دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض – گرایش جبر

موضوع:

بررسی حلقه‌های آرمنداریز ضعیف

نگارش:

علی نجفوند دریکوندی

استاد راهنما:

دکتر شعبان قلندرزاده

مهرماه ۱۳۹۰

تقدیم به

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و خودگذشتگان به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید و به پاس محبت‌های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند این پایان‌نامه را **به مادر عزیزم**

و روح پدر مهربانم تقدیم می‌کنم.

تقدیم به آنها که دعای خیرشان بدرقه راهم بود.

تقدیم به آنها که در راه کسب علم و معرفت برای من آنچه در توان داشتند انجام دادند.

تقدیم به آنها که مشوق راه دانشم بودند.

تقدیم به آنها که دوری من را تحمل کردند و تقدیم به آنها که در رهگذر عمر یاری‌گر و دلگرمی من بودند.

امیدوام بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌های آن‌ها جامه عمل بپوشانم.

خدایا عاقبت به خیری و عافیت و طول عمر را برای آنان از درگاهت مسئلت دارم.

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: بررسی حلقه‌های آرمنداریزضعیف

استاد راهنما: دکتر شعبان قلندر زاده

نام دانشجو: علی نجفوند دریکوندی

شماره دانشجویی: ۸۸۰۰۴۰۴

اینجانب علی نجفوند دریکوندی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارایه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تائید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگر در هیچ جا ارایه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

تشکر و قدردانی

نخست خدای بزرگ را، او که هر لحظه مرا یاری داد تا مراحل علمی را با موفقیت پشت سر گذاشته و به مراحل جدیدتر راه یابم، سپاس می‌گوییم.

اکنون که مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره مشوق من بوده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

همچنین، از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر شعبان قلندرزاده، که با راهنمائی‌های ارزشمندشان، مرا در تهیه این پایان‌نامه یاری نمودند کمال تشکر را دارم.

باشد که گوشه‌ای از زحماتشان را ارج نهاده باشم.

چکیده

در این پایان نامه ما خواص حلقه‌های آرمنداریز خطی و همچنین ارتباط آنها را با حلقه‌های آرمنداریز، آرمنداریز ضعیف، فروکاسته و نیم‌جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم. ما ثابت می‌کنیم که حلقه اور راست R آرمنداریز خطی است اگر و تنها اگر Q آرمنداریز خطی باشد، که Q حلقه خارج قسمت کلاسیک R است. با کمک این نتایج نشان می‌دهیم که یک حلقه گولدی راست نیم‌اول R، آرمنداریز خطی است اگر و تنها اگر R آرمنداریز اگر و تنها اگر R فروکاسته اگر و تنها اگر R نیم‌جابه‌جایی و اگر و تنها اگر Q حاصلضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های تقسیم باشد. در ادامه مثال‌های بیشتری از حلقه‌های آرمنداریزخطی می‌آوریم. درنهایت حلقه‌های آرمنداریز ضعیف را که تعمیم حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی و آرمنداریز می‌باشند را معرفی و خواص آنها را بررسی می‌کنیم. به علاوه ثابت می‌کنیم R آرمنداریز ضعیف است اگر و تنها اگر حلقه ماتریس‌های بالامثلثی آن آرمنداریز ضعیف باشد.

کلمات کلیدی : حلقه‌آرمنداریز، حلقه آرمنداریزخطی، حلقه آرمنداریزضعیف، حلقه فروکاسته، حلقه های خارج قسمت کلاسک، حلقه نیم‌جابه‌جایی، حلقه‌آبلی، حلقه نیم‌اول و حلقه گولدی

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

منابع اولیه نظریه حلقه را می‌توان در دو شاخه زیر جستجو کرد:

۱) **نظریه اعداد:** تلاش برای تعمیم قضیه تجزیه اعداد صحیح به عوامل اول (قضیه اساسی حساب)، موجب پیدایش مجموعه اعداد صحیح گاوسی شده که خود تحت عمل‌های جمع و ضرب بسته است.

۲) **هندسه:** مطالعه سطوح فضایی که توسط چندجمله‌ای‌ها تعیین می‌شوند ما را با جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها چند متغیره درگیر می‌سازند.

