بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکدهٔ ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

عنوان:

حل عددی معادلات بوزینسک به‌روش‌های بدون شبکه و روش $tanh - coth$

استاد راهنما:

دکتر فرید(محمد) مالک قائینی

استاد مشاور:

دکتر سید محمد مهدی حسینی

پژوهش و نگارش:

رقیــه رضائی

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به

پروانه‌های بی‌قرار زندگیم، پدر و مادر عزیزم

و

همه‌ی آن‌هایی که عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند.

باسپاس

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. سلام و درود بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز. . .

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجلّ از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین، بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ":

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوارم، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر فرید (محمد) مالک قائینی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و باتقوا، جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی، که زحمت مشاوره این پایان نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛

و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل و آقای دکتر قاسم برید لقمانی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا از روش تحلیلی $tanh - coth$ برای تعیین جواب‌های تک سالیتونی معادله‌های بوزینسک و بوزینسک اصلاح‌شده استفاده شده است. سپس به حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی خطی و غیرخطی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی به‌روش‌های هم‌محلی و تفاضلات متناهی می‌پردازیم. همچنین یک شبیه‌سازی عددی برای تقریب جواب معادله بوزینسک اصلاح‌شده به‌کمک توابع پایه‌ای شعاعی و با استفاده از روش‌های هم‌محلی و تفاضلات متناهی بر اساس گسسته‌سازی سه گامی زمانی بیان شده است. در ادامه برای اجتناب از حل دستگاه‌های غیرخطی، روش پیشگو-اصلاحگر را مطرح کرده و آن را روی یک مسئله انتشار موج منزوی پیاده‌سازی کرده‌ایم.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۳

۱.۱ مقدمه ۴

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۴

۱.۲.۱ نرم برداری ۴

۲.۲.۱ نرم ماتریسی ۵

۳.۲.۱ تجزیه LU ماتریس ۶

۴.۲.۱ ماتریس معین مثبت ۷

۵.۲.۱ تحلیل خطا ۷

۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و شرایط تکمیلی ۹

۱.۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۹

۲.۳.۱ معادلات دیفرانسیل جزئی خطی و غیرخطی ۱۱

۳.۳.۱ شرایط تکمیلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۱۲

۴.۱ نظریه موج‌های منزوی ۱۵

۲ معادله‌های بوزینسک و بوزینسک اصلاح‌شده و حل تحلیلی آن‌ها به‌روش $tanh-coth$ ۱۷

۱.۲ مقدمه ۱۸

۲.۲ معادله بوزینسک ۱۸

۳.۲ معادله بوزینسک اصلاح‌شده ۲۰

۴.۲ روش $tanh$ ۲۱

۵.۲ روش $tanh - coth$ ۲۵
۱.۵.۲ تحلیل روش $tanh - coth$ ۲۵
۲.۵.۲ حل تحلیلی معادله بوزینسک با روش $tanh - coth$ ۲۶
۳.۵.۲ حل تحلیلی معادله بوزینسک اصلاح‌شده با روش $tanh - coth$ . . ۲۹
۶.۲ نتیجه گیری ۳۲

۳ حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی به‌کمک توابع پایه‌ای شعاعی به‌روش‌های هم‌محلی و تفاضلات متناهی ۳۳
۱.۳ مقدمه ۳۴
۲.۳ توابع پایه‌ای شعاعی ۳۵
۱.۲.۳ تاریخچه توابع پایه‌ای شعاعی ۳۵
۲.۲.۳ روش توابع پایه‌ای شعاعی ۳۶
۳.۲.۳ توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت و معین مثبت مشروط ۳۹
۴.۲.۳ روش توابع پایه‌ای شعاعی الحاقی ۴۲
۳.۳ روش هم‌محلی ۴۶
۴.۳ روش تفاضلات متناهی ۴۷
۵.۳ خطاهای عددی ۴۸
۶.۳ مثال‌ها و نتایج عددی ۴۸
۷.۳ نتیجه گیری ۶۴

۴ حل عددی معادله بوزینسک اصلاح‌شده به‌کمک توابع پایه‌ای شعاعی به‌روش‌های هم‌محلی و تفاضلات متناهی ۶۵
۱.۴ مقدمه ۶۶
۲.۴ حل عددی معادله بوزینسک اصلاح‌شده ۶۶
۱.۲.۴ بیان روش ۶۶
۲.۲.۴ روش پیشگو- اصلاحگر ۷۰

