بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مراغه
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته آنالیز ریاضی

قاب‌ها برای هیلبرت C^*–مدول‌های شمارا مولد

اساتید راهنما: دکتر اصغر رحیمی
دکتر لیلا شهباز

استاد مشاور: دکتر شهرام نجف زاده

پژوهش و نگارش: معصومه امینی

تابستان ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر بال پروازم و

مادر شوق نفس کشیدنم

قدردانی و تشکر

اول گنج من که تمام هستی از او سرچشمه می‌گیرد، همانا خداوند متعال است که فرمود: من گنج پنهانی بودم، دوست داشتم که شناخته شوم پس آفرینش را آفریدم و هستی را به همین منظور گسترش دادم.

هر انسانی از خود چیزی به یادگار می‌گذارد کم یا زیاد. مورد نظر من و وجهه همت، معیار عمل و سرلوحه آرزوی من، حضور در محضر اساتید گرانقدر و غنی از حیث اخلاق و عمل بوده که نتایج آن تنها یادگار من برای دیگران است.

این پایان‌نامه نقشه گنجی است خالی از متاع دنیا و همانا آن گنج، توفیق و تلاش و حرکت در مسیر دانش و شادی بی‌وصفی است که هیچ جا پیدا نمی‌شود مگر در کلاس درس استاد.

در اینجا لازم می‌دانم از زحمات و راهنمایی‌های ارزشمند استاد خوبم دکتر اصغر رحیمی که مرا در تدوین این پایان‌نامه یاری رساندند و از محضرشان دانش و اخلاق آموختم، تشکر و قدردانی ویژه داشته باشم.

همچنین از راهنمایی‌های دکتر لیلا شهباز و دکتر شهرام نجف‌زاده سپاسگزارم.

در پایان از خانواده خوبم و دوستان عزیزم تشکر می‌کنم. امیدوارم در مسیر آموختن و نشر دانش جواب گوی زحماتشان باشم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم یک عملگر خطی کراندار بین دو فضای هیلبرت پوشاست اگر و تنها اگر الحاقی آن از پایین، کراندار باشد. سپس به کمک آن نشان می‌دهیم، اگر V یک هیلبرت C^*–مدول شمارا مولد روی C^*–جبر A باشد آنگاه دنباله $\{f_i : i \in I\}$ یک قاب استاندارد برای V است اگر و تنها اگر $\sum\limits_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle$ برای هر $x \in V$ همگرای در نرم باشد و ثابت‌های $C, D > ۰$ موجود باشند به قسمی که

$$C\|x\|^۲ \leq \|\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle\| \leq D\|x\|^۲.$$

به کمک این هم ارزی ثابت می‌کنیم عملگرهای الحاقی‌پذیر پوشا، قاب‌های استاندارد را حفظ می‌کنند.

همچنین نشان داده می‌شود تصاویر پوشا از پایه‌های متعامد یکه، قاب $\{f_i : i \in I\}$ را به دست می‌دهد، به طوری که خانواده‌ای از تصاویر $\{e_i : i \in I\}$ موجودند که برای هر $i \in I$، $e_iAe_i = Ce_i$ و $f_i = f_ie_i$.

در انتها ثابت می‌کنیم قاب $\{f_i : i \in I\}$ برای یک هیلبرت $K(H)$–مدول شمارا مولد V، به قسمی که برای هر $i \in I$، $\langle f_i, f_i\rangle = e$ قابی برای فضای هیلبرت $V_e = \{ve : v \in V\}$ می‌باشد.

