دانشکده علوم پایه

عدد احاطه‌گری امن گراف‌های بحرانی

نگارش

سعید معیری

اساتید راهنما

دکتر حمیدرضا میمنی

دکتر فرزانه نوروزی لرکی

استاد مشاور

عبدالرضا اسکویی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به :

پدر

مادر

و همسر مهربانم

قدردانی و تشکر

به نام آن که دل را مرکز عواطف و قلب را مرکز ایمان و مغز را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

اینک که به یاری حضرت حق سبحانه و تعالی توانسته‌ام منزلی دیگر از منازل تحصیل را سپری کنم و خوشه‌چین میوه‌هایی جانبخش از درخت دانش و معرفت باشم بر خویش وظیفه می‌دانم از گرانمایگانی که در این راه مرا همیاری و ارشاد نمودند قدردانی کنم به ویژه استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر میمنی که صبورانه مرا راهنمایی کردند. ایزد منان یاورشان و توفیق رفیقشان باد..

فهرست مندرجات

چکیده

در این رساله به بررسی مطالب زیر پرداخته می‌شود:

(۱) عدد اصلی مجموعه‌های زائد و احاطه گر امن برای درخت T با ماکزیمم درجه $\Delta \geq ۳$، با فرمول‌های

$$\frac{(\Delta n + \Delta - ۱)}{(۳\Delta - ۱)} \quad , \quad \frac{۲(n + ۱)}{(۲\Delta + ۳)}$$

که $(T \neq K_{۱,\Delta})$ داده می‌شود.

(۲) مجموعه‌ی X از گراف G یک مجموعه‌ی احاطه‌گر امن است، اگر هر رأس $u \in V_G - X$ مجاور با رأس $v \in X$ باشد، به طوری‌که $(X - \{v\}) \cup \{u\}$ احاطه‌گر باشد. عدد اصلی مجموعه‌ای که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر امن است را به وسیله‌ی $\gamma_s(G)$ نشان می‌دهیم و گراف‌های $(ER - \gamma_s)$ – بحرانی گرافی است که برای هر یال e از G داشته باشیم، $\gamma_s(G - e) > \gamma_s(G)$ و سپس برای هر یال e از G گراف‌های دوبخشی و درخت‌های $(ER - \gamma_s)$ – بحرانی نیز بررسی می‌شود.

(۳) مجموعه‌های رومن و رومن ضعیف و مجموعه‌ی احاطه‌گر و احاطه‌گر امن تعریف می‌شود و رابطه‌ی آنها به صورت فرمول‌های

$$\gamma \leqslant \gamma_r \leqslant \gamma_S \leqslant ۲\gamma$$

و

$$\gamma \leqslant \gamma_r \leqslant \gamma_R \leqslant ۲\gamma$$

بیان می‌شود.

کلمات کلیدی: گراف، احاطه‌گر، امنیت، بحرانی.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر گراف‌ها

مقدمه

احاطه‌گری در گراف‌ها، بخش مهمی از نظریه گراف است. در کتاب منبع [۱]، بیش از دویست نوع احاطه‌گری در گراف تعریف شده است. در این رساله به مفهوم احاطه‌گری امن در گراف‌ها می‌پردازیم.
در ابتدا تعاریف مقدماتی گراف‌ها که در فصل‌های آتی به آن نیاز است، بیان می‌شود. سپس مفهوم حفاظت از گراف‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور به رئوس گراف اعدادی صحیح غیر منفی را نظیر می‌کنیم. مجموعه‌ی احاطه‌گر امن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
مجموعه‌ی X از گراف G یک مجموعه‌ی احاطه‌گر امن است، اگر هر رأس $u \in V_G - X$ مجاور با رأس $v \in X$ باشد، به طوری‌که $(X - \{v\}) \cup \{u\}$ احاطه‌گر باشد. عدد اصلی مجموعه‌ای که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر امن است را به وسیله‌ی $\gamma_s(G)$ نشان می‌دهیم.
در این رساله ارتباط عدد احاطه‌گری را با عدد احاطه‌گری رومن و عدد احاطه‌گری رومن ضعیف و عدد احاطه‌گری امن نیز بررسی می‌شود.

در این فصل ما به تعاریف مقدماتی گراف‌ها که در فصل‌های آتی به آن نیاز داریم می‌پردازیم. منبع اصلی استفاده شده در این فصل است[۱].

