام برد. ابرتقارنی با کار نیکلای[۱] در سال ۱۹۷۶ [۱۹] آغاز و در سال ۱۹۸۱ [۲۰] توسط ویتن[۲] به صورتی زیبا فرمول بندی شد. این نظریه در مکانیک کوانتومی بدین صورت است که می توان هامیلتونی مربوط به دو سیستم را با استفاده از فاکتوریزه کردن[۳] آنها به صورت حاصل ضرب دو عملگر دیفرانسیلی مرتبه اول به هم مرتبط کرد. براساس این تقارن دو هامیلتونی به جز در حالت پایه دارای طیف یکسانی هستند و به پتانسیل مربوط به آنها جفت پتانسیل ابرتقارنی می گویند. شکل ناوردایی هم توسط جندن اشتاین[۴] در سال ۱۹۸۳ معرفی شد و بسیاری از پتانسیل های حل پذیر مانند کلمب، نوسانگر، مورس و... شکل ناوردا هستند که ویژه مقادیر انرژی این پتانسیل ها از مفهوم شکل ناوردائی قابل محاسبه است و همچنین همان طوری که ذکر شد اگر جفت پتانسیل ابرتقارنی از نظر شکل کاملا یکسان و فقط در پارامترهای ظاهر شده در آنها متفاوت باشند، پتانسیل را شکل ناوردا گویند و توابع موج و طیف انرژی مربوط به هامیلتونی هایی که در شرایط شکل ناوردایی صدق می کنند با استفاده از محاسبات پایه و فرایند جبری به صورت دقیق تعیین می شوند.

باید توجه داشت که روش های ابرتقارن برای مطالعه ویژگی های سیستم های کوانتومی در ناحیه طیف انرژی های پیوسته پیشرفت کمتری کرده اند. در حالت انرژی های پیوسته به دلیل تفاوت در شرایط مرزی، شرایط نرمالیزاسیون و ارتباط بین توابع موج، طیف انرژی برای سیستم های ابرتقارن شریک می تواند از لحاظ کیفی متفاوت باشند. البته همانند ارتباط بین ویژگی های طیف در ناحیه طیف انرژی گسسته، اختلاف مجموعه مراتبی پتانسیل های بدون انعکاس از اختلاف روش های به کار برده شده ناشی می شود.

ما در این پایان نامه بعد از بیان مقدمه، در فصل دوم به تعاریف و مفاهیم پایه مربوط به موضوع خواهیم پرداخت. در فصل سوم موضوع مربوط به روش کار، یعنی روش ابرتقارن به صورت مفصل بیان می شود که از عملگرهای پایین آورنده و بالابرنده آغاز می شود و با معرفی تابع ابرپتانسیل و روابط مربوط به تابع موج ادامه می یابد. بدنبال آن، با معرفی

۱. Nicolai
۲. Witten
۳. Factorization
۴. gendenshtein

عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده جدید با بررسی شرایط جبری عملگرها، سعی می کنیم که به روش ابرتقارن، جواب های پیشنهادی برای تابع موج را بدست آوریم. در ادامه کار با بدست آمدن توابع موج به بررسی حالات مجانبی توابع خواهیم پرداخت و شکل عمومی آنها بدست خواهند آمد. در فصل چهارم نیز که مبحث اصلی پایان نامه را در برمی گیرد، با در نظر گرفتن پتانسیل ثابت($V(x)=A$)، پتانسیل های شریک ابرتقارن آن را بدست می آوریم. با بدست آمدن این پتانسیل ها، به بررسی شکل کلی آنها خواهیم پرداخت. در ادامه فصل چهارم اشکال پتانسیل های بدست آمده را برای تحلیل بیشتر ترسیم می نماییم. در قصل پنجم نیز، به نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات خواهیم پرداخت.