پیش گفتار

قاب‌ها اولین بار توسط دافین و شیفر در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه برخی مسائل جدی در زمینه آنالیز فوریه‌ی غیرهارمونیک تعریف شده‌اند. اساساً دافین و شیفر، ایده اصلی پردازش سیگنال‌ها که توسط گابور در سال ۱۹۴۶ ارائه شده بود را به شکل مجرد در آوردند، با وجود این که به نظر نمی‌رسید که ایده‌های دافین و شیفر در خارج از زمینه سری‌های فوریه غیر هارمونیک به کار گرفته شوند. تا این که در یک مقاله توسط دوبوشی، گراسمان و میر در سال ۱۹۸۶، در استفاده از تئوری قاب‌ها برای پردازش سیگنال‌ها نخستین قدم برداشته شد. بعد از انتشار این مقاله مهم، مقوله قاب‌ها به طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفت که حاصل آن تشکیل گروه‌های تحقیقاتی و انتشار مقالات فراوان در این زمینه و کاربردهای آن است.
اکنون قاب‌ها در زمینه‌های گوناگون از جمله تئوری کوانتوم، کدگذاری آنتن، چند لایه، اینترنت و ... کاربرد دارند.
همچنین قاب‌های فضای هیلبرت نقش اساسی در پردازش سیگنال و تصویر دارند.
در سال‌های اخیر ریاضیدانان زیادی تئوری قاب در فضای هیلبرت را به هیلبرت C^*-مدول‌ها تعمیم دادند و نتایج قابل توجهی را به دست آورده‌اند که تئوری قاب‌ها را پرمایه و غنی نموده است.
این پایان نامه بر اساس مقاله
ON FRAMES FOR COUNTABLY GENERATED HILBERT C^*-MODULES
نوشته LJIL. JANA. ARAMBASIC که در فوریه ۲۰۰۷ در مجله PROCEEDINGS(A.M.S) چاپ شده، تهیه و تنظیم گردیده است.
در فصل ۱، برخی از مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها آورده شده و برخی مطالب مورد نیاز در مورد عملگرها و عملگرهای هیلبرت - اشمیت ذکر شده است. همچنین قاب‌ها برای فضای

هیلبرت، به طور مختصر معرفی می‌شود.

در فصل ۲، خواص هیلبرت C^*−مدول‌ها از جمله پایه‌های متعامد یکه بیان شده است. همچنین قضایای مهمی در مورد قاب‌ها در فضای هیلبرت C^*−مدول‌های شمارا مولد اثبات می‌شود. در این میان حالتی که C^*−جبر مورد نظر $K(H)$ باشد مورد توجه قرار می‌گیرد.

در فصل ۳، بعد از ذکر مقدمات لازم، عملگرهای الحاقی پذیر پوشا بررسی و اثر آن‌ها بر قاب‌ها مطالعه می‌شود.

و بالاخره در فصل ۴، ابتدا C^*−جبر $K(H)$ و تصاویر در آن مورد بحث قرار می‌گیرند. سپس به بررسی ارتباط بین تصاویر در $K(H)$ و پایه‌ها و قاب‌ها در یک هیلبرت $K(H)$−مدول می‌پردازیم. فضای V_e و CCR−جبرها معرفی و قضیه مهمی در این بخش اثبات خواهد شد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و پیش نیازها

تعریف ۱.۱.۱. یک حلقه یک سه تایی $(R,+,\cdot)$ است که در آن R یک مجموعه و $(+)$ و $(\cdot)$ عمل‌های دوتایی روی R با ویژگی‌های زیر هستند:

۱- $(R,+)$ یک گروه آبلی است.

۲- عمل $(\cdot)$ شرکت پذیر، توزیع پذیر چپ و راست روی $(+)$ است.
اگر $(\cdot)$ عملی تعویض پذیر باشد آن‌گاه حلقه R تعویض پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک زیر مجموعه ناتهی I از R را یک ایده آل از R گوییم هرگاه،

۱- تحت عمل جمع I یک زیرگروه از R باشد.

۲- به ازای هر $r \in R$ وهر $a \in I$، داشته باشیم $ra \in I$ و $ar \in I$.

قضیه ۳.۱.۱. یک زیر مجموعه غیر تهی I از یک حلقه R یک ایده آل است اگر و تنها اگر دارای خواص زیر باشد:

۱- اگر $a,b \in I$، در این صورت $a-b \in I$.

۲- اگر $r \in R$ و $a \in I$ در این صورت $ra \in I$ و $ar \in I$.

برهان. رجوع کنید به [۱]. □

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $(F,+,\cdot)$ یک حلقه و F^* مجموعه همه عضوهای ناصفر F باشد (صفر، همانی گروه $(F,+)$ است). اگر $(F^*,\cdot)$ یک گروه آبلی باشد، آن‌گاه حلقه $(F,+,\cdot)$ را یک میدان می‌نامیم. همانی گروه $(F^*,\cdot)$ را یکه میدان F می‌نامیم.

فرض کنیم $(V,+)$ یک گروه آبلی و F یک میدان باشد. V یک فضای برداری روی F است هرگاه به ازای هر $\alpha \in F$ و هر $v \in V$ عنصر $\alpha v \in V$ وجود داشته باشد به طوری که:

۱- برای هر $\alpha \in F$ و هر $v_1, v_2 \in V$: $\alpha(v_1+v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$.