۱.۱ تعاریف و ویژگی درخت‌ها

یک گراف [۱] عبارت است از یک دوتایی $G = (V, E)$ به‌طوری‌که V یک مجموعه غیرتهی و E مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های دو عضوی V باشد.
گراف G را متناهی گوییم، هرگاه : $|V| < \infty$. در این رساله منظور از گراف، گراف متناهی است.
فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و $\{u, u\} \in E$ در این‌صورت می‌نویسیم $uv \in E$ و می‌گوییم u و v مجاورند و u و v رارئوس انتهایی یال $e = uv$ می‌گوییم.
تعداد یال‌های گذرنده از رأس v_i را درجه‌ی v_i می‌نامند و با $degv_i$ نمایش می‌دهیم.
تعداد رئوس یک گراف را مرتبه‌ی گراف نامیده و با p نمایش می‌دهیم. تعداد یال‌های گراف را اندازه‌ی گراف نامیده و با q نمایش می‌دهیم.
اگر

$$\Delta = \max_{v \in V} degv$$

$$\delta = \min_{v \in V} degv$$

باشد، داریم

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

گرافی که هر دو رأس آن با هم مجاور باشند، به عبارتی گرافی که درجه‌ی هر رأس آن $p - 1$ باشد، را گراف کامل می‌گویند بدیهی است که در گراف کامل p رأسی K_p داریم:

$$q = \binom{p}{2}$$

تعریف ۱ − ۱ − ۱

گرافی که هیچ دو رأس آن مجاور نباشد، گراف تهی p رأسی $\overline{K_p}$ است.

[۱] $graph$

گرافی که درجه‌ی هر رأس آن r، باشد، گراف $r-$ منتظم است. اگر G یک (p,q) گراف $r-$ منتظم باشد، آنگاه: $rp = ۲q$.

بنابراین، در یک گراف $r-$ منتظم لازم است که حداقل یکی از p یا r زوج باشد.

قضیه ۱ − ۱ − ۲

فرض کنیم G یک گراف q یالی و $V = \{v_۱, ..., v_p\}$ مجموعه‌ی رئوس باشد، در این صورت:

$$\sum_{i=۱}^{p} degv_i = ۲q.$$

رأس v را زوج می‌گوییم، هرگاه درجه‌ی آن زوج باشد، در غیر آن‌صورت آن‌رافرد گویند.

نتیجه ۱ − ۱ − ۳

تعداد رئوس فرد یک گراف عددی زوج است.

هرگاه بتوان رئوس G را به دو بخش $V_۱$ و $V_۲$ به‌گونه‌ای افراز کرد که هر یال G یک انتها در $V_۱$ و یک انتها در $V_۲$ داشته باشد، گوییم G گرافی دو بخشی است، به عبارت دیگر رئوس در $V_۱$ مجاور نباشند و رئوس در $V_۲$ نیز مجاور نباشند. گراف با یک رأس را گراف دو بخشی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱ − ۱ − ۴

گراف دو بخشی G با بخش‌های $V_۱$ و$V_۲$ ، را کامل گویند هرگاه هر رأس در $V_۱$ با هر رأس در $V_۲$ مجاور باشد. اگر $|V_۱| = m, |V_۲| = n$ در این‌صورت گراف دوبخشی کامل را به‌صورت $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

تذکر:

الف - تعداد یال‌های $K_{m,n}$ برابر با $m \times n$ است.

ب - درجه‌ی هر رأس در $K_{m,n}$ برابر با، m یا n است.

تعریف ۱ − ۱ − ۵

گراف $K_{۱,n}$ راستاره[۱] می‌گوییم.

هرگاه بتوان رئوس گراف G را به n بخش به‌صورت $V_۱, ..., V_n$ افراز کرد، به گونه‌ای که هر یال G یک رأس در v_i و یک رأس در v_j که $i \neq j$ داشته باشد، را گراف $n-$ بخشی است.