در هر دوحالت ما با ضرب‌هایی سرو کار داریم که خاصیت جابه‌جایی دارند. دیوید هیلبرت (۱۹۳۴– ۱۸۶۲) حلقه را ابداع نمود و ریچارد دد کیند (۱۹۱۶ – ۱۸۳۱) مطالعه تجریدی این سیستم را آغاز کرد. دد کیند با تمرکز روی ایده‌آل‌ها به مطالعه حوزه‌های صحیح خاصی پرداخت (موسوم به حوزه‌های دد کیند) که در آنها هر ایده‌آلی به صورت یکتا به حاصلضربی از ایده‌آل‌های اول تجزیه می‌شود. دد کیند کارهای بسیار ارزنده‌ای در نظریه حلقه‌ها، گروه‌ها و میدان‌ها انجام داده است. موریس کلاین دد کیند را کاشف جبر مجرد نامیده است.

لازم به ذکر است که در سال ۱۸۴۳، ویلیام رون هامیلتون (۱۸۶۵–۱۸۰۵) کواترینون‌های خود را معرفی نمود، یعنی مجموعه‌ای شامل اعداد مختلط که خود یک حلقه ناجابه‌جایی است. همچنین این حلقه، بخشی است ولی میدان نیست. وی با گسترش حسابان به کواترنیون‌ها امیدوار بود بتواند از آنها در فیزیک استفاده کند.

در این پایان‌نامه به بررسی حلقه‌های آرمنداریز خطی و حلقه‌های وابسته می‌پردازیم. موضوع اصلی که در این پایان‌نامه مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرد، بر گرفته از مراجع [۱۹] و [۲۰] می‌باشد.

رِگ و چاوچاریا (۱۹۹۷) در [۱۳] حلقه‌های آرمنداریز را به صورت زیر معرفی کردند.

R را یک حلقه آرمنداریز گویند، هر گاه برای هر $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ به طوری که $f(x)g(x) = 0$، آنگاه برای هر i, j بتوان نتیجه گرفت $a_i b_j = 0$. در سال ۱۹۷۴ در [۵] آرمنداریز ثابت کرده بود حلقه‌های فروکاسته ویژگی تعریف شده حلقه‌های رگ و چاوچاریا[۱] را دارند به همین دلیل رگ و چاوچاریا نام آرمنداریز را روی این حلقه‌ها گذاشتند. آرمنداریز (۱۹۷۴)، رِگ و چاوچاریا (۱۹۹۷)، اندرسون وکامئلو[۲] (۱۹۹۸)، کیم و لی[۳] (۲۰۰۰)، چان و همکارانش[۴] (۲۰۰۲)، وونگ[۵] (۲۰۰۳) و لیو و ژائو[۶] (۲۰۰۷) روی حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های وابسته کار کرده‌اند. همچنین در ایران آقای ابراهیم هاشمی (دانشگاه صنعتی شاهرود) و آقایان قلندرزاده—خرمدل (دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی) در این زمینه کار کرده‌اند.

در سال ۲۰۰۳ تی. کا. کیم و تی.اِل. وونگ در [۱۷] یک حالت ضعیف شده‌ای از حلقه‌های آرمنداریز ارایه کردند، به این صورت که اگر حاصل ضرب هر دو چندجمله‌ای خطی صفر شود آنگاه حاصلضرب ضرایب آنها صفر می‌شود و آن را حلقه آرمنداریز ضعیف نامیدند ما آن را به عنوان آرمنداریز خطی معرفی می‌کنیم. همچنین در سال ۲۰۰۷ زد. لیو و آر. ژائو در [۲۰] یک حالت ضعیف شده‌ای دیگر از حلقه‌های آرمنداریز ارائه کردند، به این صورت که اگر حاصل ضرب هر دو چندجمله‌ای دلخواه صفرشود آنگاه حاصلضرب ضرایب آنها پوچ می‌شود و آن را حلقه آرمنداریز

---

[۱] Rege and chhawchharia

[۲] Anderson and Camillo

[۳] Kim and Lee

[۴] Chan et al

[۵] Wong

[۶] Lio and Zhao

ضعیف نامیدند ما آن را به عنوان آرمنداریز ضعیف معرفی می‌کنیم.

