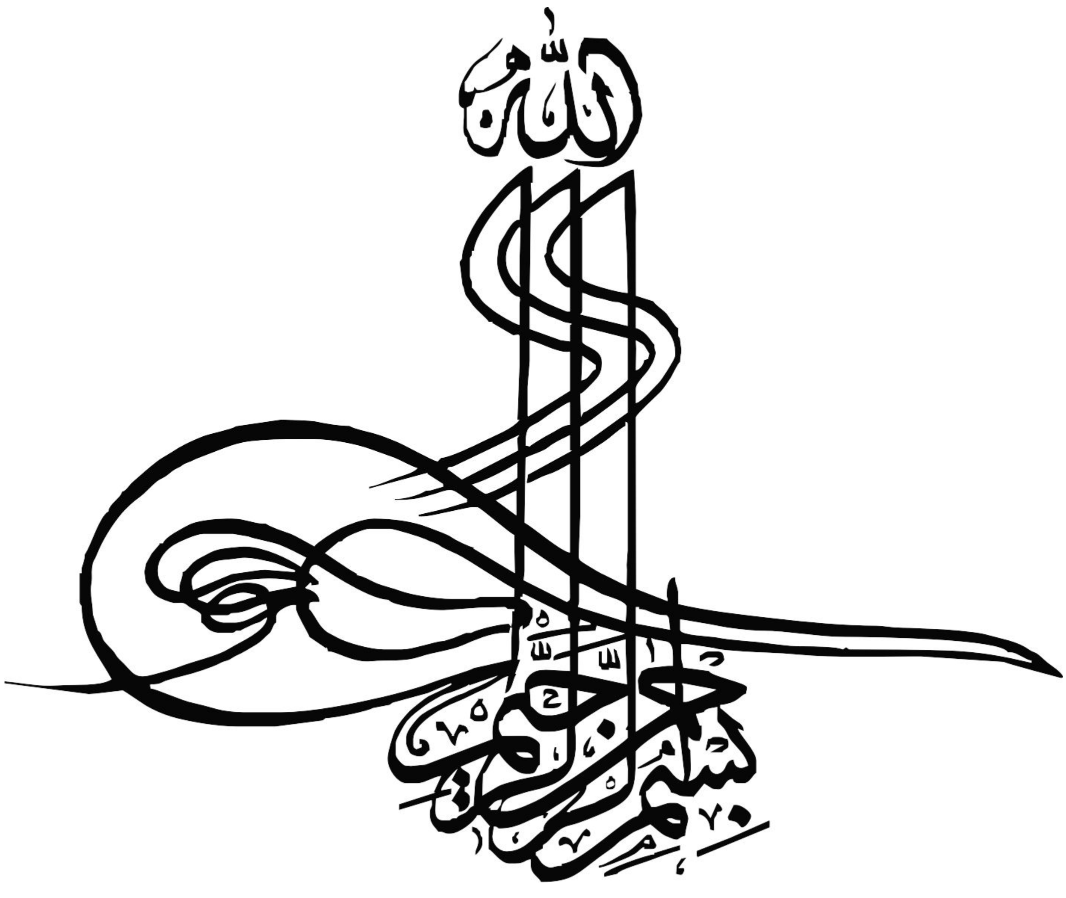
an- with it replace to <return> <command> I ignored.Type was command Your

it. without continue to <return> command،or other



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

جواب های دقیق معادله غیرخطی شرودینگر با قانون توانی غیرخطی و جبرلی

از:

هاجر رضازاده

استاد راهنما:
دکتر نصیر تقی زاده

استاد مشاور:
مهدی سهرابی

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

تقدیم به همسر عزیزم

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر تقی زاده صمیمانه تشکر و قدردانی کنم و همچنین از همسر عزیزم جناب آقای مهدی سهرابی که بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. و همچنین از همه کسانی که در طول تحصیلم مرا یاری نمودند سپاسگزارم.

