دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

سیستم های کنترل مکانیکی ساده مقید

دانشجو:

عابدین علی دوست

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیز پور

اسفند ۱۳۹۰

چکیده:

سیستم های کنترل مکانیکی ساده مقید

علیدوست عابدین

تکنیک های نظری کنترل را که اخیرا توسعه داده شده‌به منظور تحلیل یک کلاس از سیستم های مکانیکی مقید بکار می‌بریم.جنبه های ساده اما مشخص نظریه الصاق‌های آفین،نقش مهمی در این زمینه دارند.در راستای تفسیر چگونگی اجرای این روش ها، پیشینه حائز اهمیتی عرضه خواهد شد. از سوی دیگر، تعداد بیشماری از مقالات،با هدف تحلیل برخی از نمونه های سیستم های کنترل مکانیکی غیر هولونومی، به رشته تحریر در آمدند. از این رو به بررسی سیستم هایزنبرگ و سکه غلتان عمودی می‌پردازیم.

لغات کلیدی:مکانیک،ضابطه های غیر هولونومی،کنترل پذیری،اتصالات آفینی

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

مقدمه

لویس[1] و میورای[2] [22] مبنایی را برای نظریه کنترل ارایه دادند که کاملاً متناسب با سیستم های کنترل مکانیکی است. سیستم های کنترل مکانیکی بویژه سیستم های منطبق با اصول لاگرانژی در بر دارنده انرژی جنبشی (صرفنظر از انرژی پتانسیل) بوده و اطلاعات ورودی آنها به شدت وابسته به پیکربندی و نه سرعت یا زمان می‌باشد. لویس و میورای در اثر خود به معرفی کنترل پذیری ساختار و پیامدهای ایده آل آن در کنترل پیکربندی سیستم اشاره کردند. همچنین لویس و میورای معتقد بودند که شرایط اولیه منطبق با شتاب صفر است. این محدودیت ها تاثیرات بارزی را بر پیکربندی و وضعیت اولیه (شتاب صفر) مولفه ها وارد ساخته و در واقع ترکیبی از آنالیز کنترل ساختاری در سیستم‌های یاد شده است. در صورت فقدان انرژی پتانسیل، ویژگیهای هندسی این شرایط بطور کامل قابل توصیف است ([23]). لویس و میورای [22] شرایط قابل محاسبه ای را برای کنترل پذیری پیکربندی در سیستم های کنترل مکانیکی ساده عرضه نمودند. این شرایط در واقع برگرفته از نتایج ساسمن[3] [30] حول محور کنترل پذیری سیستم های کنترل آفینی است. لویس [19] در سیستم های مکانیکی مستقل چند جانبه و نیز بدون انرژی پتانسیل این نکته را اثبات کرد که کلیه سیستم های کنترل مکانیکی ساده دارای پیکر بندی غیر قابل کنترل می‌باشند. نتیجه کاملا منطبق با دیگر نتایج ساسمن است.

از این رو، این پیامدها شرایط ایده آلی را جهت توصیف عملکرد های محاسباتی به بار می‌آورند (ساسمن [30]). سیستم های مکانیکی ساده مربوط به گروه های لی توسط بولو و لویس [10] بدقت مورد مطالعه قرار گرفته شد (در شرایطی که کنترل پذیری بطور کامل در جبرلی رخ داده باشد). سیستم-های مکانیکی مقید نیز توجه بسیاری از کارشناسان را در متون نوشته های کنترل به خود معطوف ساخته است. لذا به خوانندگان توصیه می‌کنیم که در ابتدا آثار بلاچ[4] و کراش[5] [4]، بلاچ، ری هانوگلو[6] ، مک کلامراخ[7] [8] بلاچ و کراش [6] را مطالعه نمایند. سیستم های کنترل محدود در شرایط تقارن، موضوع پایان نامه استروسکی[7] [26] بود. مقاله استروسکی[8] و بردیک[9] [27] در بردارنده یک روش مجهز است که در آن استفاده از سیستم های متقارن مد نظر قرار گرفته شد. یکی از اهداف تحلیل کنترل پذیری لویس و میورای [22] عرضه یک ساختار در طراحی الگوریتم های کنترل حرکت است. در

[1] Lewis
[2] Murray
[3] Sussmann
[4] Bloch
[5] Crouch
[6] Reyhanoglu
[7] McClamroch
[8] Ostrowski
[9] Burdick

ساختار جنبشی، می‌توان به اثر پژوهش میورای و ساستری[۱] [25] و لئوناردو[۲] کریش ناپراساد[۳] [18] اشاره کرد. در اینجا به نتایج لویس و میورای در زمینه نتایج کنترل پذیری اشاره می‌کنیم.