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم پایه

۲ـ تعاریف و مفاهیم پایه

۲ـ۱)معرفی روش های بدست آوردن ضرایب جذب و انعکاس

قبل از هر چیز، لازم است که یک مروری بر نحوه محاسبه ضرایب جذب و گذار که در اکثر کتاب های مقدماتی مکانیک کوانتومی موجود است، داشته باشیم. در واقع برای یک سد پتانسیل، یک روش معمول برای بدست آوردن ضرایب جذب و انعکاس استفاده مستقیم از توابع موج براساس تحلیلی که از موج تابیده شده بر سد پتانسیل بدست می آید، می باشد. در این روش با استفاده از شرایط مرزی ضریب های توابع موج بدست می آیند. به فرض ذره هایی را که از $x=-\infty$ بر سد پتانسیل مربعی فرود می آیند که در این صورت حالت های پیوسته و غیرمانا برای سه ناحیه I $(x<0)$ ، II $(0<x<L)$ و III $(x>L)$ عبارتند از:

$$\Phi_I(x) = A_1 \exp(ik_1x) + A'_1\exp(-ik_1x) , \qquad (۱.۲)$$

$$\Phi_{II}(x) = A_2\exp(\rho x) + A'_2 \exp(-\rho x) , \qquad (۲.۲)$$

$$\Phi_{III}(x) = A_3\exp(ik_1x) + A'_3 \exp(-ik_1x), \qquad (۳.۲)$$

که L طول سد پتانسیل است و کمیت های $\rho = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ و $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. چون ذره ها از $x=-\infty$ فرود می آیند بنابر این واضح است که $A'_3=0$. با اعمال شرایط مرزی در $x= L$ نتیجه می شود

$$\Phi_{II}(L)= \Phi_{III}(L) \rightarrow A_2\exp(\rho L) + A'_2\exp(-\rho L)= A_3\exp(ik_1L), \qquad (۴.۲)$$

$$\Phi'_{II}(L)= \Phi'_{III}(L) \rightarrow A_2\rho\exp(\rho L) - A'_2 \rho \exp(-\rho L)= ik_1A_3\exp(ik_1L). \qquad (۵.۲)$$

از(۴.۲) و (۵.۲) نتیجه های زیر حاصل می شود

$$\begin{cases} A_2=[(\rho+ik_1)/(2\rho)\ \exp((ik_1-\rho)L)]\ A_3\ , \\ A_2'=[(\rho-ik_1)/(2\rho)\ \exp((ik_1+\rho)L)]\ A_3\ , \end{cases} \qquad (۶.۲)$$

همچنین با تطبیق شرایط در $x=0$ نتیجه زیر حاصل می شود

$$\Phi_I(0)= \Phi_{II}(0) \ \rightarrow\ A_1 + A'_1 = A_2+ A'_2\ , \qquad (۷.۲)$$

$$\Phi'_I(0)= \Phi'_{II}(0) \ \rightarrow\ ik_1A_1 - ik_1\ A'_1= \rho A_2 - \rho A'_2\ , \qquad (۸.۲)$$

از (۷.۲) و (۸.۲) نیز داریم

$$A_1=((ik_1+\rho)/(2ik_1))A_2+((ik_1-\rho)/(2ik_1))A'_2\ . \qquad (۹.۲)$$

همچنین با استفاده از (6.2) خواهیم داشت

$$A_1=[((ik_1+\rho)^2/(4ik_1\rho))\exp((ik_1-\rho)L)-((ik_1-\rho)^2/(4ik_1\rho))\exp((ik_1+\rho)L)]A_3 \qquad (۱۰.۲)$$

$$=[-i((k_1^2-\rho^2)/(2k_1\rho))\sinh(\rho L)+\cosh(\rho L)]\exp(ik_1L)A_3\ .$$

بالاخره ضریب عبور و ضریب انعکاس را در نظر می گیریم

$$T=|A_3/A_1\ |^2, \qquad (۱۱.۲)$$

$$R=|\ A'_1/A_1|$$

که ضریب عبور به صورت زیر محاسبه می شود

$$T=(1/(\ \cosh^2(\rho L)+(\ ((k_1^2-\rho^2)/(2k_1\rho))^2\sinh^2(\rho L)\ )$$

$$= 4E(V_0-E)/(4E(V_0-E)+V_0^2\ \sinh[(\ (2mV_0-E)^{½}/\hbar\ )]^2)\ .$$

روش دیگری که از آن برای بدست آوردن ضرایب جذب و انعکاس بهره جسته می شود روش ابرتقارن کوانتوم مکانیک می باشد. درباره این روش در این پایانامه بطور مفصل بحث شده است.