گراف n بخشی G با بخش‌های $V_۱, ..., V_n$ را $n-$ بخشی کامل گوییم، هرگاه هر رأس در v_i با هر رأس در v_j که $(i \neq j)$ مجاور باشد، اگر $|V_i| = m_i$ آن‌را به‌صورت، $K_{m_۱,...,m_n}$ نمایش می‌دهیم. تعداد یال‌های گراف $K_{m_۱,...,m_n}$ برابر با :

$$\frac{۱}{۲}(m_۱m_۲ + m_۱m_۳ + ... + m_۲m_۱ + m_۲m_۳ + ... + m_nm_{n-۱}) = \frac{۱}{۲}\sum_{۱\leqslant i<j<n} m_im_j$$

---

[۱] $star - graph$

توجه کنید، اگر گراف دوبخشی G، $r-$ منتظم باشد، آن‌گاه،

$$|V_1| = |V_2|$$

گراف $G = (V_G, E_G)$ و $H = (V_H, E_H)$ را در نظر بگیرید، گوییم H زیر گراف G است و می‌نویسیم $H \leq G$ ، هرگاه: $V_H \subseteq V_G$ و $E_H \subseteq E_G$ و اگر $V_H = V_G$ گوییم، H زیر گراف فراگیر [1] ، G است.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و $\phi \neq S \subseteq V$ زیر گراف رأس القایی (القاشده توسط S) را با $G(S)$ نمایش داده و آن زیرگرافی است که رئوس آن مجموعه S بوده و کلیه یال‌هایی از G است که هر دو انتهای آن در S باشد. منظور از $G \setminus S$، زیر گراف رأس القایی، القا شده توسط $v \setminus s$ است، اگر $S = \{v\}$ ، به جای $G \setminus S$ می‌نویسیم، $G \setminus v$.

اگر $G = (V, E)$ یک گراف و $\phi \neq S \subseteq V$ زیر گراف یال القایی (القا شده توسط S) را با $G[S]$ نمایش داده و آن زیر گرافی است که یال‌های آن مجموعه S بوده و رأس‌های آن، رأس‌هایی از G است که انتهای یال‌های S باشد. منظور از $G \setminus S$ زیر گراف فراگیر G است که از حذف یال‌های S به‌دست آید. و اگر $S = e$ به‌جای $G \setminus S$ می‌نویسیم ، $G \setminus e$.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد، مکمل گراف G را با $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم و آن گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن V بوده و دو رأس در $\overline{G}$ مجاورند اگر وفقط اگر در G مجاور نباشند. به عبارت دیگر با قرار دادن G و $\overline{G}$ روی یکدیگر یک گراف کامل داشته باشیم.

حال به اعمال روی گراف‌ها می‌پردازیم:

فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف رأس مجزا باشند، اجتماع دو گراف را با $G_1 \cup G_2$ نمایش داده و آن گرافی است که رئوس و یال‌های آن به‌صورت زیر است:

$$V_{G_1 \cup G_2} = V_{G_1} \cup V_{G_2} \qquad \text{و} \qquad E_{G_1 \cup G_2} = E_{G_1} \cup E_{G_2}$$

[1] *spanning subgraph*

تعریف ۱ − ۱ − ۶

فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف رأس مجزا باشند، الحاق دو گراف را با $G_1 \bigvee G_2$ نمایش داده و یال‌ها و رئوس آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_{G_1 \bigvee G_2} = E_{G_1} \cup E_{G_2} \cup \{xy|x \in V_{G_1}, y \in V_{G_2}\} \text{ و } V_{G_1 \bigvee G_2} = V_{G_1} \cup V_{G_2}$$

بنابراین در الحاق دو گراف داریم

$$\deg_{G_1 \bigvee G_2} v = \begin{cases} \deg_{G_1} v + |V_{G_2}| \text{ ،} & v \in V_{G_1} \\ \deg_{G_2} v + |V_{G_1}| \text{ ،} & v \in V_{G_2} \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

و

$$|E_{G_1 \bigvee G_2}| = |E_{G_1}| + |E_{G_2}| + |V_{G_1}||V_{G_2}|$$

تعریف ۱ − ۱ − ۷

فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف باشند، ضرب دکارتی دو گراف را با $G_1 \times G_2$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V_{G_1 \times G_2} = V_{G_1} \times V_{G_2}$$

و دو رأس (x, y) و (x', y') مجاور هستند اگر وتنها اگر

$x = x'$ و $yy' \in E_{G_2}$ یا $y = y'$ و $xx' \in E_{G_1}$ وصل باشد.

روشی شهودی برای تجسم نمودن حاصلضرب دو گراف وجود دارد. فرض کنید که $V_{G_1} = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ و $V_{G_2} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. به تعداد n کپی از G_1 بردارید که ما $H_1, H_2, ..., H_n$ می‌نامیم و آنها را به ترتیب در مکان رئوس $v_1, v_2, ..., v_n$ ، در G_2 جای دهید. رأس با بر چسب u_i در H_j را به رأس با بر چسب u_i در H_k متصل می‌کنیم اگر و تنها اگر $v_j v_k \in E_{G_2}$.