حلقه R را در این پایان نامه در حالت کلی ناجابه‌جایی، شرکت‌پذیر و یکدار در نظر می‌گیریم. این پایان‌نامه شامل سه فصل است. در فصل اول مفاهیم اولیه مورد نیاز و تعاریف جدیدی که در این پایان‌نامه استفاده می‌شود ارایه می‌دهیم. در ادامه حلقه‌های آرمنداریز خطی، حلقه فروکاسته، نیم جابجایی، آرمنداریز، آبلی و ... مقایسه می‌شوند. در فصل دوم دنبال شرایطی هستیم که حلقه‌های ارایه شده معادل شوند و در ادامه مثال های بیشتری از حلقه‌های آرمنداریز خطی ارایه می‌دهیم. در فصل سوم حلقه‌های آرمنداریز ضعیف را با حلقه‌های آرمنداریز خطی مقایسه می‌کنیم. چون حلقه‌های آرمنداریز خطی و حلقه‌های آرمنداریز ضعیف هر دو را به آرمنداریز ضعیف تعبیر کرده‌اند در نگاه اول هر محقق فکر می‌کند این مفاهیم یکی هستند ولی ما نشان می‌دهیم که اینچنین نیست.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل ما ابتدا به بیان تعاریف اولیه و کاربردی می‌پردازیم. سپس مفاهیم حلقه چندجمله‌ای، حلقه سری‌های توانی، حلقه لوران و ... را یادآوری می‌کنیم. در ادامه تعاریف جدیدی که در این پایان‌نامه استفاده می‌شوند، را می‌آوریم و ارتباط بین آنها را در قالب یک لم بررسی می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف اولیه

در این بخش ما به بیان یک سری تعاریف که برای ادامه کار نیاز داریم، می‌پردازیم. این مفاهیم مقدمات لازم برای تعاریف اساسی و کلیدی این پایان نامه (مانند حلقه‌های آرمنداریز، آرمنداریز خطی و غیره) را فراهم می‌نمایند.

تعریف ۱.۱ عنصر a عضو R را یک مقسوم علیه صفر چپ[1] حلقه R می گوییم، اگر عنصر ناصفری مانند b عضو R موجود باشد، به قسمی که $a.b = 0$. به طور مشابه عنصر a عضو R را یک مقسوم علیه صفر راست [2] حلقه R می گوییم، اگر عنصر ناصفری مانند c عضو R موجود باشد، به

[1] left zero divisor

[2] right zero divisor

قسمی که $c.a = ۰$. عنصر a عضو R را یک مقسوم علیه صفر گوییم. اگر a یا یک مقسوم علیه صفر چپ و یا یک مقسوم علیه صفر راست باشد. a را یک عنصر منظم [۳] نامیم، هرگاه نه مقسوم علیه صفر راست و نه مقسوم علیه صفر چپ باشد.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم a و b اعضای حلقه R باشند.

۱) می‌گوییم a وارون پذیر چپ [۴] است، هرگاه عنصری مانند b موجود باشد به قسمی که $ab = ۱$. همچنین عنصر a وارون پذیر راست [۵] گفته می‌شود، هرگاه عنصری مانند b عضو R موجود باشد به قسمی که $ba = ۱$. عنصر a عضو R را یک یکه[۶] می‌نامیم، هرگاه هم وارون راست و هم وارون چپ داشته باشد، وارون ضربی عنصر a را معمولاً با $a^{-۱}$ نشان داده می‌شود.

۲) مجموعه تمام یکه‌های R را با $U(R)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۱ عنصر a از حلقه R را خودتوان[۷] گوییم، اگر $a^۲ = a$ شود. در هر حلقه R عناصر 0 و ۱ خودتوان بوده و به آن‌ها عناصرخودتوان بدیهی گوییم.

تعریف ۴.۱ عنصر a از R را پوچ توان[۸] گوییم، اگر عدد صحیح مثبت n موجود باشد به قسمی که $a^n = ۰$ شود. عنصر صفر در هر حلقه R پوچ توان بوده و به آن عنصر پوچ توان بدیهی گوییم.