فهرست مطالب

چکیده:

جواب های دقیق معادله غیرخطی شرودینگر با قانون توانی غیرخطی و جبر لی هاجر رضازاده

در این پایان نامه، روش های کارآمد و مؤثری برای به دست آوردن جواب‌های دقیق برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی بیان شده است.
با استفاده از روش انتگرال اول و روش ساده ترین معادلات به حل معادله غیرخطی شرودینگر با قانون توانی غیرخطی می‌پردازیم.
در ادامه، چند معادله دیفرانسیل را به هر دو روش حل می‌کنیم سپس این دو روش را با هم مقایسه می کنیم.
در انتها به بررسی تقارن های معادله غیرخطی شرودینگر با قانون توانی غیرخطی خواهیم پرداخت و جواب های جدیدی را به دست می آوریم.

کلید واژه:
روش انتگرال اول، روش ساده ترین معادلات، معادله غیرخطی شرودینگر با قانون توانی غیرخطی، معادله هیگز- گینبورگ- لانداأ، جبر لی، گروه تقارن

Abstract:

Exact solutions for the nonlinear Schrödinger equation with power law nonlinearity and Lie algebra

Hajar Rezazadeh

In this dissertation, efficient and effective methods for obtaining exact solutions of some nonlinear partial differential equations has been introduced.
We will solve nonlinear Schrödinger equation with power law nonlinearity by the first integral method and the simplest equation method.
Next, we solve some partial differential equations with both methods and compare these two methods.
Finally, we will investigate the symmetry groups of nonlinear Schrödinger equation with power law nonlinearity and we will obtain new solutions.

Key words:
The first integral method; The simplest equation method; The nonlinear Schrödinger equation with power law nonlinearity; Landau-Ginburg-Higgs equation; Lie algebra; Symmetry group

پیشگفتار:

پدیده‌های غیرخطی در طیف گسترده‌ای از علوم نظیر فیزیک پلاسما، فیزیک حالت جامد، دینامیک سیالات و ... ظاهر می‌شوند. برای این منظور، ریاضی‌دانان برای پیدا کردن جواب‌های دقیق آنها تلاش‌های زیادی انجام می‌دهند. چندین روش قدرتمند و خوب برای به دست آوردن جواب‌های دقیق معادلات غیرخطی مثل روش تانژانت هایپربولیک [۱][۱۸-۱۹]، روش ضرب تابع نمایی [۲] [۲۰]، روش توابع گویا انتقال یافته[۳][۲۱]، روش تانژانت هایپربولیک گسترش یافته [۴] [۶و۲۲]، روش انتگرال اول[۵][۷-۱۲] و غیره ارائه شده است. روش انتگرال اول برای اولین بار توسط فنگ [۶][۷]، برای حل معادله کا دی وی - برگر[۷]پیشنهاد شد که بر پایه نظریه حلقه ها در جبر جابجایی است این روش به وسیله تعدادی از نویسندگان گسترش یافته است[۸-۱۱]. اما روش بسیار قدرتمندی نیز در زمینه حل و کاهش مرتبه یک معادله دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد که به کارهای سوفوس لی[۸]در این زمینه مربوط می شود متأسفانه این زمینه تا کنون چندان مورد توجه قرار نگرفته است علی رغم اینکه این حوزه در زمینه محض و کاربردی بسیار غنی می باشد.

مطالب این پایان نامه به شرح زیر می‌باشد:

درفصل اول، تعاریف و مقدمات اولیه که پیش نیاز این پایان نامه است، بیان می‌شود.

در فصل دوم، ابتدا به بیان تعاریف و قضایایی که برای شرح روش انتگرال اول و روش ساده ترین معادلات نیاز است، می پردازیم و سپس روش انتگرال اول را بیان می کنیم و در انتها برای درک بهتر، معادله شرودینگر غیرخطی با قانون توانی غیرخطی را به این روش حل می کنیم.

در فصل سوم به شرح روش ساده ترین معادلات می پردازیم و سپس معادله شرودینگر غیرخطی با قانون توانی غیرخطی را به این روش حل می نماییم.

در فصل چهارم، معادلاتی را به هر دو روش حل می‌کنیم و سپس به مقایسه این دو روش می پردازیم.