۲- برای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $v \in V$: $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$؛

۳- برای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $v \in V$: $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$؛

۴- برای هر $v \in V$: $1v = v$ (که در آن ۱ عنصر یکه میدان F است).

تعریف ۵.۱.۱. اگر V یک فضای برداری روی F باشد، زیر مجموعه W از V را یک زیرفضای V نامیم هرگاه W خودش تحت عمل‌هایی که از V به W محدود شده‌اند یک فضای برداری روی F باشد. زیر مجموعه متشکل از بردار صفر، زیرفضایی از V به نام زیرفضای صفر V است.

قضیه ۶.۱.۱. یک زیرمجموعه غیر تهی W از V زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر به ازای هر دو بردار α و β از W و هر اسکالر c از F، بردار $c\alpha + \beta$ در W باشد.

برهان. رجوع کنید به [۳]. □

تعریف ۷.۱.۱. گیریم S مجموعه‌ای از بردارهای فضای برداری V باشد. زیرفضای پدید آمده توسط S را با W نمایش داده و عبارت است از اشتراک همه زیرفضاهای V که شامل S باشند. هنگامی که S مجموعه‌ای متناهی از بردارها باشد یعنی $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$، W را زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ نامیم.

قضیه ۸.۱.۱. زیرفضای پدید آمده توسط یک زیرمجموعه ناتهی S از فضای برداری V، عبارت است از مجموعه همه ترکیبات خطی بردارهای S.

برهان. رجوع کنید به [۳]. □

تعریف ۹.۱.۱. اگر به ازای زیرمجموعه‌ای متناهی چون S از فضای برداری V، $L(S)$ مجموعه همه ترکیب‌های خطی اعضای S با V برابر شود، آن‌گاه V را متناهی مولد (به طور متناهی تولید شده) می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر A یک حلقه باشد، مجموعه ناتهی V را یک $A-$مدول راست (مدول روی A) خوانیم هرگاه V تحت $(+)$ یگ گروه آبلی باشد به طوری که به ازای هر $r \in A$ و هر $m \in V$ عنصری چون mr در V باشد به طوری که برای هر $a, b \in V$ و هر $r, s \in A$:

۱- $(a+b)r = ar + br$؛

۲- $(as)r = a(sr)$؛

۳- $a(r+s) = ar + as$.

اگر A دارای عنصر یکه باشد و به ازای هر عنصر m در V، $m1 = m$ آنگاه گوییم V یک $A-$مدول یکه دار است.

$A-$مدول چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر V یک مدول باشد، زیرمدول V' از V، یک زیرگروه است که تحت ضرب اسکالر بسته باشد، یعنی برای هر $r \in A$ و $v' \in V'$: $v'r \in V'$.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم X یک زیرمجموعه از مدول V باشد. زیرمدولی از V که توسط X تولید می‌شود $\bigcap\limits_{j\in J} M'_j$، است به طوری که $\{M'_j : j \in J\}$ خانواده همه زیرمدول‌های V است که شامل X هستند. این زیرمدول را با $\langle X\rangle$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنیم X یک زیرمجموعه از مدول V باشد. اگر $X = \emptyset$ آنگاه $\langle X\rangle = \{0\}$ و اگر $X \neq \emptyset$ آنگاه $\langle X\rangle = \{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i r_i \ ; \ r_i \in A, x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$.

برهان. رجوع کنید به [۱۲]. □

تعریف ۱۴.۱.۱. مدول V را متناهی مولد می‌نامیم اگر زیرمجموعه متناهی $\{x_1, \ldots, x_n\}$ از V موجود باشد به طوری که $V = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

مدول V دوری است اگر عنصر $x \in V$ یافت شود که $V = \langle x\rangle$.

تعریف ۱۵.۱.۱. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم‌دار نامیم هرگاه به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x، چنان مربوط شده باشد که:

۱- به ازای هر $x, y \in X$: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۲- اگر $x \in X$ و α یک اسکالر باشد : $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

۳- $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

هر فضای خطی نرم‌دار را می‌توان با متر $d(x,y)=\|x-y\|$ به یک فضای متری تبدیل کرد. همچنین اگر τ یک توپولوژی روی X باشد به قسمی که،

۱- هر نقطه از X یک مجموعه بسته باشد.

۲- عمل‌های جمع و ضرب فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشند.