[۳] regular element

[۴] left invertible

[۵] right invertible

[۶] unit

[۷] idempotent

[۸] nilpotent

توجه ۱.۱ در هر حلقه R، صفر تنها عنصری می‌باشد که هم پوچ توان و هم خودتوان است.

یک مفهوم کمتر شناخته شده‌تر از عنصر پوچ توان، عنصر به طور قوی پوچ توان است که به صورت زیر است.

تعریف ۵.۱ عنصر a ازحلقه R را یک عنصر به طور قوی پوچ توان[۹] نامیم، هرگاه هر دنباله $a_1, a_2, a_3 \ldots$ با شرط $a_1 = a$ و $a_{n+1} \in a_n R a_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، نهایتاً صفر شود.

هر عنصر به طور قوی پوچ توان، پوچ توان است. (فرض کنیم a یک عنصر به طور قوی پوچ توان باشد کافی است a_i ها را همگی مساوی با a بگیریم.)

تعریف ٦.۱ حلقه جابه‌جایی R را یک قلمرو صحیح [۱۰] گوییم، اگر فاقد مقسوم علیه صفر غیربدیهی باشد. در صورتی که حلقه R ناجابه‌جایی باشد، آنرا قلمرو (حوزه) [۱۱] گوییم.

حلقه‌های $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ مثال‌هایی از قلمروهای صحیح می‌باشند.

تعریف ۷.۱ حلقه R را یک حلقه بخشی[۱۲] یا یک میدان اریب [۱۳] گوییم، اگر مجموعه R^* شامل همه عناصر غیر صفر R همراه با عمل ضرب تشکیل یک گروه بدهد. به طور معادل، R یک حلقه بخشی است، اگر هر عنصر غیر صفر R دارای وارون ضربی در R باشد.

حلقه‌های $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ مثال‌هایی از حلقه‌های بخشی می‌باشند.

تعریف ۸.۱ یک حلقه بخشی جابه‌جایی را یک میدان [۱۴] گوییم.

---

[۹] strongly nilpotent

[۱۰] integral domain

[۱۱] domain

[۱۲] division ring

[۱۳] skew field

[۱۴] field

حلقه‌های $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ مثال‌هایی از میدان‌ها می‌باشند .

توجه ۲.۱ یک حلقه بخشی الزاماً میدان نمی‌باشد. به عنوان مثال فرض کنید:

$$R = \{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} | u, v \in C\}$$

به وضوح R همراه با جمع وضرب ماتریس‌ها یک حلقه بوده و هر عنصر غیر صفر $\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$ دارای وارون $\begin{pmatrix} \overline{u} & -v \\ \overline{v} & u \end{pmatrix} \frac{1}{(u\overline{u}+v\overline{v})}$ می‌باشد. بنابراین R یک حلقه بخشی بوده ولی میدان نیست، زیرا ضرب ماتریسی جابه‌جایی نمی‌باشد.

تعریف ۹.۱ ایده‌آل چپ (راست) I از R را یک ایده‌آل چپ (راست) بیشین[۱۵] از R گوییم، اگر

۱) $I \neq R$

۲) برای هرایده‌آل چپ (راست) J از R، اگر $I \subseteq J \subseteq R$ باشد، آنگاه $J = I$ یا $J = R$ شود. یعنی هیچ ایده‌آل چپی (راستی)، اکیداً بین I و R وجود نداشته باشد.

تعریف ۱۰.۱ ایده‌آل چپ (راست) I از R را یک ایده‌آل چپ (راست) کمین[۱۶] از R گوییم، اگر

۱) $I \neq R$

۲)برای هر ایده‌آل چپ (راست) J از R، اگر $(0) \subseteq J \subseteq I$ باشد، آنگاه $J = (0)$ یا $J = I$ شود. یعنی هیچ ایده‌آل چپی (راستی)، اکیداً بین (0) و I وجود نداشته باشد.

---

[۱۵] maximal ideal

[۱۶] minimal ideal

تعریف ۱۱.۱ حلقه R مفروض است.