در فصل پنجم، جهت دیگری را در پیش می گیریم، با استفاده از نظریه گرو ه های لی به بررسی تقارن های معادله شرودینگر غیرخطی با قانون توانی غیرخطی می پردازیم و به جواب های جدیدی از معادله دست می یابیم و به نتایج جالبی از مقایسه آن با روش های یاد شده می رسیم.

---

[۱] The tanh method [۲] The multiple exp-function method [۳] The transformed rational function method [۴] The extended tanh function method [۵] The first integral method [۶] Feng [۷] Burger-Kdv [۸] Sophus Lie

فصل ۱

مفاهیم پایه

۱ - ۱ مقدمه

در این فصل به تعاریف و مقدمات اولیه که در این پایان نامه از آنها استفاده می‌شود، می‌پردازیم.

۱ - ۲ نکات مقدماتی

تعریف معادله دیفرانسیل معمولی و معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

در هر پدیده و فرآیندی در طبیعت پارامترهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم ارتباط دارند بیان این ارتباط به زبان ریاضی، یک معادله تابعی است و معادله تابعی حاصل از پدیده ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل مطالعه می شود، معادله دیفرانسیل [۱] نامیده می شود. اگر متغیر مستقل یکی باشد معادله دیفرانسیل را معمولی [۲] گویند و اگر متغیر مستقل بیش از یکی باشد معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۳] نامند.

تعریف مرتبه معادله دیفرانسیل:

بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل مرتبه معادله دیفرانسیل نامیده می شود.

تعریف معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و غیرخطی:

اگر فرض کنیم $u = u(x_1, \cdots, x_n)$ با تعریف نماد

$$u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad u_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}, \cdots$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی در حالت کلی به صورت زیر نشان داده می شود.

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, \cdots) = 0$$

- اگر F برحسب u و مشتقات آن به صورت خطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی گویند.

---
[۱] Differential equation
[۲] Ordinary differential equation(ODE)
[۳] Partial differential equation (PDE)

- اگر F برحسب u و مشتقات آن به صورت غیرخطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را غیرخطی گویند.

به عنوان مثال، معادلات

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

$$u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 = 0,$$

به ترتیب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم خطی، مرتبه دوم غیرخطی هستند.

سیگنال[۱] :

هر کمیت قابل اندازه گیری با خصوصیتی از محیط که مکان یا سرعت آشوب و برهم ریختگی در محیط را نشان دهد سیگنال نامیده می شود.

موج[۲] :

هر سیگنال قابل تشخیصی که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت کند، موج نامیده می شود.

امواج سیار[۳]:

امواجی که به صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نمایش داده می‌شوند، امواج سیار یا تراولینگ نامیده می‌شوند. چنین تابعی، آشفتگی‌ای را نشان می‌دهد که با سرعت v حرکت می‌کند.

جواب موج سیار و انواع گوناگون آن:

جواب موج سیار یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، جوابی است که به صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نوشته می‌شود. اگر این جواب ها به طور متناوب تکرار شوند به آن ها جواب های متناوب [۴] گویند.
مطالعه معادلاتی که از پدیده های موج مدل سازی شده اند، نیاز به مطالعه جواب های موج سیار دارند. جواب موج سیار یا تراولینگ یک جواب از شکل دائم در حال حرکت با یک سرعت ثابت است. جواب های موج سیار

[۱] Signal
[۲] Wave
[۳] Travelling Waves
[۴] Periodic Soliton

معمولاً از تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبط با آن ها به دست می آیند. جواب های موج سیار

$$u(x,t) = f(\xi), \quad \xi = x - vt$$

که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی را به معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب ξ تبدیل می کنند، معمولاً از روش های مستقیم جبری به دست می آیند. تعدادی از انواع جواب های موج سیار که در نظریه موج انفرادی که دربسیاری از زمینه های علمی از امواج آب در آب کم عمق در فیزیک پلاسما وجود دارند عبارتند از:

الف- موج های انفرادی و سولیتون ها:

امواج انفرادی، امواج سیار موضعی با سرعت های ثابت هستند و سولیتون ها[۱]انواع مخصوص از امواج انفرادی می باشند. در ریاضیات و فیزیک، سولیتون یک موج منزوی خودتقویت کننده (یک بسته موج یا پالس) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند شکلش را حفظ می‌کند. پدیده سولیتونی اولین بار توسط جان اسکات راسل[۲] توصیف شد.