یک مسیر به طول $n - 1$ را P_n گویند.

در گراف $G=(V,E)$ از مرتبه $|V|=n$ ، همسایگی باز $N(v)$ از v، مجموعه‌ی رأس‌هایی است که با v مجاورند، یعنی داریم:

$$N(v)=\{u\in V|uv\in E\}$$

برای هر همسایگی بسته‌ی $N[v]$ از v داریم:

$$N[v]=N(v)\cup\{v\}$$

برای هر $S\subseteq V$، همسایگی باز $N(S)$ برابر با ، $N(S)=\bigcup_{v\in S}N(v)$ است.

برای هر $S\subseteq V$، همسایگی بسته‌ی$N[S]$ برابر با، $N[S]=N(S)\cup S$ است.

برای هر $x\in X$، همسایگی خصوصی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

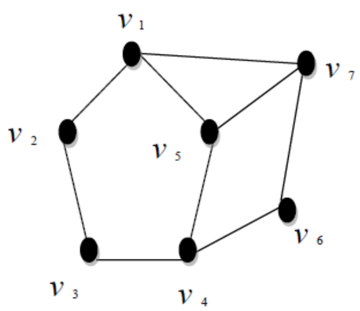
$$Pn(x,X)=N[x]-N[X-\{x\}]$$

برای هر $x\in X$، همسایگی خصوصی خارجی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$epn(x,X)=Pn(x,X)-\{x\}$$

مثال ۱ − ۱ − ۸

برای گراف شکل مقابل اگر $X=\{v_۱,v_۴,v_۵\}$ در این‌صورت $epn(v_۱,X)$ و $Pn(x,X)$ را مشخص کنید:



شکل ۱.۱.۱ : $epn(v_۱,X)$ و $Pn(v_۱,X)$

$$
\begin{aligned}
Pn(v_۱, X) &= N[v_۱] - N[X - \{v_۱\}] \\
&= \{v_۱, v_۲, v_۵, v_۷\} - N[\{v_۴, v_۵\}] \\
&= \{v_۱, v_۲, v_۵, v_۷\} - \{v_۱, v_۳, v_۴, v_۵, v_۶, v_۷\} \\
&= \{v_۲\}. \\
epn(v_۱, X) &= Pn(v_۱, X) - \{v_۱\} \\
&= \{v_۲\} - \{v_۱\} \\
&= \{v_۲\}. \qquad (۲.۱.۱)
\end{aligned}
$$

گراف G را همبند [۱] گوییم، هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر این‌صورت آن‌را ناهمبند [۲] می‌نامیم.

یک دور [۳] یک مسیر با ابتدا و انتهای یکسان است.

یک درخت،گراف همبند بدون دور است.

جنگل یک گراف بدون دور است. پس هر مؤلفه‌ی جنگل یک درخت است.

گزاره ۹ − ۱ − ۱

الف- در هر درخت بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود منحصر به‌فرد وجود دارد.

ب- اگر در گراف G بین هر دو رأس آن یک مسیر منحصربه‌فرد وجود داشته باشد، آن گراف درخت است.

ج- هر یال یک درخت، یال برشی است. یعنی تعداد مؤلفه‌های همبندی $G \setminus e$ از تعداد مؤلفه‌های همبندی G بیشتر است.

د- در یک $(p,q)-$ درخت T داریم: $p = q + ۱$.

---

[۱] *connected*

[۲] *disconnected*

[۳] *cycle*

فصل ۲

حفاظت از گراف‌ها

در این فصل ما مفهوم حفاظت از گراف‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور به رئوس گراف اعداد صحیح غیر منفی را نظیر می‌کنیم. عدد نظیر شده به هر رأس را تعداد نگهبانان مستقر شده در آن رأس می‌گیریم. محافظت از رأس v با تعیین مسئله‌ای در مجموعه همسایه‌های بسته رأس v در نظر می‌گیریم. در این فصل از منابع [۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۱, ۱۲] استفاده می‌کنیم. در این فصل ما چهار نوع حفاظت از گراف‌ها و ارتباط آن‌ها را با یکدیگر بررسی می‌کنیم. این چهار نوع عبارتند از:

الف - تابع احاطه‌گری [۱]

ب - تابع احاطه‌گری رومن [۲]

ج - تابع احاطه‌گری ضعیف رومن [۳]

د - تابع امنیت احاطه‌گر [۴]

که به طور مفصل هر کدام را مورد بررسی قرار داده و در حقیقت برای هر کدام از رئوس یک برچسب قرار می‌دهیم.

