بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

مثلث‌های قائم‌الزاویه با اضلاع جبری و خم‌های بیضوی روی میدان‌های عددی

صادق محمّدی‌خواه

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر علی سرباز جانفدا

پایان نامه آقای / خانم : صادق محمدی خواه

به تاریخ : ۱۳۸۹/۵/۶ شماره ۲۰۱۰۵۲-۲

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸٫-

(به حروف هیجده تمام)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر علی سرباز جانفدا

۲- داور خارجی: دکتر رضا سزیده

۳- داور داخلی: دکتر هوشنگ بهروش هوشنگ بهروش

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

تقدیم به:

پدر

مادر

خواهر

و برادرانم

تقدیر و تشکر

خدا را شکر می‌گویم از این که فرصتی دوباره برای آموختن دانستنیهای نو و تمرین تفکر ریاضی‌وار به من اعطا کرد. از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر علی سربازجانفدا که تکمیل این پایان‌نامه بدون کمکهای ایشان ممکن نبود کمال تشکر را دارم. از داوران محترم آقایان دکتر هوشنگ بهروش و دکتر رضا سزیده که افتخار شاگردی‌شان را نیز دارم، به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان بسیار سپاسگذارم. از تک تک اعضای خانواده‌ام که محبتشان مشوق من در انجام این کار بوده سپاسگذارم. از تمامی هم‌کلاسیها و دوستان عزیزم که در این مدت یار و همراه من بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم . آقایان و خانم‌ها:

محمد احمدپور، رضا بابایان، تورج صمدی، نازیلا موسوی، رقیه قربانی، علی پاک‌نفس، سعید رهنمای هدائی، قدرت غفاری، کیومرث نوری، کریم پیرجانی، علی فرهادی، مصیب ملکی و...

چکیده

در این پایان نامه، برای هر عدد صحیح مثبت n، وجود تعداد نامتناهی مثلث‌های قائم‌الزاویه با مساحت برابر با n و طول اضلاع متعلق به یک میدان عددی مشخصی را اثبات می‌کنیم. سپس این مطلب را به مسئله‌ی اعداد همنهشت معروف ربط می‌دهیم. برهان این مسائل ساختار روشنی از این گونه مثلث‌ها را به ما می‌دهد. برای این منظور، فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. برای چنین n ای، یک میدان عددی درجه ۳ مشخص $\mathbb{Q}(\lambda)$، (وابسته به n) و یک نقطه‌ی معلوم P_λ از مرتبه‌ی نامتناهی در گروه موردل—ویل خم بیضوی $E_n: \ Y^2 = X^3 - n^2X$ روی $\mathbb{Q}(\lambda)$، پیدا می‌کنیم.

پیشگفتار

اعداد همنهشت تاریخچه‌ی بسیار طولانی دارند به طوریکه ده‌ها قرن پیش اولین بار توسط دانشمندان مسلمان کشف شده‌اند. اهمیت شناسایی اعدادهمنهشت وقتی پررنگ می‌شود که رابطه‌ی بین این اعداد و رتبه‌ی خانواده‌ای از خم‌های بیضوی بیان شود.

فرض کنیم n یک عدد صحیح خالی از مربع باشد. در این صورت n را یک عدد همنهشت گوییم هرگاه n مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع گویا باشد. یک خانواده از خم‌های بیضوی را که معادلات آن‌ها به صورت $y^{2} = x^{3} - n^{2}x$ است، در نظر می‌گیریم. در این صورت ارتباط خاصی بین این خم‌های بیضوی و اعداد همنهشت وجود دارد. همچنین خواهیم دید، رتبه‌ی این خانواده از خم‌های بیضوی بزرگ‌تر از صفر است اگر و تنها اگر n یک عدد همنهشت باشد. قابل ذکر است که اگر K یک میدان عددی باشد، آن‌گاه بررسی اعداد همنهشت روی این میدان‌های عددی بسیار جالب است.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی [۷] نوشته شده است به طوریکه در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به جبر و نظریه‌ی خم‌های بیضوی که در طول پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده‌اند. در فصل دوم، ابتدا قضایای مهمی چون قضیه‌ی موردل—ویل و لوتز—ناگل را

بیان می‌کنیم. سپس اعداد همنهشت را تعریف کرده و ارتباط بین این اعداد و خم‌های بیضوی $E_n: \ y^2 = x^3 - n^2x$ را مطرح می‌کنیم. همچنین در این فصل، حدسیه‌ی BSD را روی خم‌های بیضوی $E_n: \ y^2 = x^3 - n^2x$ بیان کرده سپس با شرط برقراری این حدسیه؛ قضیه‌ی تانل را مطرح می‌کنیم.

