بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

---

# ماتریس های نهایتاً نمایی نامنفی و کاربردهای آن

---

مؤلف:

شیرین ریاحیان اشکور

استاد راهنما:

دکتر فاطمه خالوبی

استاد مشاور:

دکتر حسین مو منابی

شهریور ماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

## بخش ریاضی

## دانشکده ریاضی و رایانه
## دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: شیرین ریاحیان اشکور — امضاء:

استاد راهنما: دکتر فاطمه خالویی — امضاء:

استاد مشاور: دکتر حسین مو منایی — امضاء:

داور اول : — امضاء:

داور دوم: — امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: — امضاء:

---

# تقدیم به

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

ما حصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوار ترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به زیبا ترین لبخند زندگیم، لبخند زیبای مادرم

که هر آن چه آموختیم در مکتب عشق شما آموختم و هر چه بکوشم قطره ایی از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

امروز هستیم به امید شماست وفردا کلید باغ بهشتم رضای شما

ره آوردی گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید. بوسه بر دستان پر مهرتان

# تشکر و قدردانی

تقدیر و تشکر می کنم از استاد عزیزم سرکار خانم دکتر فاطمه خالویی که با زحمات بی شائبه ی خود من را مورد لطف خود قرار دادند.

تشکر می کنم از فروتنی استادانه اش که هر فصل از این نوشته حاکی از شوقی است که ایشان در من نهادند.

از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر حسین مومنایی، که زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از پدر و مادرم و تمامی دوستانی که در این مسیر همراه و همدل من بودند تقدیر و تشکر می کنم.

# مقدمه

یک ماتریس حقیقی $A$ را نامنفی (مثبت ) می نامیم هرگاه درایه های آن نامنفی (مثبت )باشند و با نماد $A \geq 0$ ( $A > 0$ )، نمایش می دهیم. این مفاهیم و تعاریف در آغاز برای بردارها استفاده می شد. در سال ۱۹۰۷، پرون به این نتیجه رسید که ماتریس های مربعی مثبت دارای خاصیت های زیر هستند[۱۹] :

۱) شعاع طیفی آن ها یک مقدار ویژه مثبت و ساده است؛

۲) ماتریس دارای یک بردار ویژه مثبت نظیر شعاع طیفی است. (این بردار را بردار پرون می نامیم.)؛

۳) سایر مقدار ویژه ها دارای بردار ویژه مثبت نیستند؛

۴) شعاع طیفی، تابعی اکیداً صعودی از درایه های ماتریس است.

پس ازآن در سال ۱۹۱۲، این نتایج توسط فروبینیوس به ماتریس های نامنفی تحویل ناپذیر گسترش پیدا کرد [۱۰] و اکنون برای ماتریس های نامنفی نیز استفاده می شود.

برای ماتریس های نامنفی، نتایج ذکر شده بیانگر این می باشد که یک بردار ویژه نامنفی متناظر با یک مقدار ویژه غالب نامنفی وجود دارد. این نتایج اکنون به عنوان قضیه پرون فروبینیوس شناخته شده و دارای کاربرد گسترده ایی در مسائل مربوط به ماتریسهای نامنفی، $M$ - ماتریس ها و $H$ - ماتریس ها است. همچنین کاربرد این قضیه در فرآیند های تصادفی، زنجیر مارکو[۱]، مدل های آماری، حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مواردی مشابه

[۱] Markov chain

به صورت گسترده قابل مشاهده است. در زمینه ارتباط بین ماتریس های نامنفی و خاصیت پرون(خاصیت های ذکر شده) سوال زیر مطرح می شود:

ماتریس های نامنفی دارای چه شرایطی باشند که در کلاس ماتریس های دارای خاصیت پرون (خاصیت های ذکر شده) قرار گیرند؟

ماتریس های نهایتاً نامنفی و نهایتاً مثبت از جمله ماتریس هایی می باشند که در خاصیت پرون صدق می کنند. ماتریس های نمایی $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ در بسیاری از رشته ها و علوم کاربرد دارند که از مهمترین کاربرد آن حل معادله دیفرانسیل خطی به صورت