۱.۲ تعاریف

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و

$$f : V \longrightarrow \{۰, ۱, ۲, ...\}$$

یک تابع باشد. قرار دهید

$$V_i = \{v \in V | f(v) = i\} \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, ...$$

بوضوح

$$V_G = V_۰ \cup V_۱ \cup V_۲ \cup ...$$

پس می‌توان f را به صورت

$$f = (V_۰, V_۱, V_۲, ...)$$

نمایش داد.

[۱] domination

[۲] Roman domination

[۳] Weak Roman domination

[۴] secure domination

تعریف ۲ − ۱ − ۱

وزن تابع f را با $w(f)$ نشان می‌دهیم و آن‌را صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$w(f) = \sum_{v \in V} f(v) = \sum_{i \geqslant ۱} i \; |V_i|$$

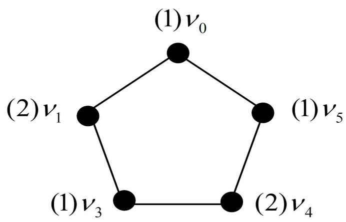
که این وزن تعداد همه‌ی محافظ‌ها را نشان می‌دهد، زیرا:

$$\begin{aligned} w(f) &= ۰ + ۰ + ... + ۰ + ۱ + ۱ + ... + ۱ + ۲ + ۲ + ... \\ &= ۰ \; |V_۰| + ۱ \; |V_۱| + ۲ \; |V_۲| + ... \\ &= \sum_{i \geqslant ۱} i \; |V_i|. \end{aligned}$$

مثال

در شکل زیر وزن تابع f را مشخص کنید

با توجه به شکل داریم $V_۰ = \{v_۱\}$ و $V_۱ = \{v_۳, v_۴\}$ و $V_۲ = \{v_۲, v_۵\}$ در نتیجه وزن f برابر است با،
$w(f) = ۰ + ۲ + ۲ + ۱ + ۱ = ۶$



شکل ۱.۱.۲ :   وزن گراف

تعریف ۲ − ۱ − ۲

تابع f امن است [۱]، اگر برای هر $v \in V_۰$،

$$\sum_{u \in N(v)} f(u) > ۰.$$

یا به عبارت دیگر می‌گوییم تابع $f = (V_۰, V_۱, V_۲, ...)$ امن است، هرگاه هر $v \in V_۰$ مجاور با حداقل یک رأس از $V - V_۰$ است، به‌طور معادل اگر $V - V_۰$ مجموعه‌ی احاطه‌گری از گراف G است.

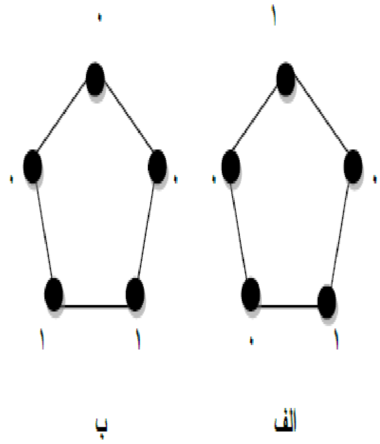
---

[۱] $safe\ function$

حال چهار زیر کلاس از تابع‌های امن تعریف می‌کنیم و برای هر کدام مجموعه‌ی می‌نیمال که در خاصیت تعریف آن صدق می‌کند، را در نظر می‌گیریم.

مثال

در شکل زیر الف امن ولی ب نا امن است.



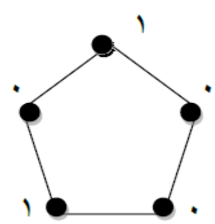
شکل ۲.۱.۲ : گراف امن و نا امن

تعریف ۲ − ۱ − ۳

یک مجموعه‌ی احاطه‌گر [1] از گراف G، تابع امن $f = (V_\circ, V_1)$ است، در حقیقت رئوس گراف G را طوری به وسیله اعداد $\{\circ, 1\}$ بر چسب گذاری کنیم که مجاور هر رأس $\{\circ\}$ حداقل یک رأس غیر صفر است. تعداد عضوهای کوچکترین مجموعه‌ای که در چنین خاصیتی صدق می‌کند، را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به اختصار با DF نشان می‌دهیم.