به عبارت دیگر، سولیتون به دسته خاصی از جواب‌های موضعی یک معادله غیرخطی موج گفته می‌شود که با شکل، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می‌دهند. البته توافق عام بر سر تعریف سولیتون وجود ندارد و در منابع مختلف سولیتون را به صورت‌های متفاوت تعریف می‌کنند. درازین[۳] و جانسون[۴] سه خاصیت به سولیتون‌ها نسبت دادند، به موجی که سه خاصیت زیر را داشته باشد سولیتون گفته می‌شود:

۱ - شکل آن تغییر نکند.

۲ - در منطقه‌ای از فضا محدود باشد.

۳ - بعد از برخورد با سولیتون‌های دیگر شکل خود را مگر با یک انتقال فاز حفظ کند.

تعریف‌های رسمی بیشتری وجود دارد، اما آن تعریف‌ها نیازمند ریاضیات محکمی هستند. با این حال، بعضی دانشمندان اصطلاح سولیتون را برای پدیده‌هایی که دقیقا این سه خاصیت را ندارند استفاده می‌کنند (برای مثال، گلوله نور در اپتیک غیرخطی علی‌رغم اینکه حین بر هم کنش انرژی از دست می‌دهد، سولیتون نامیده می‌شود.)

تئوری جواب‌های موج سیار[۵] یکی از زمینه‌های رو به گسترش در ریاضیات مدرن است که نوع خاصی از جواب‌ها هستند و از دید فیزیکی فرآیند انتقال را توصیف می‌کنند.

[۱] Solitons

[۲] John Scott Russell

[۳] Drazin

[۴] Johnson

[۵] The Theory of travelling wave solution

ب- جواب های متناوب:

جواب های متناوب، جواب های موج سیاری هستند که به طور متناوب تکرار می شوند، مانند معادله موج استاندارد $u_{xx} = u_{tt}$ که دارای جواب متناوب $\cos(x-t)$ می باشد.

تعریف گروه:

مجموعه ناتهی G همراه با تابع $* : G \times G \to G$ را یک گروه می نامیم هرگاه

۱) عمل دوتایی $*$ شرکت پذیر است. $a*(b*c)=(a*b)*c$

۲) عضوی چون e در G وجود دارد به طوری که برای هر x از G، $e*x=x*e=x$

(عضو e عضو همانی نسبت به عمل $*$ است.)

۳) برای هر عضوی مانند a از G عضوی چون a' از G وجود دارد به طوری که $a'*a=a*a'=e$.

(عضو a' معکوس a نسبت به عمل $*$ است.)

تعریف عمل گروه بر یک مجموعه :

فرض می کنیم X یک مجموعه و G یک گروه باشد. عمل G بر X نگاشتی است چون $\varphi : G \times X \to X$ به طوری که :

۱) به ازای هر x از X، $\varphi(e,x)=x$

۲) به ازای هر x از X و هر g_1, g_2 از G، $\varphi((g_1g_2),x)=\varphi(g_1,\varphi(g_2,x))$.

مثال) گروه دوران های صفحه $(SO(2))$ روی R^2 به صورت زیر عمل می کند.

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xcos\theta - ysin\theta \\ xsin\theta + ycos\theta \end{pmatrix}$$

اگر $\theta = 0$ باشد واضح است که هر عضوی به خودش نگاشته می شود و اگر نقطه ای را به اندازه θ_1 و سپس به اندازه θ_2 دوران دهیم مانند این است که آن نقطه به اندازه $\theta_1 + \theta_2$ دوران یافته است.