در فصل سوم، اعداد K–همنهشت را معرفی می‌کنیم، که در آن K یک میدان عددی است. در این فصل توسیع‌های مربعی و مکعبی از $\mathbb{Q}$ را در نظر می‌گیریم. همچنین در یک قضیه‌ی اساسی زیرگروه تابدار خم‌های بیضوی را روی میدان‌های عددی بیان می‌کنیم. اعداد K–همنهشت را به طور محض K–همنهشت می‌نامیم هرگاه بی‌نهایت $a, b, c \in K$ موجود باشند به طوریکه در روابط زیر صدق کنند:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad , \quad ab = 2n \ .$$

دو قضیه‌ی اساسی در این فصل می‌گوید که هر عدد صحیح مثبت n؛ به طور محض K–همنهشت روی برخی میدان‌های حقیقی مربعی و مکعبی می‌باشد.

فهرست مندرجات

چکیده‌ی فارسی ii

پیشگفتار iii

۱ مفاهیم اولیه ۱

۱.۱ تعاریف و گزاره‌های مقدماتی ۱

۲.۱ مباحثی از نظریه‌ی جبری اعداد ۷

۳.۱ مفاهیم نظریه‌ی خم‌های بیضوی ۱۰

۴.۱ همگونی ۳۲

۲ اعداد همنهشت ۴۰

۱.۲ خم‌های بیضوی روی $\mathbb{Q}$ ۴۰

۲.۲ محاسبه‌ی زیرگروه تابی $E(\mathbb{Q})_{tors}$ ۴۲

۳.۲ اعداد همنهشت ۵۲

۴.۲ حدسیه بیرچ و اسوینرتون—دایر و قضیه تانل ۶۸

۳ اعداد همنهشت روی میدان‌های عددی ۷۶

۱.۳ اعداد همنهشت روی میدان‌های عددی ۷۶

۲.۳ اعداد همنهشت روی میدان‌های مربعی ۷۸

۳.۳ اعداد همنهشت روی میدان‌های مکعبی ۱۰۱

چکیده‌ی انگلیسی ۱۱۴

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و گزاره‌های مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد. زیرمجموعه‌ی $S \subset R$ را یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی[۱] می‌گوییم هرگاه $۱ \in S$ و S تحت عمل ضرب بسته باشد.

رابطه‌ی $\sim$ را روی مجموعه‌ی $R \times S$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a, s) \sim (b, t) \;\Leftrightarrow\; \exists u \in S \;:\; (at - bs)u = \circ \;.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی (a, s) را به صورت $\frac{a}{s}$ و مجموعه‌ی تمامی کلاس‌ها را با $S^{-۱}R$ نشان می‌دهیم. با تعریف دو عمل جمع و ضرب به صورت زیر، مجموعه‌ی $S^{-۱}R$ به یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار تبدیل می‌شود:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \;\;,\;\; \frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \quad (a, b \in R \;,\; s.t \in S) \;.$$

---

[۱] multiplication closed subset

هرگاه I ایده‌آل اولی از R باشد آن‌گاه به راحتی می‌توان دید که $S = R - I$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است که در این صورت مجموعه‌ی $S^{-1}R$ را به صورت R_I نشان می‌دهیم. همچنین می‌توان نشان داد که حلقه‌ی R_I تنها یک ایده‌آل بیشین دارد، یعنی R_I یک حلقه‌ی موضعی است. روند رسیدن از R به R_I را موضعی‌سازی[۲] R در I می‌گوییم.

تعریف ۲.۱.۱ هرگاه R یک حلقه‌ی جابجایی و یکداری باشد که شامل هیچ مقسوم علیه‌ی از صفر نیست، در این صورت با فرض $S = R - \{0\}$، حلقه‌ی $S^{-1}R$ را میدان کسرهای حلقه‌ی R می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم K یک میدان باشد. میدان L را توسیع[۳] میدان K می‌گوییم هرگاه $K \subseteq L$. به راحتی می‌توان دید که L یک K—فضای برداری است. بعد این فضای برداری را درجه‌ی توسیع[۴] نامیده و با نماد $[L:K]$ یا $\dim_K L$ نشان می‌دهیم. توسیع L را یک توسیع متناهی روی K می‌گوییم هرگاه $[L:K] < \infty$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم L یک توسیع از K بوده و $A = \{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq L$. کوچکترین میدان شامل K و A را توسیع تولید شده[۵] توسط A گفته و به صورت $K(A) = K(a_1, \cdots, a_n)$ نشان می‌دهیم.