مثال

در شکل زیر $\gamma(G) = ۲$



شکل ۳.۱.۲ : گراف DF

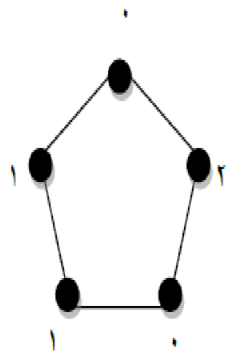
[1] *domination function*

تعریف ۲ − ۱ − ۴

تابع $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک (RDF) [1] است، هرگاه هر رأس $v \in V_۰$ مجاور با حداقل یک رأس از $V_۲$ است، به عبارت دیگر رئوس را طوری برچسب گذاری کنیم که هر رأس صفر مجاور با حداقل یک رأس با برچسب $\{۲\}$ است. تعداد عضوهای کوچکترین مجموعه‌ای که در چنین خاصیتی صدق می‌کند، را با $\gamma_R(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال

در شکل زیر $\gamma_R(G) = ۴$



شکل ۴.۱.۲ : گراف RDF

تعریف ۲ − ۱ − ۵

تابع $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع $(WRDF)$ [2] است، هرگاه:

الف - مجاور هر رأس صفر یک رأس غیر صفر است.

ب - وجود داشته است یک $(v \in N(u) \cap V - V_۰)$ $v \in V - V_۰$ به طوری‌که g_{uv} امن است. که در آن $g_{uv} : V \longrightarrow \{۰, ۱, ۲\}$ که:

$$g_{uv}(w) = \begin{cases} f(w) - ۱ & , \quad w = v \\ ۱ & , \quad w = u \\ f(w) & , \quad w \neq u, v \end{cases} \tag{۱.۱.۲}$$

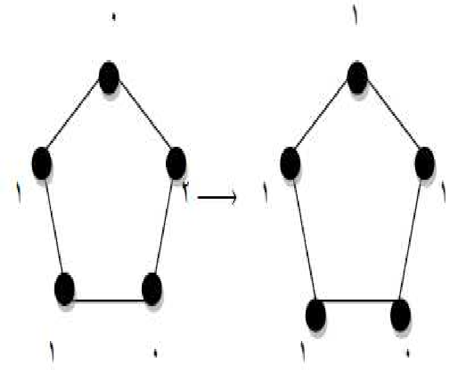
---

[1] $Roman\ domination\ function$

[2] $Weak\ Roman\ domination\ function$

مثال

شکل زیر یک گراف رانشان می‌دهد که تبدیل به $WRDF$ شده است.



شکل ۵.۱.۲ : گراف $WRDF$

تذکر

برای هر $u \in V_0$ و $v \in V - V_0$ که در شرایط تعریف ۲ − ۱ − ۵ صدق کند، می‌گوییم رأس v یک رأس امن [1] برای u است، مشاهده می‌کنیم که $u \in V_0$ به وسیله‌ی $v \in N(u) \cap V_2$ امنیت می‌شود. مجموعه‌ی می‌نیمم که در این خاصیت صدق می‌کند را $WRDF$ از گراف G، می‌نامیم که تعداد عضوهای این مجموعه را با $\gamma_r(G)$ و به طور شهودی رابطه‌ی $\gamma_r(G) \leqslant \gamma_R(G)$ برقرار است.

تبصره ۲ − ۱ − ۶

وزن تابع RDF برابر با، $w(f) = \gamma_R(G) = 2n_2 + n_1$ است.

می‌دانیم که $w(f) = \sum_{v \in V} f(v) = \sum_{i \geqslant 1} i\ |V_i|$ پس چون در تابع RDF ، $f = (V_0, V_1, V_2)$ است و چون در این تابع مجموعه رئوس V_2، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای V_0 است، پس $V_0 \subseteq N[V_2]$ در این صورت وزن تابع f برابر است با :

$(n_i = |V_i|)$

$$w(f) = \gamma_R(G) = \sum_{v \in V} f(v) = 2n_2 + n_1.$$

تذکر

وقتی می‌نویسیم $V_2 \succ V_1$، به این معنی است که، مجموعه‌ی V_2 مجموعه‌ی احاطه‌گر V_1 است. یعنی $V_1 \subseteq N(V_2)$.

[1] $v\ defends\ u$