آنگاه X را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم هرگاه به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x,y\rangle$ به نام حاصل ضرب داخلی x و y چنان مربوط باشد که قواعد زیر برقرار باشند،

۱- $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ (علامت بار نشانه مزدوج مختلط است)؛

۲- اگر $x,y,z\in H$، آنگاه $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$؛

۳- اگر $x,y\in H$ و α اسکالر باشد، $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$؛

۴- به ازای هر $x\in H$، $\langle x,x\rangle\geq ۰$؛

۵- $\langle x,x\rangle=۰$ اگر و فقط اگر $x=۰$.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد. برای هر $x\in H$، نرم x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|^{۲}=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

متر حاصل از این نرم، H را به یک فضای متری تبدیل می‌کند. هرگاه این فضای متری تام باشد یعنی هر دنباله کشی در H همگرا باشد، آنگاه H را یک فضای هیلبرت گوییم.

علامت H تا پایان این بخش نمایشگر فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۸.۱.۱. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام است.

تعریف ۱۹.۱.۱. اگر به ازای x و y در H داشته باشیم $\langle x,y\rangle=۰$ة گوییم x متعامد با y است و می‌نویسیم $x\perp y$. اگر M زیر فضایی از H باشد، $M^{\perp}$ را مجموعه تمام $y\in H$هایی تعریف

می‌کنیم که با هر $x \in M$ متعامد است.

قضیه ۲۰.۱.۱. فرض کنیم M زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد. در این صورت :

۱- هر $x \in H$ تجزیه منحصر به فردی مانند $x = P_x + Q_x$ دارد که $P_x \in M$ و $Q_x \in M^{\perp}$؛

۲- P_x و Q_x به ترتیب نزدیکترین نقاط به x در M و $M^{\perp}$ هستند؛

۳- نگاشت‌های $P : H \longrightarrow M$ و $Q : H \longrightarrow M^{\perp}$ خطی‌اند؛

$$Q(x) = Q_x \qquad P(x) = P_x$$

۴- $\|x\|^۲ = \|P_x\|^۲ + \|Q_x\|^۲$.

P و Q را تصویرهای متعامد H روی M و $M^{\perp}$ می‌نامند.

برهان. رجوع کنید به [۲۸]. □

نتیجه ۲۱.۱.۱. اگر M زیر فضای بسته‌ای از H باشد، آنگاه $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

برهان. رجوع کنید به [۲۷]. □

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از عناصر H باشد:

۱- دنباله $\{x_n\}$ متعامد است هرگاه به ازای هر $m, n \in \mathbb{Z}$، $\langle x_m, x_n \rangle = ۰$.

۲- دنباله $\{x_n\}$ متعامد یکه است هرگاه متعامد بوده و به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\|x_n\| = ۱$.

۳- زیر فضای تولید شده توسط $\{x_n\}$ عبارت است از مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی از x_nها یعنی

$$span(x_n) = \left\{ \sum_{-N}^{N} c_n x_n : N > ۰, c_n \in \mathbb{C} \right\};$$

۴- دنباله $\{x_n\}$ کامل است هرگاه $span(x_n)$ در H چگال باشد و یا به طور معادل

$$\{x_n\}^{\perp} = \{x \in H : \langle x, x_n \rangle = ۰, n \in \mathbb{Z}\} = \{۰\};$$

۵- سری $\sum x_n$ به طور نامشروط همگراست، هرگاه به ازای هر جایگشت δ از اعداد صحیح، سری $\sum x_{\delta(n)}$ به یک عنصر از H همگرا باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱. برای دنباله متعامد یکه $\{e_n\}$ در H احکام زیر معادل‌اند:

۱- $\{e_n\}$ کامل است؛

۲- به ازای هر $x \in H$: $\|x\|^۲ = \sum |\langle x, e_n\rangle|^۲$؛

۳- به ازای هر $x \in H$: $x = \sum \langle x, e_n\rangle e_n$.

برهان. رجوع کنید به [۳۰]. $\square$

تعریف ۲۴.۱.۱. هر دنباله متعامد یکه که در یکی از شرایط معادل قضیه فوق صدق کند، یک پایه متعامد یکه نامیده می‌شود. از حکم (۳) قضیه فوق نتیجه می‌شود که ضرایب $\langle x, e_n\rangle$ منحصر به فرد هستند.

تعریف ۲۵.۱.۱. مجموعه E در فضای برداری توپولوژیک X، کراندار کلی نامیده می‌شود، اگر به هر همسایگی صفر مانند V در X یک مجموعه متناهی $F \subset X$ متناظر شده باشد به طوری که $E \subset F + V$.