تعریف توپولوژی:

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد گردایه T از زیرمجموعه های X را یک توپولوژی بر روی X می نامند اگر

۱) گردایه T شامل مجموعه تهی و X باشد،

۲) گردایه T شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه های موجود در آن باشد،

۳) اشتراک هر دو عضو T به T تعلق داشته باشد.

زوج (X, T) را یک فضای توپولوژیک می نامند.

تعریف فضای هاسدورف [۱]:

فضای توپولوژیک (X, T) را هاسدورف می نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in X, x \neq y \quad \exists u_1 \in T \ , \ \exists u_2 \in T \quad s.t. \quad u_1 \cap u_2 = \emptyset$$

تعریف همئومورفیسم[۲]:

فرض کنید X, Y دو فضای توپولوژیک باشد تابع $f : X \to Y$ را همئومورفیسم می نامیم هرگاه

۱) f تابعی پیوسته ، یک به یک و پوشا باشد،

۲) f^{-1} تابعی پیوسته باشد.

تعریف پایه[۳]:

فرض کنید (X, T) فضای توپولوژیک باشد یک گردایه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه های باز از X را یک پایه برای توپولوژی T می نامند اگر هر مجموعه باز به صورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

تعریف منیفلد توپولوژیک [۴]:

فضای توپولوژیک M را یک منیفلد توپولوژیک از بعد m می نامیم هرگاه

۱) M هاسدورف باشد،

۲) M به طور موضعی اقلیدسی باشد یعنی حول هر نقطه همسایگی وجود داشته باشد که با همسایگی از R^m همئومورف باشد،

۳) M دارای پایه شمارا باشد.

[۱] Hausdorff space

[۲] Homeomorphism

[۳] Basis

[۴] Topological manifold

اگر p یک نقطه از منیفلد توپولوژیک M باشد بنا به (۲) همسایگی هایی مانند u حول p و w حول $\zeta(p)$ و یک تابع مانند $\zeta : u \to w$ چنان موجود است که ζ یک همئومورفیسم باشد.

تعریف منیفلد دیفرانسیل پذیر [۱] :

اگر حول p دو همسایگی مانند (u,ζ) و (v,η) داشته باشیم بطوریکه $\zeta o \eta^{-1}$ و $\eta o \zeta^{-1}$ توابعی مشتق پذیر باشند منیفلد توپولوژیک M را منیفلد دیفرانسیل پذیر می نامند.

مجموعه چنین زوج مرتب هایی که M را بپوشاند، تشکیل ساختار دیفرانسیل پذیر[۲] روی M را می دهد.

فرض کنید M, N دو منیفلد دیفرانسیل پذیر به ترتیب با بعد m, n و $f : M \to N$ تابعی مشتق پذیر باشد آن گاه $(Df)_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ یک تبدیل خطی می باشد که دارای ماتریس نمایشی به صورت زیر است.

$$(Df)_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

رتبه این ماتریس که برابر بعد برد این تبدیل خطی است، رتبه f در نقطه x تعریف می شود. fدارای بیشینه رتبه است اگر رتبه آن در هر نقطه برابر n باشد به این توابع سابمرژن [۳] می گویند.

تعریف جبر لی :

یک فضای برداری مانند V روی میدان F را یک جبر لی [۴]می نامیم هرگاه عمل دوتایی مانند کروشه با شرایط زیر روی آن وجود داشته باشد

$$[,] : V \times V \to V$$

$$\forall a, b \in F, \forall X, Y, Z \in V$$

$$1)[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$2)[X, Y] = -[Y, X]$$

$$3)[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

[۱] Differentiable manifold

[۲] Differentiable structure

[۳] Submmersion

[۴] Lie algebra

تعریف گروه لی:

گروه G، به همراه یک ساختار دیفرانسیل پذیر گروه لی نامیده می شود هرگاه توابع زیر توابعی مشتق پذیر باشند.

$$G \times G \longrightarrow G \qquad G \longrightarrow G$$
$$(A,B) \to AB \qquad A \to A^{-1}$$

تعریف انتقال چپ روی G:

اگر g عضوی دلخواه از گروه G باشد آن گاه تابع زیر را یک انتقال چپ [۱] می نامند.

$$L_g : G \to G$$
$$L_g(x) = gx$$

میدان برداری ناوردای چپ:

میدان برداری X را روی G ناوردای چپ [۲] می گویند هرگاه برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$(L_g)_* X_{g'} = X_{gg'}$$

قضیه: اگر X, Y دو میدان ناوردای چپ روی G باشند آن گاه $[X, Y]$ نیز ناوردای چپ است [۱۷].