۲-۲) ابرتقارن در مکانیک کوانتومی

همان طور که در مقدمه پایان نامه ذکر شد در سال های اخیر توجه روبه رشدی برای مطالعه سیستم های دقیقاً حل پذیر در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی به وجود آمده است[۱۶و۱۷] تعداد زیادی از سیستم های کوانتومی یک بعدی هستند که طیف انرژی و توابع موج آنها به صورت دقیق تعیین شده است و از معروف ترین آنها می توان به نوسانگر هماهنگ اشاره کرد. معرفی ابرتقارنی تأثیر بسزایی در مطالعه این نوع سیستم ها داشته و تاکنون نتایج مفید و جالبی را در فیزیک داده است. بیشتر پتانسیل های حل پذیر دارای تقارن شکل ناوردایی

هستند و این تقارن تعیین دقیق توابع موج را با استفاده از یک فرآیند جبری امکان پذیر می کند [۱۸و۱۹و۲۰] معادله شرودینگر برای یک سیستم یک بعدی با فرض $\hbar=2m=1$ را می توان به شکل زیر مشخص کرد:

$$H_1\Psi_n^{(1)}(x) = ((- d^2/dx^2) + V_1(x)) \Psi_n^{(1)}(x) =E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)}(x) , \qquad (۱۲.۲)$$

که در آن $\psi_n^{(1)}(x)$ و $E_n^{(1)}$ به ترتیب ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به هامیلتونی H_1 هستند. این هامیلتونی را می توان به صورت ضرب دو عملگر دیفرانسیلی مرتبه اول زیر فاکتوریزه کرد[۲۱]:

$$H_1=A^{\dagger}A \quad , A=d/dx + W(x) \quad , \quad A^{\dagger}=-d/dx + W(x) , \qquad (۱۳.۲)$$

که در معادلات بالا $W(x)$ ابرپتانسیل[۱] نامیده می شود. با ضرب دو عملگر و مقایسه آن با هامیلتونی H_1 می توان پتانسیل را به صورت زیر برحسب ابرتقارن تعیین کرد:

$$V_1(x)=W^2(x)-dW(x)/dx , \qquad (۱۴.۲)$$

که این معادله معروف ریکاتی[۲] است. با فرض صفر بودن انرژی حالت پایه، تابع موج حالت پایه توسط رابطه زیر با ابرپتانسیل مرتبط می شود:

$$A\psi_0^{(1)}=0 \rightarrow \quad \psi_0^{(1)}(x)=\exp(-\int W(x)dx) . \qquad (۱۵.۲)$$

با عوض کردن جای دو عملگر A و $A^{\dagger}$ هامیلتونی جدیدی به صورت زیر بدست می آید

$$H_2=AA^{\dagger} =-d^2/dx^2+V_2(x) , \qquad (۱۶.۲)$$

که پتانسیل مربوط به هامیلتونی H_2 نیز از طریق رابطه زیر بر حسب ابرپتانسیل بیان می شود:

$$V_2(x)=W^2(x)+dW(x)/dx , \qquad (۱۷.۲)$$

پتانسیل های V_1 و V_2 به عنوان جفت پتانسیل ابرتقارنی[۳] و یا شریک ابرتقارنی شناخته می شوند؛ برای ایجاد ارتباط بین دو هامیلتونی معادله شرودینگر H_1 را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$H_1\psi_n^{(1)}(x)=A^{\dagger}A \psi_n^{(1)}(x)=E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}(x) , \qquad (۱۸.۲)$$

با ضرب A از سمت چپ در این معادله هامیلتونی H_2 ظاهر می شود و یا داریم:

$$AA^{\dagger}A \psi_n^{(1)}(x)= H_2(A\psi_n^{(1)}(x))=E_n^{(1)} (A\psi_n^{(1)}(x)) . \qquad (۱۹.۲)$$

به همین ترتیب با نوشتن معادله شرودینگر H_2 و ضرب $A^{\dagger}$ از سمت چپ در این معادله خواهیم داشت:

$$H_2\psi_n^{(2)}(x)=AA^{\dagger} \psi_n^{(2)}(x)=E_n^{(2)} \psi_n^{(2)}(x) , \qquad (۲۰.۲)$$

$$A^{\dagger}AA^{\dagger} \psi_n^{(2)}(x)= H_2(A^{\dagger}\psi_n^{(2)}(x))=E_n^{(2)} (A^{\dagger}\psi_n^{(2)}(x)) . \qquad (۲۱.۲)$$