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

که $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $t \geq 0$، است. جواب های معادله به صورت $e^{tA}$می باشند. معمولاً معادلات دیفرانسیل خطی که به ازای هر $t \geq t_0$، دارای جواب نامنفی باشند، مورد بررسی قرار می گیرند. هدف اصلی پایان نامه، بررسی ماتریس $e^{tA}$ می باشد. به خصوص این که چه موقع $e^{tA}$ نامنفی یا مثبت است. یعنی $A$ چه باشد تا $e^{tA}$ نامنفی یا مثبت باشد. برای این منظور پایان نامه را در پنج فصل تنظیم نموده ایم که در فصل اول، برخی تعاریف و قضایای اساسی مورد نیاز در پایان نامه را به عنوان پیش نیاز فصل های بعدی بیان نموده ایم. در فصل دوم ماتریس های نهایتاً نامنفی را معرفی و خاصیت پرون فروبینیوس برای ماتریس ها را بررسی کرده و ارتباط آن ها با مجموعه های $PF_n$ و $WPF_n$ را مشاهده می کنیم. در فصل سوم ماتریس های نهایتاً نمایی نامنفی را مورد بررسی قرار می دهیم و قضایایی در این رابطه ارائه می نماییم. در فصل چهارم نقاط با پتانسیل نامنفی را بررسی می کنیم. برای محاسبه $e^{tA}$ معمولاً از نرم افزار های ریاضی استفاده می شود. در فصل پنجم این پایان نامه روش

لئونارد[۲] را برای بدست آوردن $e^{tA}$، معرفی می نماییم.

[۲] Leonard

# چکیده

ساختار ماتریس های نمایی $e^{tA}$ به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ است. هدف اصلی پایان نامه، بررسی ماتریس $e^{tA}$ می باشد. به خصوص این که چه موقع $e^{tA}$ نامنفی یا مثبت است. یعنی $A$ چه باشد تا $e^{tA}$ نامنفی و یا مثبت باشد. در این پایان نامه ماتریس نهایتاً نامنفی(مثبت) را معرفی و خاصیت پرون فروبینیوس برای ماتریس ها را بررسی کرده و ارتباط آن ها با مجموعه های $PF_n$ و $WPF_n$ را مشاهده می کنیم. همچنین ماتریس های نهایتاً نمایی نامنفی(مثبت) را مورد بررسی قرار می دهیم و به خصوص اثبات می کنیم که ماتریس های نمایی نامنفی(مثبت) و اساساً نامنفی(مثبت) معادل هستند. علاوه بر این، روش لئونارد را برای بدست آوردن $e^{tA}$ معرفی می کنیم.



**کلمات کلیدی:**

*ماتریس های نهایتاً نامنفی، ماتریس های نمایی نامنفی، نقاط با پتانسیل نامنفی، پرون فروبینیوس[3]، ماتریس متزلر[4]، مخروط محدب*


---

[3]Perron-Frobenius

[4]Metzler

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# مقدمات و پیش نیازها

مطالب این فصل که به سه بخش تقسیم شده است، مورد استفاده سایر فصل ها قرار خواهد گرفت. در بخش اول، ابتدا تعاریف مورد نیاز این پایان نامه را مطرح کرده و سپس فرم فروبینیوس نرمال را معرفی می کنیم و قضایای مورد نیاز در پایان نامه را مطرح می کنیم. در بخش دوم، به یاد آوری برخی مطالب در مورد گراف ها و معرفی گراف کاهش یافته می پردازیم. بخش سوم این فصل به معرفی ماتریس نمایی و ارائه کاربردی از ماتریس های نمایی اختصاص دارد. در این فصل و سایر فصل های پایان نامه، مجموعه تمام ماتریس های جایگشتی از مرتبه $n$ را با $\mathcal{P}(n)$ نمایش می دهیم.

## ۱.۱ تعاریف اولیه

مطالب این بخش را با جزئیات بیشتر در [۱۱]و [۱۷] و [۲۱]می توان مشاهده کرد. لازم به ذکر است، در تمام این نوشتار، $M_n(\mathbb{C})$ ماتریس های مربعی از مرتبه $n$ با درایه های مختلط و$M_n$ ماتریس مربعی با درایه های حقیقی است.