جالب اینکه متدولوژی کامل لویس و میورای [22] و اطلاعات بدست آمده از این مقاله کاملا منطبق با سیستم های مکانیکی ساده است، و با قید های کاتا استاتیک مستقل می‌باشد. به این معنی که قیدها بر اساس توزیع الگوهای پیکربندی توصیف می‌شوند (پارس[٤] [28]). کلیه این نتایج ریشه در مشاهداتی دارد که نخستین بار توسط سینگ[٥] [32] به مرحله اجرا در آمد. وی طی این مطالعات به بررسی دقیق معادلات مربوط به یک سیستم محدود و ژنودیزگ های یک الصاق آفینی پرداخت. سیستم های مکانیکی ساده نامحدود دارای یک الصاق آفینی طبیعی هستند که خود بر گرفته از انرژی جنبشی است (الصاقات آفینی لوی – چیو یتا). این الصاقات آفینی نقش مهمی را در شرایط کنترل پذیری لویس و میورای [22] و نیز مفهوم هندسی این شرایط که توسط آن دو ارائه شده [23] ایفا می‌نماید. موضوع بعدی بررسی یک سیستم با الصاق آفینی کلی است. این روش منجر به افزایش قابلیت اجرای تحلیل لویس و میورای در سیستم های محدود در [22] است. این مقاله با جزئیات کامل، به نحوه عملکرد این سیستم و نیز سیستم های کنترل مکانیکی مقید اشاره کرده است.

سیستم هایزنبرگ (ذرات محدود در R^3) و سکه های غلتان عمودی نمونه ای از سیستم های یاد شده هستند. در هر نمونه به منظور توصیف ایده ها و تحلیل مقالات مندرج شده لویس و میورای [22] اطلاعات کاملی را پیرامون کنترل پذیری ارائه دادیم. سیستم های کنترلی، همان گونه که در مقالات قبلی اشاره کردیم، به مطالعات گسترده تری نیاز داشته و نیز سیستم های کنترل مکانیکی ساده و الصاقات آفین نیز نقش مهمی را در این ساختار ها بر عهده دارند. از این رو راتینام[٦] و میورای [29] به منظور توصیف شرایط مناسب و ایده آل در یک سیستم کنترل مکانیکی ساده از الصاق‌های آفینی استفاده کردند. ساختار این پایان نامه به این شکل می‌باشد: در بخش اول پیشینه و اطلاعات ارزشمندی را در اختیار خوانندگان نا آشنا با الصاق‌های آفین قرار می‌دهیم. هدف از ارائه این گونه مفاهیم تاکید بر ماهیت ساده الصاق‌های آفین در اجرای محاسبات است. متدولوژی مربوط به محاسبه یک الصاق آفینی در

---

[۱] sastry
[۲] Leonardo
[۳] Krishnaprasad
[٤] Pars
[٥] Synge
[٦] Rathin

سیستم محدود با جزئیات کامل در بخش دوم ارائه شده است. به کمک معادلات محدود مدل سازی شده، به عنوان یک سیستم و نیز درک رابطه میدان برداری با الصاق آفینی، روش لویس و میورای [22] شرایط ایده آلی را در کنترل پذیری ساختارها عرضه می‌نماید. در بخش باقیمانده این مقاله به شرح جزئیات برخی از این نمونه ها اشاره می‌کنیم.

فصل اول

پیش درآمدی بر الصاق های آفینی

مقدمه

نظریه ساختار آفین و ساختار دیفرانسیلریمانی یک نظریه جامع و قابل درک است. لذا منبع کلاسیک آن در[۱٤]،[۳٥]،[۳٦]،[۳۸]شامل ارائه دقیق نظریه از بعد هندسهدیفرانسیل است.در این میان اطلاعات مربوط به هندسه ریمانی مرجع [۱۳] عرضه شد.

۱-۱)بیان تعاریف و خصوصیات پایه

تعریف۱-۱-۱: تابع $f : R^n \to R$ در نقطه z ازقلمرویش از مرتبه C^∞ گفته می شود،اگر هر مشتق جزئی f در آن نقطه وجود داشته و در یک همسایگی z پیوسته باشد. در اینجا C^∞، یعنی ∞ بار هموار است که هموار معادل مشتق داشتنمیباشد.

تعریف۱-۱-۲: فرض کنیم p نقطه‌ای ازمنیفلد Q باشد. یک **بردار مماس** بر Q در p عبارت است از یک عمل مشتق‌گیری از توابع $C^\infty(p)$ در نقطه p.

تعریف۱-۱-۳:یک تابع یک به یک $X : Q \to R^n$ که بردش زیرمجموعه باز R^n باشد، یک **چارت**[۱] n ـبعدی نامیده‌می-شود.