از معادلات (۱۸.۲) و(۲۱.۲) و همچنین با فرض اینکه انرژی حالت زمینه $E_0^{(1)}$، ویژه مقادیر و ویژه توابع دو هامیلتونی مزبور بصورت زیر به هم مرتبط می شوند:

---

۱. Super potential
۲.Riccati equation
۳.Super symmetric partner potentials

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad , \qquad (۲۲.۲)$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) = [E_{n+1}^{(1)}]^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(1)}(x) \, , \qquad (۲۳.۲)$$

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x) = [E_n^{(2)}]^{-1/2} A^{\dagger} \psi_n^{(2)}(x) \, . \qquad (۲۴.۲)$$

از معادلات بالا واضح است که عملگر A ($A^{\dagger}$) نه تنها ویژه توابع H_1 (H_2) را به ویژه توابع H_2 (H_1) با همان انرژی تبدیل می کند بلکه n را نیز یک واحد کاهش (افزایش) می دهد. بنابراین با دانستن ویژه توابع مربوط به H_1 می توان ویژه توابع H_2 را با استفاده از عملگر A تعیین کرد و بالعکس با استفاده از عملگر $A^{\dagger}$ می توان ویژه توابع H_1 را بجز حالت پایه از روی H_2 بدست آورد.

۲-۳) سلسله مراتب ابرتقارن

۲-۳-۱) فرمالیسم کلی برای سلسله مراتب ابرپتانسیل ها

اگر برای H_2 داشته باشیم $H_2 = A^{\dagger}_2 A_2$ با ابرپتانسیل W(x) با جابه جا کردن $A^{\dagger}_2$ با A_2 برای H_3 داریم $H_3 = A_2 A^{\dagger}_2$ به همین منوال برای H_m داریم $H_m = A^{\dagger}_m A_m$ بر همین اساس برمبنای رابطه (۱۴.۲) برای جمله n ام داریم

$$V_n(x) = W_n^2(x) - \alpha \, dW_n(x)/dx \, , \qquad (۲۵.۲)$$

$$W_n^2(x) = V_n(x) + \alpha dW_n(x)/dx \quad , \qquad (۲۶.۲)$$

$$W_{n+1}^2(x) = V_{n+1}(x) + \alpha \, dW_{n+1}(x)/dx \qquad (۲۷.۲)$$

حال با داشتن $V_{n+1}(x)$ در (۲۷.۲) داریم:

$$W_{n+1}^2(x) = W_n^2(x) + \alpha \, dW_n(x)/dx + \alpha \, dW_{n+1}(x)/dx \, , \qquad (۲۸.۲)$$

$$W_{n+1}^2(x) - \alpha \, dW_{n+1}(x)/dx = W_n^2(x) + \alpha \, dW_n(x)/dx. \qquad (۲۹.۲)$$

۲-۳-۲)دست یابی به یک روش کلی در فرمالیسم پتانسیل های بدون انعکاس

بعد از بدست آوردن سلسله مراتب ابر پتانسیل و پتانسیل های بدون انعکاس و دریافت روند کلی آنها می خواهیم یک شیوه برای محاسبه همه شکل های ممکن پتانسیل های متعلق به یک ابرتقارن را معرفی کنیم.

ما در اینجا زنجیره ای از پتانسیل های بدون انعکاس بالای $V_n(x)$ را در نظر می گیریم و مطابق با روابط (۲.۴) داریم:

$$V_n(x) = W_n^2(x) - \alpha \, dW_n(x)/dx \quad \Rightarrow \quad W_n^2(x) = V_n(x) + \alpha dW_n(x)/dx \, , \qquad (۳۰.۲)$$

$$V_{n+1}(x) = W_n^2(x) + \alpha \, dW_n(x)/dx \quad , \qquad (۳۱.۲)$$

با قرار دادن (۳۰.۲) در (۳۱.۲) خواهیم داشت:

$$V_{n+1}(x) = V_n(x) + 2 \, \alpha \, dw_n(x)/dx \, , \qquad (۳۲.۲)$$

واضح است که این زنجیره را می توان از n+1 تا n+m مطابق زیر ادامه داد تا در نهایت، شکل نهائی پتانسیل بدست آید