تعریف ۲۶.۱.۱. یک فضای برداری توپولوژیک، جدایی پذیر است اگر یک زیرمجموعه شمارای چگال داشته باشد.

توجه: مجموعه E در H چگال است اگر $\overline{E} = H$.

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر A یک جبر روی اعداد مختلط باشد (یعنی A یک فضای برداری همراه با یک نگاشت دوخطی $\begin{cases} A^۲ \longrightarrow A \\ (a,b) \to ab \end{cases}$ باشد به قسمی که $a(bc) = (ab)c$، $\forall a, b, c \in A$) به طوری که به هر عضو آن، یک عدد مثبت به نام نرم نسبت دهیم که در شرایط زیر صدق کند و همچنین A به عنوان یک فضای نرم‌دار، کامل باشد، A جبر باناخ نامیده می‌شود.

۱- برای هر $x \in A$: $\|x\| \geq ۰$ ؛

۲- $\|x\| = ۰$ اگر وتنها اگر $x = ۰$ ؛

۳- برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ وهر $x \in A$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ؛

۴- برای هر $x, y \in A$: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۵- برای هر $x, y \in A$: $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

تعریف ۲۸.۱.۱. اگر A یک جبر باناخ باشد و روی آن نگاشت پیچش $x \longrightarrow x^*$ تعریف شده باشد به طوری که:

۱- برای هر $x \in A$: $(x^*)^* = x$ ؛

۲- برای هر $x, y \in A$: $(x+y)^* = x^* + y^*$ ؛

۳- برای هر $x, y \in A$: $(xy)^* = y^* x^*$؛

۴- برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ وهر $x \in A$: $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$.

و اگر علاوه بر شرایط بالا برای هر $x \in A$ داشته باشیم:

$$\|x^* x\| = \|x\|^۲$$

آنگاه A یک C^*–جبر نامیده می‌شود. اگر A به عنوان یک جبر، عضو یکه داشته باشد، آن را C^*–جبر یکه دار نامیم.
همچنین یک ایده‌آل راست (چپ) در C^*–جبر A یک زیرفضای برداری مانند I از A است به طوری که :

$$a \in A, b \in I \Longrightarrow ab \in I (ba \in I).$$

تعریف ۲۹.۱.۱. یک تقریب یکه برای C^*–جبر A، دنباله $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ شامل اعضائی از گوی یکه بسته A می‌باشد به طوری که برای هر $a \in A$،

$$a = \lim_{\lambda \in \Lambda} a u_\lambda.$$

طبق منبع [۲۵] برای هر C^*–جبر دلخواه همواره تقریب یکه موجود است.
تعریف ۳۰.۱.۱. اگر A یک C^*–جبر و V یک A–مدول (چپ) باشد، همچنین قوانین خطی روی A و V سازگار باشند، به عبارتی برای هر $a \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$: $\lambda(ax) = a(\lambda x)$.
اگر یک نگاشت ضرب داخلی A–مقداری $\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow A$ موجود باشد به قسمی که :

۱- برای هر $x \in V$: $\langle x, x \rangle \geq ۰$ ؛

۲- $\langle x, x \rangle = ۰$ اگر وتنها اگر $x = ۰$ ؛

۳- برای هر $x, y \in V$: $\langle x, y\rangle = (\langle y, x\rangle)^*$ ؛

۴- برای هر $x, y \in V$ و هر $a \in A$: $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$ ؛

۵- برای هر $x, y, z \in V$: $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

زوج $\{V, \langle .,. \rangle\}$ را یک پیش هیلبرت A–مدول نامیم و اگر V نسبت به نرم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|_A^{\frac{1}{2}}$ کامل باشد V را یک هیلبرت A–مدول نامیم.
هیلبرت A–مدول راست نیز به طو مشابه تعریف می‌شود.
نماد گذاری ۳۱.۱.۱. اگر A یک C^*–جبر و V یک A–مدول باشد، ایده‌آل دو طرفه و بسته‌ای از A را که توسط همه ضرب‌های داخلی $\{\langle x, y\rangle, x, y \in V\}$ تولید می‌شود با $\langle V, V\rangle$ نمایش می‌دهیم.
تعریف ۳۲.۱.۱. هیلبرت A–مدول V را یک هیلبرت A–مدول کامل می‌نامیم اگر $\langle V, V\rangle = A$.
تعریف ۳۳.۱.۱. اگر A یک C^*–جبر یکه‌دار باشد، هیلبرت A–مدول V متناهی مولد نامیده می‌شود، اگر مجموعه متناهی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in V$، ضرایب $\{a_i\}_i \subset A$ موجود باشد که $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. اگر A یکه دار باشد، هیلبرت A–مدول V را شمارا مولد گوییم، اگر یک مجموعه شمارا موجود باشد به طوری که مجموعه همه ترکیبات A–خطی متناهی آن، در V چگال (از نظر نرمی) باشد.
قضیه ۳۴.۱.۱. فرض کنید V یک هیلبرت A–مدول باشد، آنگاه،