---

[۲] local ring
[۳] extention
[۴] degree of extention
[۵] extention generated

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم L یک توسیع از K بوده و $K[X]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایبی در K باشد. عنصر $a \in L$ را یک عنصر جبری[۶] روی K می‌گوییم هرگاه ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفری در $K[X]$ باشد. در غیر این صورت عنصر a را یک عنصر متعالی[۷] روی K می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱ توسیع L از میدان K را یک توسیع جبری[۸] می‌گوییم هرگاه تمامی عناصر L که متعلق به K نیستند، عناصر جبری روی K باشند. همچنین هرگاه $a_1, \cdots, a_n \in L$ عناصر جبری روی K باشند در این صورت $K(a_1, \cdots, a_n)$ را توسیع جبری متناهی تولید شده[۹] توسط عناصر a_1،...،a_n می‌گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم L یک توسیع میدان K باشد. L را بستار جبری K می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) میدان L روی K جبری باشد؛

(۲) میدان L بسته‌ی جبری[۱۰] باشد، یعنی هر چندجمله‌ای $f(x) \in L[X]$ روی L به عوامل خطی تجزیه شود.

---

[۶] algebraic element

[۷] transcendental

[۸] algebraic extention

[۹] finitely generated algebraic extention

[۱۰] algebraically closed

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم L یک توسیع میدان K باشد و $g(X) \in K[X]$. گوییم g روی L شکافته[۱۱] می‌شود هرگاه به‌ازای برخی $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ و $a \in K$، $g(X) = a\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$. علاوه‌براین، هرگاه داشته باشیم $L = K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$، در این صورت L میدان شکافنده‌ی[۱۲] g روی K نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱ توسیع جبری N از میدان K را یک توسیع نرمال می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر چندجمله‌ای $p(x) \in K[x]$ با ریشه‌ای در N، تمامی ریشه‌های $p(x)$ در N باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم L یک توسیع جبری از میدان K باشد. می‌گوییم عنصر $a \in L$ روی K تفکیک‌پذیر[۱۳] است هرگاه ریشه‌ی ساده‌ای از چندجمله‌ای مینیمال خود در $K[X]$ باشد. توسیع L را یک توسیع تفکیک‌پذیر K گوییم هرگاه هر عنصر آن تفکیک‌پذیر باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم K یک میدان، L یک توسیع از K و S زیرمجموعه‌ای از L باشد. می‌گوییم S روی K وابسته‌ی جبری[۱۴] است اگر به‌ازای یک عدد صحیح مثبت n، یک چندجمله‌ای ناصفر $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ وجود داشته باشد که برای برخی عناصر متمایز s_1، ...، s_n از S تساوی $f(s_1, \cdots, s_n) = 0$ برقرار باشد. هرگاه S روی K وابسته‌ی جبری نباشد، می‌گوییم S روی K مستقل جبری[۱۵] است.

---

[۱۱] splits
[۱۲] spliting field
[۱۳] separable
[۱۴] algebraically dependent
[۱۵] algebraically independent

فرض کنیم K میدانی با مشخصه‌ی $\mathrm{char}(K) = p$ باشد. همریختی فروبنیوس $F : K \longrightarrow K$ به صورت $F(x) = x^p$ تعریف می‌شود. چون این همریختی همواره یک‌به‌یک است پس به راحتی می‌توان دید که $F(K) = K^p$ یک زیرمیدانی از K است.

تعریف ۱۲.۱.۱ میدان K را یک میدان کامل[۱۶] می‌گوییم هرگاه $\mathrm{char}(K) = 0$ و یا در صورتی که $\mathrm{char}(K) = p$، داشته باشیم $K = K^p$. به عنوان مثال میدان $\mathbb{Q}$ و تمامی میدان‌های متناهی کامل هستند.

گزاره ۱۳.۱.۱ میدان K کامل است اگر و تنها اگر هر توسیع جبری آن تفکیک‌پذیر باشد.