$$V_{n+2}(x) = W_n^2(x) + \alpha\, dw_{n+1}(x)/dx$$

$$W_n^2(x) = V_{n+1}(x) - \alpha\, dw_n(x)/dx$$

$$V_{n+1}(x) = V_n(x) + 2\,\alpha\, dw_n(x)/dx$$

$$V_{n+2}(x) = V_{n+1}(x) - \alpha\, dw_n(x)/dx + \alpha\, dw_{n+1}(x)/dx$$

$$= V_n(x) + 2\,\alpha\, dw_n(x)/dx - \alpha\, dw_n(x)/dx + \alpha\, dw_{n+1}(x)/dx$$

$$= V_n(x) + \alpha\, dw_n(x)/dx + \alpha\, dw_{n+1}(x)/dx$$

$$\vdots$$

$$V_{n+m}(x) = V_n(x)+2\alpha(dW_n(x)/dx+dW_{n+1}(x)/dx +\dots +dW_{n+m+1}(x)/dx)\ , \quad (۳۳.۲)$$

رابطه (۳۳.۲) روند کلی را برای بدست آوردن سلسله مراتب پتانسیل های بدون انعکاس، در صورتی که پتانسیل $V_n(x)$ بدون انعکاس باشد، نشان می دهد. در اصل ما در بخش های قبل پتانسیل ها را تا مرتبه n - صرف نظر از یک ضریب- که فرمشان همانند هم بود، بدست آوردیم. اما در اینجا ما توانستیم فرمالیسم کلی بر مبنای ابرپتانسیل ها و پتانسیل $V_n(x)$ ارائه نماییم، فارغ از اینکه برای مراتب متفاوت n ممکن است پتانسیل به یک فرم نباشد.

۲-۴)پتانسیل های شکل ناوردا

فرض کنید V_1 پتانسیل سیستم مورد نظر باشد . در این صورت با محاسبه ابرپتانسیل جفت پتانسیل V_2 تعیین می شود. و اگر این دو پتانسیل شکل یکسانی داشته باشند می توان طیف انرژی V_1 را با استفاده از یک روش ساده بدست آورد . یکسان بودن شکل به این معناست که اگر V_1 وابسته به تعدادی از پارامترها باشد آنگاه با جایگذاری مقادیر مختلفی از این پارامترها در V_1 بتوان V_2 را بدست آورد در این صورت V_1 را پتانسیل شکل ناوردا گویند. به بیان دیگر جفت پتانسیل ابرتقارنی شکل ناوردا هستند اگر در رابطه زیر صدق کنند[۲۱]:

$$V_2(x,a_1)=V_1(x,a_2)+R(a_1)\ , \quad (۳۴.۲)$$

که در آن a_1 شامل تعدادی از پارامترها است، a_2 تابعی از a_1 یعنی $a_1=f(a_2)$ است و جمله باقیمانده $R(a_1)$ وابستگی به مختصات x ندارد. در این صورت طیف انرژی هامیلتونی H_1 از رابطه زیر بدست می آید:

$$E_n^{(1)}(a_1)=\sum_{k=1}^{n} R(a_k) \quad (۳۵.۲)$$

از طرف دیگر توابع موج حالتهای مقید برای هر پتانسیل شکل ناوردایی را می توان به آسانی از روی تابع موج حالت پایه آن محاسبه شود:

$$\Psi_n^{(1)}(x,a_1) \ \alpha \ A^{\dagger}(x,a_1)A^{\dagger}(x,a_2)\dots A^{\dagger}(x,a_n)\,\Psi_0^{(1)}(x,a_{n+1}) \qquad (۳۶.۲)$$

این شرط منجر به این می شود که در صورت شکل ناوردا بودن یک پتانسیل ، طیف سیستم را می توان از طریق جبری و اثر متوالی عملگرهای دیفرانسیلی بر روی حالت پایه بدست آورد درست مثل حل پتانسیل نوسانگر هارمونیک که ا ز طریق عملگری محاسبه می شود و دراکثر کتاب های مقدماتی کوانتوم مکانیک بیان شده است به بیان دیگر با استفاده از این شرط و سلسله مراتب هامیلتونین ها، می توان به آسانی ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع هر پتانسیل شکل ناوردا را به روش جبری و از مفاهیم ابرتقارن بدست آورد.