۱- $\|.\|$ یک نرم روی V است ؛

۲- برای هر $a \in A$ و هر $x \in V$: $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$ ؛

۳- برای هر $x, y \in V$: $\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \|y\|^2\langle x, x\rangle$.

برهان. رجوع کنید به [۲۳]. □

تعریف ۳۵.۱.۱. اگر A یک C^*–جبر یکه دار باشد و $a, p, u \in A$ آنگاه :

۱- a نرمال است اگر : $a^*a = aa^*$ ؛

۲- p یک تصویر است اگر : $p = p^* = p^2$ ؛

۳- u یکانی است اگر : $u^*u = uu^* = 1$ ؛

۴- u یک ایزومتری است اگر : $u^*u = 1$ ؛

۵- u یک هم- ایزومتری است اگر : $uu^* = 1$ ؛

۶- a معکوس‌پذیر است است اگر $b \in A$ یافت شود که : $ab = ba = 1$ ؛

۷- طیف a عبارت است از : $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a$ معکوس‌پذیر نباشد$\}$؛

۸- a مثبت است اگر : $a^* = a$ و $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$؛

۹- $a \geq b$ اگر و تنها اگر $a - b$ مثبت باشد؛

۱۰- اگر p و q دو تصویر در A باشند به قسمی که $pq = qp = q$، آنگاه q را یک زیرتصویر برای p نامیم و با $q \leq p$ نمایش می‌دهیم؛

گزاره ۳۶.۱.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر باشد. عبارات زیر هم ارزند:

۱- a مثبت است.

۲- $b \in A^+$ یکتایی هست که $a = b^2$.

۳- برای برخی $x \in A$، $a = x^*x$.

برهان. رجوع کنید به [۱۲]. □

لم ۳۷.۱.۱. اگر a و b دو عنصر مثبت از C^*-جبر A باشند، آنگاه $a+b$ نیز در A مثبت است.

برهان. رجوع کنید به [۲۵]. □

قضیه ۳۸.۱.۱. اگر A یک C^*-جبر باشد، آنگاه:

۱- A^+ (مجموعه عناصر مثبت A) برابر است با $\{a^*a | a \in A\}$.

۲- اگر $0 \leq a \leq b$ آنگاه $\|a\| \leq \|b\|$.

۳- اگر A یکه‌دار باشد و a و b دو عنصر مثبت معکوس‌پذیر باشند، آنگاه $a \leq b$ نتیجه می‌دهد $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

برهان. رجوع کنید به [۲۵]. $\square$

قضیه ۳۹.۱.۱. اگر a و b دو عنصر مثبت از C^*-جبر A باشند، آنگاه $a \leq b$ نتیجه می‌دهد $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$.

برهان. رجوع کنید به [۲۵]. $\square$

۲.۱ عملگرهای خطی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری (روی میدان Φ) باشند. تابع $T : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی از X به Y گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ وهر $\alpha, \beta \in \Phi$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

عملگر $I : X \longrightarrow X$ که با ضابطه $I(x) = x$ (برای هر $x \in X$) تعریف می‌شود را عملگر همانی نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. فضای پوچ و برد عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را به ترتیب با $N(T)$ و $R(T)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

$$R(T) = \{y \in Y : y = Tx \text{ ،برای } x\text{ای در } X\}.$$

رتبه T، بعد برد T می‌باشد و پوچی T بعد فضای پوچ (هسته) آن می‌باشد.

T یک به یک است اگر برای هر $x \neq y$ داشته باشیم، $Tx \neq Ty$ و T پوشا است هرگاه، $R(T) = Y$.

تعریف ۳.۲.۱. اگر $T : H \longrightarrow K$ یک عملگر خطی باشد، نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

عملگر خطی T را کران‌دار گوییم هرگاه : $\|T\| < \infty$.