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض می کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$.

۱)عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه برای $A$ نامیده می شود هر گاه بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$ موجود باشد به طوری که $Ax = \lambda x$. بردار $x$، یک بردار ویژه راست یا به طور خلاصه بردار ویژه ماتریس $A$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda$ نامیده می شود؛

۲) بردار ناصفر $y \in \mathbb{C}^n$ یک بردار ویژه چپ ماتریس $A$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda$ نامیده می شود هر گاه $y^*A = \lambda y^*$؛

۳)طیف $A$ مجموعه تمام مقادیر ویژه $A$ تعریف شده وبه صورت $\sigma(A)$ نشان داده می شود؛

۴)شعاع طیفی $A \in M_n$ عبارت است از

$$\rho(A) = max\{| \lambda |: \lambda \in \sigma(A)\}.$$

**تعریف ۲.۱.۱.** ماتریس $P \in M_n(\mathbb{R})$ جایگشتی نامیده می شود هرگاه دقیقاً یک درایه در هر سطر و ستون از آن برابر با یک و مابقی درایه های آن برابر صفر باشند.

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنید چند جمله ایی $P_A(t) = det(tI - A)$ که $t$ متغیر این چند جمله ایی می باشد و ریشه های چند جمله ایی مشخصه مقادیر ویژه ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ هستند آن گاه $P_A(t)$ چند جمله ایی مشخصه ماتریس $A$ نامیده می شود.

چند جمله ای ناصفر $P_A$ چند جمله ای مینیمال $A$ نامیده می شود هر گاه

۱) $P_A(A) = ۰$؛

۲) $P_A$ یکه باشد؛

۳) $P_A$ چند جمله ای با کمترین درجه باشد که در خاصیت $P_A(A) = ۰$ صدق می کند.

**مثال ۴.۱.۱.** ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. در این صورت چندجمله ایی مشخصه ماتریس عبارت است از

$$det(tI - A) = det \begin{pmatrix} t - ۱ & -۲ \\ -۲ & t - ۴ \end{pmatrix} = (t - ۱)(t - ۴) - ۴ = t(t - ۵).$$

بنابراین $\sigma(A) = \{۰, ۵\}$.

**تعریف ۵.۱.۱.** چند گانگی مقدار ویژه $\lambda$ به عنوان ریشه ایی ازچند جمله ایی مینیمال (چند گانگی هندسی ) ماتریس $A \in M_n$، $index_\lambda(A)$ نامیده می شود. اگرصفر ریشه چند جمله ایی مینیمال $A$ نباشد، به عبارت دیگر $A$ معکوس پذیر باشد، داریم $index_۰(A) = ۰$.

**تعریف ۶.۱.۱.** ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ را در نظر می گیریم

۱) ماتریس $A$ پوچ توان نامیده می شود هر گاه عدد صحیح و مثبت $k$ موجود باشد به طوری که $A^k = ۰$؛

۲) ماتریس $A$ بالا مثلثی نامیده می شود هر گاه $a_{ij} = ۰$ برای هر $i < j$، $۱ \leq i, j \leq n$؛

۳) ماتریس $A$ قطری نامیده می شود هر گاه $a_{ij} = ۰$ برای هر $i \neq j$، $۱ \leq i, j \leq n$ و به صورت $A = diag(a_{۱۱}, \ldots, a_{nn})$ نمایش داده می شود.

**تعریف ۷.۱.۱.** ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ قطری شونده است هر گاه ماتریس معکوس پذیر

$S \in M_n(\mathbb{C})$ موجود باشد به طوری که

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{pmatrix}.$$

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ در این صورت ماتریس $(\bar{A})^T$ به صورت $A^*$ تعریف می شود.

**تعریف ۹.۱.۱.** یک مقدار ویژه $\lambda$از $A$ غالب نامیده می شود هر گاه $\rho(A) = |\lambda|$.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** طول طیف $A \in M_n$ عبارت است از

$$\lambda(A) = max\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

**تعریف ۱۱.۱.۱.** ماتریس $A \in M_n$ تحویل پذیر نامیده می شود هر گاه برای $n = 1$، $A = 0$ و برای $n \geq 2$ ماتریس جایگشتی $P$ وجود داشته که

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

به طوری که $A_{11}$ و $A_{22}$ ماتریس مربعی هستند. در غیر این صورت $A$ را تحویل ناپذیرگویند.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** ماتریس $A \in M_n$ متشابه با یک ماتریس قطری بلوکی است، یعنی اگر

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_p \end{pmatrix}$$

که هر بلوک $J_i$، $1 \leq i \leq p$ یک ماتریس مربعی به فرم زیر می باشد.

