

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی محض-جبر

عنوان:

حلقه‌های جابجایی تمیز

استاد راهنما:

دکتر منصور قدیری هراتی

استاد مشاور:

دکتر سیدمحمد انوریه

پژوهش و نگارش:

رضا جوادی فر

فروردین ۱۳۹۲



کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه/رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه/رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.



---

---

## تقدیم به

پدر و مادر عزیز

و همسر مهربانم

---

---





## سپاس‌گزاری

حمد و سپاس‌گذاری را که قلم را به اذن او به دست گرفتیم تازه‌امی از دریای بی‌نتهای دانشش رافرا بگیریم. اکنون که به لطف خداوند و همراهی همه‌ی کسانی که همواره پشتیبان و راهنمایم بودند تا در این زمان، در این مرحله از زندگی ام قرار بگیریم، بر حسب وظیفه و به مصداق «من لم یسکر المخلوق لم یسکر الخالق» شکر و قدردانی می‌نمایم از آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بوده است، مخصوصاً از خانواده‌ی عزیزم، به ویژه دو کوه‌گرانه‌های زندگیم، پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کتاهای و درستی من قلم عضو کشیده و کرمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند و حضورشان آراش و امیدزیتنم بوده است، از تمام کسانی که در راه کسب دانش راهنمایم بودند، مخصوصاً از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر منصور قدیری هراتی که در این مدت همچون پدری مهربان همواره همراهم بوده‌اند، از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر سید محمد انوری به خاطر راهنمایی‌های سودمندشان، و هم‌چنین از جناب آقای دکتر سعید میروکیلی و جناب آقای پر نور بشین دواز که زحمت دآوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند و از تمام کسانی که مرا آموختند، حتی به یک کلام یا یک نگاه.

بروردگار!

چسب عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌های آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.

توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و هم‌بوادانش و پژوهش بهت رشد و شکوفایی ایران سرفراز عنایت فرما.

رضا جوادی فر



## چکیده

حلقه‌ی جابجایی  $R$  را یک حلقه‌ی تمیز گوئیم هرگاه هر عضو  $x \in R$  را بتوان به صورت مجموع یک عضو یکه و یک عضو خودتوان نوشت.

هرگاه هر عضو  $x \in R$  را بتوان به طور یکتا به صورت مجموع یک عضو یکه و یک عضو خودتوان نوشت،  $R$  را یک حلقه‌ی تمیز یکتا تعریف می‌کنیم.

در این پایان‌نامه ارتباط مفاهیم حلقه‌های تمیز و یکتای تمیز را با مفاهیم جبر جابجایی نظیر حلقه‌های شبه موضعی، حلقه‌های خارج‌قسمتی، حاصل ضرب مستقیم حلقه‌ها و ... را بررسی کرده و به بررسی و اثبات قضایایی می‌پردازیم که اهمیت حلقه‌های تمیز را نشان می‌دهند.

در پایان نیز به معرفی حلقه‌های تمیز ضعیف، حلقه‌های تقریباً تمیز و حلقه‌های  $r$ -تمیز و بررسی برخی از ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی:

حلقه‌ی تمیز، حلقه‌ی یکتای تمیز، حلقه‌ی تمیز ضعیف، حلقه‌ی تقریباً تمیز، حلقه‌ی شبه موضعی،

عضو خودتوان، عضو یکه



# فهرست مطالب

پ فهرست نمادها

مقدمه

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۲	.....	۱.۱	قضیه‌ها و تعاریف اولیه
۸	.....	۲.۱	تجزیه حلقه‌ها
۱۱	.....	۳.۱	حلقه‌های با شرط زنجیری
۱۴	.....	۴.۱	حلقه چند جمله‌ای‌ها و سری‌های توانی
۱۷	.....	۵.۱	حلقه‌های بولی و منظم
۲۳	.....	۶.۱	انتقال خودتوان‌ها

۲ حلقه‌های تمیز

۲۶	.....	۱.۲	مقدمه
۲۷	.....	۲.۲	حلقه‌های تمیز
۳۷	.....	۳.۲	حلقه‌های تمیز یکتا
۴۰	.....	۴.۲	نتایجی از حلقه‌های ناجابجایی