از قضیه بالا می توان نتیجه گرفت مجموعه میدان های برداری ناوردای چپ روی G تشکیل یک جبر لی می دهد.

تعریف عمل موضعی:

گروه لی G روی X به طور موضعی عمل می کند هرگاه همسایگی از $e \in G$ (عضو خنثی G) مانند u_e چنان موجود باشد که

$$u_e \times X \longrightarrow X$$
$$1) e.x = x$$
$$2) \forall g_1, g_2 \in u_e \quad (g_1.g_2 \in u_e \longrightarrow (g_1.g_2 x = g_1.(g_2 x))$$

---

۱ Left translation

۲ Left invariant

فصل ۲

روش انتگرال اول

۲ - ۱ مقدمه

در این فصل، ابتدا یک سری نکات مقدماتی را بیان می‌کنیم و سپس به بیان روش انتگرال اول می‌پردازیم. همچنین برای درک بهتر این روش، معادله شرودینگر غیرخطی با قانون توانی غیرخطی [۱] را به این روش حل می‌کنیم.

۲ - ۲ نکات مقدماتی

دستگاه‌های خودگردان و غیر خودگردان:

اگر $x_k = x_k(t)$، $k = 1, 2, ..., n$، در این صورت دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

که در آن f_kها، $k = 1, 2, ..., n$، توابع مستقل از t می باشند، یک دستگاه خودگردان یا غیروابسته نامیده می‌شود. از طرف دیگر در دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

که در آن F_kها، $k = 1, 2, ..., n$، توابع وابسته به t هستند، یک دستگاه غیر خودگردان یا وابسته نامیده می‌شوند. برای تبدیل یک دستگاه غیر خودگردان به یک دستگاه خودگردان تغییر متغیر

$$t = \tau \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\tau}{dt} = 1$$

را در نظر می گیریم. از آنجا می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = F_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = F_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

[۱] The nonlinear Schrödinger Equation with power law nonlinearity

در این صورت داریم

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = F_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{d\tau} = F_n(t, x_1, ..., x_n) \\ \frac{dt}{d\tau} = 1 = F_{n+1}(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

که دستگاه حاصل، یک دستگاه خودگردان می‌شود.

انتگرال اول:

انتگرال اول[۱]، یک تابع غیرثابت و بطور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است که مشتق آن بر جواب‌های آن معادله عینا صفر است.

برای یک معادله

$$y' = f(x, y) \qquad (۲-۲-۱)$$

یک انتگرال اول، یک تابع $F(x, y)$ است که $F(x, y) = c$ جواب عمومی معادله (۲-۲-۱) است. همچنین c یک ثابت اختیاری است.

پس، $F(x, y)$ در معادله خطی زیر که شامل مشتقات جزئی مرتبه اول است، صدق می‌کند

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

نکته۱:

لازم نیست که در همه نقاط تعریف شده در دامنه (۲-۲-۱)، انتگرال اول موجود باشد اما همیشه در یک همسایگی کوچک نقاطی که در آن تابع $f(x, y)$ بطور پیوسته انتگرال پذیر است، انتگرال اول موجود است.

نکته۲:

انتگرال اول منحصربفرد نیست. برای مثال، برای معادله $y' = -\frac{x}{y}$ انتگرال اول فقط $x^2 + y^2$ نیست بلکه برای مثال، $e^{x^2+y^2}$ نیز یک انتگرال اول است.

با دانستن چگونگی پیداکردن انتگرال اول برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، می‌توان انتگرال اول را برای

[۱] First Integral