ایده‌آل سره P از R را اول[۱۷] می‌نامیم، هرگاه برای همه ایده‌آل های A و B از R، $AB \subseteq P$ ایجاب نماید $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

مجموعه همه‌های ایده‌آآل‌های اول R را با $Spec(R)$ معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل R باشد. مجموعه‌ی

$$\sqrt{I} := \{r \in R | \exists n \in N, r^n \in I\}$$

را رادیکال[۱۸] I می‌نامیم.

رادیکال پوچ یک طرفه R، برابر با $\sqrt{(0_R)} = nil(R)$ (رادیکال صفر R) معرفی می‌کنیم. به عبارت دیگر مجموعه تمام عناصر پوچ توان است.

تعریف ۱۳.۱ ۱) ایده‌آل (راست، چپ یا دو طرفه) I از حلقه R را ایده‌آل پوچ توان [۱۹] می‌نامیم، اگر برای یک n عضو $\mathbb{N}$، $I^n = 0$ شود.

۲) ایده‌آل (راست، چپ یا دو طرفه) I از حلقه R را ایده‌آل پوچ[۲۰] می‌نامیم، اگر همه عناصر آن پوچ توان باشند.

۳) فرض کنیم $Nil(R)$ ایده‌آل دو طرفه تولید شده توسط همه ایده‌آل‌های پوچ دو طرفه حلقه R باشد. در این صورت $Nil(R)$ را رادیکال پوچ[۲۱] حلقه R می‌نامیم.

---

[۱۷] prime ideal

[۱۸] radical

[۱۹] nilpotent ideal

[۲۰] nil ideal

[۲۱] nil radical

توجه ۳.۱ هر عنصر در یک ایده‌آل (راست، چپ یا دو طرفه) پوچ توان، یک عنصر به طور قوی پوچ توان است.

تعریف ۱۴.۱ ایده‌آل اول P از حلقه R به طور کامل اول[۲۲] می‌گوییم، اگر R/P حوزه باشد.

تعریف ۱۵.۱ مجموعه S یک مجموعه سودار [۲۳] نامیده می شود، اگر رابطه $<$، روی S تعریف شود، به طوری که برای هر α، β و γ عضو S داریم:

۱) $<$ بازتابی [۲۴] باشد، یعنی $\alpha < \alpha$.

۲) $<$ متعدی [۲۵] باشد، یعنی $\alpha < \beta$ و $\beta < \gamma$ ایجاب کند $\alpha < \gamma$.

۳) برای هر زوج α و β عضو S یک γ عضو S موجود باشد، به طوری که $\alpha < \gamma$ و $\beta < \gamma$.

همچنین می توانیم به جای $\alpha < \beta$ بنویسیم $\beta > \alpha$.

تعریف ۱۶.۱ یک دستگاه مستقیم [۲۶] از مجموعه‌های $\{X, \pi\}$ روی مجموعه سودار S تابعی است، که به هر α عضو S یک مجموعه X^α وابسته می‌کند و برای هر زوج α و β عضو S که $\alpha < \beta$ است، نگاشت $\pi_\alpha^\beta : X^\alpha \to X^\beta$ وجود داشته باشد به طوری که:

الف) برای هر α عضو S، $\pi_\alpha^\alpha = id_{X^\alpha}$.

ب) برای هر $\alpha < \beta < \gamma$ در S، $\pi_\gamma^\beta \pi_\beta^\alpha = \pi_\gamma^\alpha$ شود.

[۲۲] completely prime
[۲۳] directed set
[۲۴] reflexive
[۲۵] transitive
[۲۶] direct system

تعریف ۱۷.۱ فرض کنیم $\{M,\pi\}_S$ یک دستگاه مستقیم روی مجموعه سودار S باشد. به طوری که برای هر α عضو S، مجموعه M^α یک $R-$مدول و برای هر زوج $\alpha < \beta$ عضو S، نگاشت $\pi_\alpha^\beta : M^\alpha \to M^\beta$ یک $R-$هومومرفیسم باشد. فرض کنیم Q یک زیر مدول از $\oplus \sum_{\alpha\in S} M^\alpha$ تولید شده به وسیله همه عناصر از نوع $\pi_\alpha^\beta x - x$ باشد، که $x \in M^\alpha$، $\alpha,\beta \in S$ و $\alpha < \beta$ باشد. مدول خارج قسمت $\oplus \sum M^\alpha/Q$ حد مستقیم [۲۷] از دستگاه مستقیم $\{M,\pi\}_S$ نامیده می‌شود و با $lim_{\rightarrow}\{M,\pi\}_S$ معرفی می‌شود.