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

در این صورت ماتریس معکوس پذیر $P$ وجود دارد به طوری که $P^{-1}AP = J$. تنها درایه های ناصفر $J_i$ به جز قطر اصلی، بالای قطر اصلی قرار دارند. در این صورت ماتریس $J(A) = diag(J_{k_1}(\lambda_1), \cdots, J_{k_m}(\lambda_m))$ فرم جردن [1] ماتریس $A$ و $J_{k_i}(\lambda_i)$، $1 \leq i \leq m$ بلوک های جردن [2] نظیر مقدار ویژه $\lambda_i$ نامیده می شود.

**قضیه ۱۳.۱.۱** ([3] کیلی - همیلتون)**.** [۱۱] *فرض کنید $P_A(t)$ چند جمله ای مشخصه $A \in M_n$ باشد. آن گاه $P_A(A) = 0$.*

**قضیه ۱۴.۱.۱** (پرون فروبینیوس)**.** [۵] *فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ ماتریسی با درایه های*

[1] Jordan form

[2] Jordan block

[3] Cayley- Hamilton

*نامنفی باشد. آن گاه $\rho(A)$ نامنفی است و دارای بردار ویژه نامنفی است. به طوری که $Ax = \rho(A)x$ که $x \neq ۰$ برداری نامنفی است.*

**تعریف ۱۵.۱.۱.** فرض کنید $A \in M_n$. در این صورت،

۱) فضای ویژه ماتریس $A$ متناظر با $\lambda \in \sigma(A)$، که با $E_\lambda(A)$ نشان داده می شود عبارت است از فضای پوچی $(A - \lambda I)$؛

۲) فضای ویژه تعمیم یافته ماتریس $A$ متناظر با $\lambda \in \sigma(A)$، که با $G_\lambda(A)$ نشان داده می شود عبارت است از فضای پوچی $(A - \lambda I)^r$ که $r = index_\lambda(A)$.

**تعریف ۱۶.۱.۱.** فرض کنید $A \in M_n$ و یک ماتریس جایگشتی$P \in \mathcal{P}(n)$ وجود دارد به طوری که $۱ \leq k \leq n$ ،

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & \cdots & A_{۱k} \\ ۰ & A_{۲۲} & \cdots & A_{۲k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

که هر بلوک قطری $A_{jj}$ ، $۱ \leq j \leq n$ مربعی وتحویل ناپذیر یا ماتریس $۱ \times ۱$ صفر است. در این حالت $PAP^T$ فرم فروبینیوس نرمال $A$ نامیده می شود.

**گزاره ۱۷.۱.۱.** *فرض کنید $A, B \in M_n$ و مقادیر ویژه ماتریس $B$ متمایز باشند و همچنین $AB = BA$. در این صورت بردار های ویژه $A, B$ یکسان هستند.*

*برهان.* فرض می کنیم $\lambda$ یک مقدار ویژه $B$ و $x \neq ۰$ بردار ویژه $B$ نظیر $\lambda$ باشد، یعنی $Bx = \lambda x$. با ضرب کردن ماتریس $A$ در دو طرف تساوی داریم $ABx = \lambda Ax$. چون $AB = BA$، داریم $BAx = \lambda Ax$. با توجه به این که مقادیر ویژه $B$ مجزا هستند و این که $Ax \neq ۰$ یک بردار ویژه $B$ برای مقدار ویژه $\lambda$ است. در صورتی که $Ax = ۰$، $x \neq ۰$ بردار

ویژه $A$ نظیر مقدار ویژه صفر است. پس در هر دو حالت $Ax$ به صورت مضربی از $x$ است یعنی $Ax = \mu x$. بنابراین بردار های ویژه دو ماتریس $A$ و $B$ یکسان هستند. $\square$