۳ حلقه‌های تمیز ضعیف و تقریباً تمیز

۴۶	.....	۱.۳	مقدمه
----	-------	-----	-------

۴۶	.....	حلقه‌های تمیز ضعیف	۲.۳
۵۱	.....	حلقه‌های تقریباً تمیز	۳.۳
		حلقه‌ی ۲-تمیز	۴
۶۳	.....	مقدمه	۱.۴
۶۳	.....	تعریف و ویژگی‌های حلقه‌های ۲-تمیز	۲.۴
۷۲		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۷۶		مراجع	

## فهرست نمادها

$Spec(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی $R$
$Max(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی $R$
$J(R)$	جیکوبسن رادیکال حلقه‌ی $R$
$Nil(R)$	ایده‌آل پوچ حلقه‌ی $R$
$Id(R)$	مجموعه‌ی اعضای خودتوان حلقه‌ی $R$
$U(R)$	مجموعه‌ی اعضای یکه‌ی حلقه‌ی $R$
$Z(R)$	مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی $R$
$reg(R)$	مجموعه‌ی اعضای منظم حلقه‌ی $R$
$R_S$	موضعی‌سازی حلقه‌ی $R$ نسبت به مجموعه‌ی $S$
$K[x]$	حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های روی حلقه‌ی $K$
$K[[x]]$	حلقه‌ی سری‌های توانی روی حلقه‌ی $K$
$C(X)$	حلقه‌ی توابع پیوسته از $X$ به $\mathbb{R}$
$deg(x)$	درجه‌ی عضو همگن $x$ در یک حلقه‌ی مدرج
$R(M)$	ایده‌آل‌سازی حلقه‌ی $R$ و $R$ -مدول $M$
$End(M)$	مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های مدول $M$
$\frac{R}{I}$	حلقه‌ی خارج‌قسمتی $R$ بر $I$
$\langle a \rangle$	ایده‌آل تولید شده توسط $a$





## مقدمه

حلقه‌ی جابجایی  $R$  یک حلقه‌ی تمیز است، اگر هر عضو  $R$  مجموع یک عضو یکه و یک عضو خودتوان باشد. این تعریف اولین بار توسط نیکلسون<sup>۱</sup> در [۲۱] ارائه شد. او در [۲۱] یک حلقه را مناسب<sup>۲</sup> نامید، اگر همه‌ی اعضای خودتوان حلقه را بتوان به هر ایده‌آل چپ حلقه منتقل نمود. او نشان داد که حلقه‌ی تمیز  $R$  مناسب است و عکس این مطلب نیز زمانی برقرار است که  $R$  دارای اعضای خودتوان مرکزی باشد.

نیکلسون در [۲۲] حلقه‌های تمیز قوی  $R$  را به صورت زیر معرفی نمود، حلقه‌هایی که در آن هر عضو  $x \in R$  را بتوان به صورت  $x = u + i$  نوشت که در آن  $u$  یکه و  $i$  خودتوان است و این دو عضو با یکدیگر جابجا می‌شوند. او ثابت نمود که  $R$ -مدول چپ  $M$  در لم فیتینگ صدق می‌کند اگر و تنها اگر  $End_R(M)$  یک حلقه‌ی تمیز قوی باشد. در این مقاله نیکلسون در واقع به یکی از مسائل اساسی که مدت‌ها بی‌جواب مانده بود، یعنی عکس لم فیتینگ، پاسخ داد.

کامیلو و یو در [۸] ثابت کردند که همه‌ی حلقه‌های نیمه کامل و حلقه‌های منظم یکه، تمیز هستند. کامیلو و اندرسون [۴] در سال ۲۰۰۲ حلقه‌های جابجایی تمیز را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند و در این زمینه نتایج مهمی را به دست آوردند. این مقاله مرجع اصلی مطالب فصل دوم این پایان‌نامه محسوب می‌شود و مطالب این فصل براساس این مقاله تهیه و تنظیم گردیده است. پس از آن افراد متعددی از جمله نیکلسون و ژو در [۲۳]، سامی در [۲۵]، سوک و اندرسون در [۲۰]، مک گاورن در [۱۸]، چن، نیکلسون و ژو در [۱۱] و چن و کیو در [۱۰] این موضوع را به طور گسترده مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند.