۳.۴ نتیجه گیری ۷۴

آ واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۷۵

ب واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۷۹

لیست تصاویر

۱.۱ نمودار برخورد دو سالیتون ۱۶

۱.۲ نمودار $u_1(x,t)$ به‌ازای $a=2$، $b=3$ و $n=1$ در مثال ۱.۴.۲ . . . . . ۲۴

۲.۲ نمودار $u_2(x,t)$ به‌ازای $a=2$، $b=3$ و $n=1$ در مثال ۱.۴.۲ . . . . . ۲۴

۳.۲ نمودار $u_1(x,t)$ و $u_2(x,t)$ به‌ترتیب از راست به چپ در مثال ۱.۵.۲ . . . . ۲۸

۴.۲ نمودار $u_3(x,t)$ و $u_4(x,t)$ به‌ترتیب از راست به چپ در مثال ۱.۵.۲ . . . . ۲۸

۵.۲ نمودار $u_1(x,t)$ و $u_2(x,t)$ به‌ترتیب از راست به چپ در مثال ۳.۵.۲ . . . . ۳۰

۶.۲ نمودار $u_3(x,t)$ و $u_4(x,t)$ به‌ترتیب از راست به چپ در مثال ۳.۵.۲ . . . . ۳۱

۱.۳ نمودار تابع چندمجذوری به‌ازای εهای متفاوت ۳۷

۲.۳ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی به‌ازای تابع MQ با $\varepsilon=2$, $N=11$ در مثال۱.۶.۳. . . . . ۵۱

۳.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای تابع MQبا $\varepsilon=2$، $t=1$, $N=11$ در مثال۱.۶.۳. ۵۱

۴.۳ نمودار خطای مطلق به‌روشFDبا تابع MQ، $\varepsilon=2$، $t=1$, $N=11$ در مثال ۱.۶.۳. . . . . ۵۲

۵.۳ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی به‌ازای تابع GA، $\varepsilon=1/2$, $N=15$ در مثال ۲.۶.۳. . . . . ۵۴

۶.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای تابع GA، $\varepsilon=1/2$، $t=1$, $N=15$ در مثال ۲.۶.۳. ۵۴

۷.۳ نمودار خطای مطلق به‌روشFD با تابعGA، $\varepsilon=1/2$، $t=1$, $N=15$ در مثال۱.۶.۳. . . . . ۵۵

۸.۳ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی به‌ازای تابع MQ، $c = ۱/۱$ ، $N = ۲۰$ در مثال۳.۶.۳. . . . . ۵۶
۹.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای تابعMQ، $c = ۱/۱$، $t = ۰/۱۵$ ، $N = ۲۰$ در مثال۳.۶.۳. . . . . ۵۷
۱۰.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای تابعGA، $c = ۱/۱$، $t = ۰/۱۵$ ، $N = ۲۰$ در مثال۳.۶.۳. . . . . ۵۷
۱۱.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای تابعMQ، $c = ۲/۴$، $t = ۰/۱۵$ ، $N = ۲۰$ در مثال۳.۶.۳. . . . . ۵۸
۱۲.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای تابعGA، $c = ۲/۴$، $t = ۰/۱۵$ ، $N = ۲۰$ در مثال۳.۶.۳. . . . . ۵۸
۱۳.۳ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی به‌ازای MQ، $\varepsilon = ۲$ و $N = ۶$ در مثال ۴.۶.۳. ۶۰
۱۴.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای MQ، $\varepsilon = ۲$، $t = ۱/۵$ و $N = ۶$ در مثال ۴.۶.۳. ۶۰
۱۵.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای IMQ، $\varepsilon = ۲$، $t = ۱/۵$ و $N = ۶$ در مثال ۴.۶.۳. ۶۱
۱۶.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای GA، $\varepsilon = ۲$، $t = ۱/۵$ و $N = ۶$ در مثال ۴.۶.۳. ۶۱
۱۷.۳ نمودارجواب‌های دقیق و تقریبی به‌ازای تابع IMQ، $\varepsilon = ۰/۵$ ، $N = ۵$ در مثال۴.۶.۳. . . . . ۶۳
۱۸.۳ نمودار خطای مطلق به‌ازای تابع IMQ، $\varepsilon = ۰/۵$، $t = ۱$ ، $N = ۵$ در مثال ۴.۶.۳. . . . . ۶۳