## ۲.۱ مروری بر گراف ها

گراف یکی از مهمترین شاخه ها در جبر خطی می باشد. این شاخه از ریاضیات قدمت طولانی دارد و در طول سال های اخیر پیشرفت های قابل ملاحظه ایی داشته است و روز به روز به اهمیت آن بیشتر پی برده می شود و در سطوحی مانند علوم رایانه، طراحی مدارهای الکتریکی، علوم مهندسی، شیمی، تحقیق در عملیات، آمار و سایر زمینه ها کاربردهای فراوان دارد. در این بحث، مروری کوتاه بر تعریف گراف و همچنین گراف کاهش یافته می کنیم. لازم به ذکر است که برای مطالعه بیشتر درباره گراف می توان به [۳]و [۶]و[۸] مراجعه نمود.

**تعریف ۱.۲.۱.** گراف جهت دار ماتریس $A \in M_n$ که با $G(A)$ نشان داده می شود، گرافی جهت دار با $n$ راس $P_1, P_2, \cdots, P_n$ است به طوری که جهت یال ها در $G(A)$ از $P_i$ به $P_j$ است هرگاه $a_{ij} \neq 0$، برای هر $1 \leq i, j \leq n$.

**تعریف ۲.۲.۱.** گرافی که بین هر دو راس $i$ و$j$ آن مسیری جهت دار با شروع $i$ وپایان $j$ وبر عکس موجود باشد قویا همبند نامیده می شود.

**تعریف ۳.۲.۱.** فرض کنید $\Gamma(A) = (V, E)$ گراف جهت دار مربوط به ماتریس $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ باشد آن گاه ماتریس $M(A) = [\mu_{ij}]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & i, j \in E \\ 0 & i, j \notin E \end{cases}$$

به ماتریس $M(A)$ ماتریس مجاورت $\Gamma$ می گویند.

**تعریف ۴.۲.۱.** فرض کنید $A \in M_n$ و$G(A)$ گراف $A$ باشد. گراف کاهش یافته $A$ که با $R(A)$ نمایش داده می شود، عبارت است از زوج $(V, E)$ که در آن مجموعه $V$ شامل کلاس های تحویل ناپذیر از $A$ ومجموعه $E$ شامل زوج های مرتب $(K, L)$ است که $K, L \in V$

ویالی از یک راس $i \in K$ به یک راس $j \in L$ در $G(A)$ وجود دارد.

اگر در $R(A)$ به جای هرمسیری که بین هر دو راس $i, j$ وجود دارد، یک یال قرار دهیم، گرافی بدست می آید که این گراف با $\overline{R(A)}$ نشان داده می شود.

در واقع گراف کاهش یافته، گراف جهت دار مربوط به فرم فروبینیوس نرمال هر ماتریس است. بنابراین برای هر ماتریس می توان گراف کاهش یافته را بدست آورد.

**قضیه ۱.۲.۵.** *اگر $A$ ماتریس مجاورت گراف $\Gamma$ باشد، آن گاه درایه $(i, j)$ ام از $A^r$ تعداد مسیرهای به طول $r$ از راس $i$ به راس $j$ می باشد.*

*برهان.* فرض می کنیم $A = [a_{ij}]$ ماتریس مجاورت $\Gamma$ باشد، بنابراین برای $r = 1$ واضح است $a_{ij}$ تعداد مسیر های به طول یک از راس $i$ به راس $j$ است.

برای $r \geq 2$. فرض می کنیم $i, j, k$ رئوسی از گراف جهت دار ماتریس $A^r$ باشد، اگر یالی از راس $i$ به راس $k$ و سپس یالی از راس $k$ به راس $j$ وجود داشته باشد در این صورت $a_{ik}a_{kj} = 1$ و در غیر این صورت $a_{ik}a_{kj} = 0$. بنابراین برای هر $1 \leq k \leq n$، تعداد مسیر های به طول ۲، از راس $i$ به راس $j$ برابر با $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \ldots + a_{in}a_{nj}$ می باشد که همان درایه $(i, j)$ام ماتریس $A^2$ است.

به همین صورت می توان برای $r \geq 3$ اثبات کرد. □