اثبات : به [[۶]، گزاره‌ی ۵.۱۵] مراجعه شود. □

فرض کنیم L یک میدان باشد. مجموعه‌ی $\mathrm{Aut}(L)$ متشکل از تمامی خودریختی‌های (میدان) $\sigma : L \longrightarrow L$ یک گروه تحت عمل ترکیب توابع تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم E و F توسیع‌هایی از میدان K باشند. نگاشت $\sigma : E \longrightarrow F$ که همریختی میدان‌ها و همچنین همریختی K–مدول‌ها باشد یک K–همریختی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم L توسیع میدان K و σ یک خودریختی میدان L باشد و در عین حال یک K–همریختی نیز باشد، در این صورت مجموعه‌ی تمام K–خودریختی‌های L را گروه گالوای[۱۷] L روی K، نامیده و بانماد $G_{L/K}$ نشان می‌دهیم.

---
[۱۶] perfect field
[۱۷] galios group

تبصره ۱۶.۱.۱ به ازای هر زیرگروه H از $G_{L/K}$ قرار می‌دهیم:

$$\text{Fix}(H) = \{x \in L \mid \forall \sigma \in H \; : \; \sigma(x) = x\} \; .$$

$\text{Fix}(H)$ را میدان ثابت H در L می‌نامیم. به راحتی می‌توان نشان داد که $\text{Fix}(H)$ زیرمیدانی از L شامل K است.

تعریف ۱۷.۱.۱ توسیع جبری (متناهی و یا نامتناهی) L از میدان K را یک توسیع گالوا[۱۸] می‌گوییم هرگاه $K = \text{Fix}(G_{L/K})$.

گزاره ۱۸.۱.۱ توسیع جبری L از میدان K یک توسیع گالواست اگر و تنها اگر L یک توسیع نرمال و تفکیک‌پذیر از K باشد.

اثبات : به [[۶]، گزاره‌ی ۲.۶.۱۵] مراجعه شود. □

تعریف ۱۹.۱.۱ بزرگترین توسیع گالوای میدان K را بستار تفکیک‌پذیر[۱۹] گفته و با نماد K_s نشان می‌دهیم. در واقع، K_s زیرمیدانی از بستار جبری $\overline{K}$ می‌باشد که شامل تمامی عناصر تفکیک‌پذیر روی K است. هرگاه $\text{char}(K) = 0$، آن‌گاه از تعریف میدان کامل و گزاره‌های ۱۳.۱.۱ و ۱۸.۱.۱ نتیجه می‌شود که $K_s = \overline{K}$.

[۱۸] galois extention
[۱۹] separable closure

تعریف ۲۰.۱.۱ توسیع میدان L از میدان K را دوری (آبلی) می‌گوییم اگر L روی K جبری و گالوا بوده و $G_{L/K}$ یک گروه دوری (آبلی) باشد. هرگاه در این حالت $G_{L/K}$ یک گروه دوری متناهی از مرتبه‌ی n باشد، آن‌گاه می‌گوییم L یک توسیع دوری از درجه‌ی n است. پس بنابه قضیه‌ی اساسی گالوا داریم: $[L:K]=n$.

قضیه ۲۱.۱.۱ هرگاه میدان L یک توسیع متناهی از میدان متناهی K باشد، آن‌گاه L متناهی بوده و روی K گالوا می‌باشد. گروه گالوای $G_{L/K}$، دوری است.

اثبات : به [۸] مراجعه شود. □

تبصره ۲۲.۱.۱ بنابه قضیه‌ی قبل، هر توسیع با بعد متناهی از یک میدان متناهی، یک توسیع دوری است.

۲.۱ مباحثی از نظریه‌ی جبری اعداد

تعریف ۱.۲.۱ میدان عددی[۲۰] عبارت است از زیرمیدانی مثل K از $\mathbb{C}$ به‌طوریکه $[K:\mathbb{Q}]$ متناهی باشد. واضح است که اگر K میدان عددی باشد، آن‌گاه $K=\mathbb{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ که در آن $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ اعداد جبری روی $\mathbb{Q}$ هستند. همچنین می‌توان ثابت کرد α عدد جبری است اگروتنهااگر $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ متناهی باشد.