در فصل اول این پایان‌نامه همه‌ی قضایایی که در فصل‌های بعد برای درک بهتر مفاهیم مورد نیاز

---

<sup>۱</sup>Nicholson

<sup>۲</sup>Suitable

هستند، گردآوری شده است. چون در فصل‌های بعد ارتباط مفاهیم حلقه‌های تمیز را با مفاهیم جبر جابجایی نظیر حلقه‌های شبه موضعی، حلقه‌های خارج‌قسمتی، حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها و سری‌های توانی صوری، حلقه‌های نوتری و آرتینی، حلقه‌های بولی و منظم و حاصل ضرب مستقیم حلقه‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم، لذا در این فصل به معرفی این حلقه‌ها و بیان برخی از ویژگی‌های این حلقه‌ها می‌پردازیم. فصل دوم در دو بخش تدوین گردیده است. در بخش اول، تعریف حلقه‌های جابجایی تمیز را ارائه نموده و با اثبات قضایای کلیدی و بسیار مهم، بسیاری از حلقه‌های جابجایی تمیز را معرفی و رده‌بندی می‌کنیم تا شناختی جامع از حلقه‌های جابجایی تمیز فراهم آید. نشان می‌دهیم که هر حلقه‌ی شبه موضعی، یک حلقه‌ی تمیز است. اگر  $R$  یک حلقه‌ی جابجایی باشد آن‌گاه  $R[x]$  هرگز یک حلقه‌ی تمیز نیست. هم‌چنین  $R[[x]]$  یک حلقه‌ی تمیز است اگر و تنها اگر  $R$  تمیز باشد.

در بخش دوم حلقه‌های یکتای تمیز را معرفی نموده و ثابت می‌کنیم که برای یک حلقه‌ی جابجایی  $R$ ، اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال  $M$  از  $R$  داشته باشیم  $\frac{R}{M} \simeq \mathbb{Z}_2$ ، آن‌گاه هر عضو  $x \in R$  دارای نمایش منحصر به فردی به صورت  $x = u + i$  است که در آن  $u \in U(R)$  و  $i \in Id(R)$ . در ادامه به ارتباط حلقه‌های بولی و منظم با حلقه‌های تمیز می‌پردازیم.

فصل سوم در دو بخش تدوین گردیده است. در بخش اول با توجه به تعریفی که در فصل قبل برای حلقه‌های تمیز ارائه شد:

« $R$  حلقه‌ی تمیز است، هرگاه هر عضو آن را بتوان هم به صورت حاصل جمع و هم تفاضل یک عضو خودتوان و یک عضو وارون‌پذیر نوشت».

به تأثیر تغییر «و» به «یا» در این تعریف پرداخته و تعمیمی از حلقه‌های تمیز را معرفی و مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حلقه‌ی  $R$  را تمیز ضعیف می‌نامیم، هرگاه هر عضو  $x \in R$  را بتوان به صورت  $x = u + i$  یا  $x = u - i$  نوشت که در آن  $u \in U(R)$  و  $i \in Id(R)$ . در بخش دوم نیز به معرفی حلقه‌های تقریباً تمیز که اولین بار توسط مک‌گاورن معرفی شده است، می‌پردازیم. در واقع این حلقه‌ها به اثر قرار دادن اعضای منظم حلقه‌ی  $R$  به جای اعضای یکه در تعریف حلقه‌های تمیز می‌پردازیم.

هرگاه هر عضو  $x \in R$  را بتوان به صورت  $x = r + i$  نوشت که در آن  $r \in reg(R)$ ، مجموعه‌ی

اعضای منظم حلقه‌ی  $R$ ، و  $i \in Id(R)$ ، مجموعه‌ی اعضای خودتوان حلقه‌ی  $R$ ، باشند، آن‌گاه  $R$  را تقریباً تمیز گویند. هم‌چنین براساس تعریف حلقه‌ی  $Q$ -مدرج حلقه‌های مدرج تقریباً تمیز بررسی می‌شود و در انتهای این فصل حلقه‌های با شرط اجتماع خودتوان و وارون‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند. در نهایت در فصل چهارم به معرفی حلقه‌های  $2^*$ -تمیز و بیان ویژگی‌هایی از این ساختار می‌پردازیم.

## فصل ۱

### تعاريف و مفاهيم مقدماتى