۱.۴ حرکت موج منزوی منفرد برای $t \in [۰, ۷۲]$ و قدر مطلق خطا در $t = ۷۲$ در مثال ۲.۲.۴. . . . . ۷۳

لیست جداول

۱.۳ توابع پایه‌ای شعاعی ۳۶

۲.۳ خطای $L_۲$، L_∞ و RMS به‌ازای تابع MQ، $\varepsilon = ۲$، $t = ۱$ در مثال ۱.۶.۳. . ۴۹

۳.۳ خطای $L_۲$، L_∞ ,RMS به‌روشFD به‌ازای تابع MQ، $\varepsilon = ۲$، $t = ۱$ در مثال۱.۶.۳. . . . . ۵۰

۴.۳ مقایسه دقت جواب به‌ازای $\varepsilon = ۲$، $t = ۱$ و $N = ۱۱$ در مثال ۱.۶.۳. . . . . ۵۰

۵.۳ خطای $L_۲$، L_∞ و RMS به‌ازای تابع GA، $\varepsilon = ۱/۲$، $t = ۱$ در مثال ۲.۶.۳. ۵۳

۶.۳ خطای $L_۲$، L_∞ ,RMS به‌روشFD به‌ازای تابعGA،$\varepsilon = ۱/۲$,$t = ۱$ در مثال۲.۶.۳. . . . . ۵۳

۷.۳ مقایسه دقت جواب به‌ازای توابع MQ و GA، $t = ۰/۱۵$ و $N = ۲۰$ در مثال ۳.۶.۳. . . . . ۵۶

۸.۳ مقایسه دقت جواب به‌ازای $\varepsilon = ۲$، $t = ۱/۵$ و $N = ۶$ در مثال ۳.۶.۳. . . . ۵۹

۹.۳ مقایسه دقت جواب به‌ازای $\varepsilon = ۰/۵$، $t = ۱$ و $N = ۵$ در مثال ۵.۶.۳. . . . ۶۲

۱.۴ نتایج عددی به‌ازای $x_۰ = ۰$ و $k = ۰/۰۰۱$ در $t = ۷۲$ در مثال ۲.۲.۴. . . . . ۷۲

پیشگفتار

در سال‌های اخیر مطالعات انجام شده روی موج‌های غیرخطی توجه بسیاری از ریاضیدانان و فیزیکدانان را به خود جلب کرده است. از جمله معادلات توصیف کننده چنین موج‌هایی، معادله بوزینسک است که محور اصلی تحقیق در این پایان‌نامه می‌باشد.

این پژوهش در چهار فصل ارائه شده است که آن‌ها را به‌طور اجمالی شرح می‌دهیم: در فصل اول مفاهیم و تعاریف اولیه آورده شده‌اند. در فصل دوم پس از معرفی معادلات بوزینسک و بوزینسک اصلاح‌شده، روش‌های تحلیلی $tanh$ و $tanh - coth$ را بیان و در انتهای فصل معادلات بوزینسک و بوزینسک اصلاح‌شده را با استفاده از روش $tanh - coth$ حل می‌کنیم. در فصل سوم، پس از آشنایی با توابع پایه‌ای شعاعی و بیان برخی قضایا و ویژگی‌های آن‌ها، در قالب مثال‌هایی به حل عددی معادلات با مشتقات جزئی خطی و غیرخطی، با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی به‌روش‌های هم‌محلی و تفاضلات متناهی می‌پردازیم. در فصل چهارم، یک شبیه‌سازی عددی برای تقریب جواب معادلات بوزینسک اصلاح‌شده به‌کمک توابع پایه‌ای شعاعی و با استفاده از روش‌های هم‌محلی و تفاضلات متناهی بر اساس گسسته‌سازی سه گامی زمانی بیان شده است که برای اجتناب از حل دستگاه‌های غیرخطی، روش پیشگو - اصلاحگر را مطرح کرده‌ایم. در نهایت روش را روی یک مسئله انتشار موج منزوی پیاده‌سازی می‌کنیم.