[۲۰] number field

نمادگذاری ۲.۲.۱ هرگاه K یک میدان و α یک عنصر جبری روی K باشد، آن‌گاه

$p = \min(\alpha, K)$ چندجمله‌ای مینیمال α روی K را نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۲.۱ اگر K یک میدان عددی باشد، آن‌گاه عدد جبری θ موجود است به‌طوریکه

$$K = \mathbb{Q}(\theta) \ .$$

اثبات : به [[۱۷]، قضیه‌ی ۲.۲] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم $K = \mathbb{Q}(\theta)$ یک میدان عددی از درجه‌ی n روی $\mathbb{Q}$ باشد. در این صورت دقیقاً n تکریختی (همریختی یک به یک) متمایز $\sigma_i : K \longrightarrow \mathbb{C} \ \ (i = 1, \cdots, n)$ وجود دارد. عناصر $\sigma_i(\theta) = \theta_i$ ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای مینیمال θ روی $\mathbb{Q}$ هستند.

اثبات : به [[۱۷]، قضیه‌ی ۴.۲] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۲.۱ برای هر $\alpha \in K = \mathbb{Q}(\theta)$، چندجمله‌ای میدانی[۲۱] α روی K را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_\alpha(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \sigma_i(\alpha)) \in K[t] \ ,$$

به‌طوریکه $f_\alpha(\alpha) = 0$ چون $\sigma_1(\alpha) = \alpha$.

[۲۱] field Polynomial

قضیه ۶.۲.۱ ضرایب چندجمله‌ای میدانی $f_\alpha(t)$ اعداد گویا هستند، یعنی $f_\alpha(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

اثبات : به [[۱۷]، قضیه‌ی ۵.۲] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۲.۱ اعضای $\sigma_i(\alpha) \quad (i = ۱, ۲, \cdots, n)$ از $\mathbb{C}$ را K—مزدوج‌های α [۲۲] می‌نامیم.

اگرچه θ_i ها (K—مزدوج‌های θ) متمایز هستند ولی در حالت کلی، K—مزدوج‌ها همیشه متمایز نیستند. به‌عنوان مثال، برای $\alpha = ۱$ داریم: $\sigma_i(۱) = ۱ \quad (i = ۱, \cdots, n)$.

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنیم K یک میدان عددی و $\alpha \in K$ دلخواه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) چندجمله‌ای میدانی f_α توانی از $p_\alpha = \min(\alpha, K)$ است.

(۲) K—مزدوج‌های α، ریشه‌های p_α در $\mathbb{C}$ هستند و هر یک n/m بار تکرار می‌شوند که $n = \deg f_\alpha$ و $m = \deg p_\alpha$. (m مقسوم علیه‌ای از n می‌باشد.)

(۳) $\alpha \in \mathbb{Q}$ اگر و تنها اگر تمامی K—مزدوج‌های α یکسان باشد.

(۴) $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\theta)$ اگر و تنها اگر تمامی K—مزدوج‌های α متمایز باشد.

اثبات : به [[۱۷]، قضیه‌ی ۶.۲] مراجعه شود. □

تعریف ۹.۲.۱ میدان عددی K را میدان مربعی [۲۳] می‌نامیم هرگاه $[K : \mathbb{Q}] = ۲$.

---

[۲۲] K-Conjugates of α

[۲۳] quadratic field

گزاره ۱۰.۲.۱ میدان‌های مربعی دقیقاً به فرم $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ هستند که در آن d آزاد از مربع می‌باشد.

اثبات : به [[۱۷]، گزاره‌ی ۱.۳]مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۲.۱ میدان مربعی K را یک میدان مربعی موهومی[۲۴] می‌گوییم هرگاه $K = \mathbb{Q}(\theta)$، به‌طوریکه θ یک عدد مختلط باشد.

۳.۱ مفاهیم نظریه‌ی خم‌های بیضوی

فرم‌های نرمال خم بیضوی

در این بخش مقدمه‌ای از نظریه‌ی خم‌های بیضوی را بیان می‌کنیم. K را میدانی دلخواه با بستار جبری $\overline{K}$ و مشخصه‌ی $\mathrm{char}(K)$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۳.۱ مجموعه‌ی تمامی n—تایی‌های واقع در $\overline{K}$ یعنی مجموعه‌ی

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\overline{K}) = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \overline{K}\} ,$$

را n—فضای آفینی[۲۵] روی K می‌گوییم. همچنین مجموعه‌ی

$$\mathbb{A}^n(K) = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in K\} ,$$

را نقاط K—گویای[۲۶] $\mathbb{A}^n$ می‌نامیم.

[۲۴] imaginary quadratic field
[۲۵] affine n-space
[۲۶] K-rational points