تعریف ۱۸.۱ حلقه غیر صفر R یک حلقه ساده [۲۸] نامیده می‌شود، هرگاه تنها ایده‌آل‌های آن صفر (0) و خودش باشند.

با توجه به این مطلب که اساس کار حلقه‌های آرمنداریز (خطی، ضعیف و ...) بر پایه حلقه چندجمله‌ای‌ها است، لذا حلقه چندجمله‌ای‌ها، حلقه‌های سری‌های توانی و حلقه‌های لوران را در ادامه یادآوری می‌کنیم.

۲.۱ حلقه چندجمله‌ای

فرض کنیم R یک حلقه و x یک مجهول (متغیر) روی R باشد. همچنین فرض کنید $R[x]$ مجموعه همه عبارت‌های چندجمله‌ای صوری بر حسب x با ضرایب در R باشد. یعنی

[۲۷] directed limit

[۲۸] simple ring

$$R[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r|a_i\in R, r\in Z^+\}.$$

تساوی در $R[x]$:

فرض کنید $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r$ و $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_sx^s$ چندجمله‌ای‌هایی در $R[x]$ باشند. در این صورت $p(x)=q(x)$ اگر و تنها اگر $r=s$ و برای هر $0\leq i\leq r$، $a_i=b_i$. در حالت خاص، $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r=0$ است اگر و تنها اگر برای هر i، $a_i=0$ شود.

جمع و ضرب در $R[x]$:

فرض کنیم $p(x)$ و $q(x)$ به صورت بالا باشند. (می‌پذیریم $r\leq s$ باشد) تعریف می کنیم:

$$p(x)+q(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_sx^s)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_r+b_r)x^r+b_{r+1}x^{r+1}+\ldots+b_sx^s$$

و

$$p(x)q(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_sx^s)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots+(a_0b_i+a_1b_{i-1}+\ldots+a_ib_0)x^i+\ldots+(a_rb_s)x^{r+s}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $R[x]$ همراه با اعمال فوق یک حلقه است. عناصر این حلقه را چندجمله‌ای‌های از متغیر x با ضرایب در R می‌گوییم.

تعریف ۱.۱۹ فرض کنید R یک حلقه و $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ عضوی از $R[x]$ باشد. اگر $a_n\neq 0$ فرض شود، آنگاه n را درجه[۲۹] $f(x)$ می‌نامیم و آنرا با $degf(x)$ نمایش می‌دهیم.

[۲۹] degree

در این حالت a_n را ضریب پیشرو[30] چندجمله‌ای $f(x)$ می‌نامیم. اگر $f(x) = 0$ باشد آن گاه طبق قرداد می نویسیم $degf(x) = -\infty$. می توانستیم $f(x) = 0$ را یک چندجمله‌ای بدون درجه تلقی کنیم.

۳.۱ حلقه سری‌های توانی

حلقه R مفروض است، فرض کنید $R[[x]]$ مجموعه سری‌های توانی صوری با ضرایب در R باشد. یعنی

$$R[[x]] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_rx^r + \ldots | a_i \in R, r \in \mathbb{Z}^+\}.$$

تساوی در $R[[x]]$:

فرض کنید

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ و $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ چندجمله ای‌هایی در $R[[x]]$ باشند. آنگاه $p(x) = q(x)$ اگر و تنها اگر $a_i = b_i$ برای هر $r \in \mathbb{Z}^+$.

جمع و ضرب در $R[[x]]$:

فرض کنیم $p(x)$ و $q(x)$ به صورت بالا باشند. تعریف می‌کنیم:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) =$$

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots$$

و

$$p(x)q(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x +$$

$$(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + (a_0b_i + a_1b_{i-1} + \ldots + a_ib_0)x^i + \ldots$$

[30] leading coefficient