تعریف۱-۱-٤:یک **میدان برداری**[۲] از کلاس C^r $(r < k)$ عبارت است از نگاشت X از کلاس C^r که به هر نقطهp از Qبردار مماس X_p را وابسته می‌کند.نیز

$$X : Q \to TQ$$

$$p \to X_p$$

به طوریکه $\pi \circ x = id_{TM}$ که π عبارت است از نگاشت پوششی طبیعی $TQ \to Q$ که هر بردارمماسرا به نقطه آغازین آنمی-انگارد.

نمادگذاری: فرض کنیم Q از کلاس C^∞ باشد.**مجموعه میدان های برداری** C^∞ روی Q را با (Q) • نمایش می‌دهند.
منظور از کلاس C^r، یعنی X باید تابع دیفرانسیل پذیر از مرتبهr باشد.

[۱] chart
[۲] vector space

تعریف ۱-۱-۵: فضای مماس T_pQ در نقطه p از Q را مجموعه همه نگاشت های $X_p : C^{\infty}(p) \to R$ تعریف می‌کنیم به طوریکه برای هر $\alpha, \beta \in R$ و هر $f, g \in C^{\infty}(p)$ دو شرط زیر برقرار باشد:

$$X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$$ خطی بودن[۱]

$$X_p(fg) = (X_p f) g(p) + f(p) X_p(g)$$ قاعده لایبنیتز[۲] (۱-۱)

در اینجا X_p بردار مماس بر Q در نقطه p است.

تعریف ۱-۱-۶: به ازاء هر نقطه p از Q، T_pQ یک فضای برداری است که فضای دوگان آن را با T_p^*Q نشان داده و آن را **فضای دوگانمماس** می‌نامیم.

فرض کنید (x, U) یک چارت در همسایگی نقطه p بوده و $\{(\partial/\partial x^i)_p\}$ یک پایه برای T_pQ باشد. آنگاه،پایه‌ای برای T_p^*Q تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $(\theta^j)_p$ را پایه دوگان $\{(\partial/\partial x^i)_p\}$ به عبارت دیگر داریم:

$$(\partial/\partial x^i)_p (\theta^j)_p = \delta_i^j$$

که در آن δ_i^j دلتای کرونکر است.

تعریف ۱-۱-۷: نگاشت W را یک **میدان ۱-فرمی** دیفرانسیل‌پذیر روی Q گوییم اگر $C^{\infty}(Q)$-خطی باشد، به عبارت دیگر اگر W در شرایط زیر صدق کند:

$$W : \bullet\ (Q) \to C^{\infty}(Q)$$

(۲-۱)

$$\begin{aligned} W(X+Y) &= W(X) + W(Y) \qquad \forall X, Y \in \bullet\ (Q) \\ W(fX) &= fW(X) \qquad \forall f \in C^{\infty}(Q). \end{aligned}$$

نمادگذاری: **مجموعه میدان ۱- فرمی‌ها** از کلاس C^{∞} روی منیفلد Q را با $\bullet^*(Q)$ نمایش می‌دهیم. $\bullet^*(Q)$ با خواص زیرتشکیل یک $C^{\infty}(Q)$- مدول می دهد:

$$\begin{aligned} (W_1 + W_2)_p &= (W_1)_p + (W_2)_p \\ (fW)_p &= f(p) W_p \qquad \forall f \in C^{\infty}(Q). \end{aligned}$$ (۳-۱)

---

[۱] linearity
[۲] Leibniz rule

تعریف ۱-۱-۸:فرض کنید X یک میدان برداری روی منیفلد Q باشد. منحنی

$$\begin{aligned} F_p &: R \to M \\ t &\mapsto F_p(t) = \theta_t(p) \end{aligned} \qquad (۱-٤)$$

که روی یک بازه J از R تعریف می‌شود را **منحنی انتگرال** X[۱] می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۹:فرض کنید G یک مجموعه‌ای ناتهی باشد.زوج $(G,\cdot)$ را که در آن· یک عمل دوتایی می‌باشد را گروه گوییم، هرگاه:

۱) شرکت پذیر باشد.

۲) عضو خنثی داشته باشد، یعنی

$$\exists e \in G : \ \forall x \in G \Rightarrow xe = ex = x$$

۳) هر عنصر دارای وارون باشد

$$\forall x \in \mathrm{G} \quad \exists \mathrm{y} \in \mathrm{G} \quad x\mathrm{y} = \mathrm{y}x = \mathrm{e}$$

که y را نیز وارون x می‌خوانیم.

تعریف ۱-۱-۱۰: یک **گروه لی**[۲]گروهی است که یک منیفلددیفرانسیل پذیر C^∞با بعد متناهی باشد و نگاشت های

$$\begin{aligned} &\mathrm{G} \to \mathrm{G}, && \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G} \\ &\mathrm{g} \to \mathrm{g}^{-1} && (\mathrm{g}, \mathrm{g}') \to \mathrm{g}\mathrm{g}' \end{aligned} \qquad (۱-۵)$$

از کلاس C^∞ باشند.

تعریف ۱-۱-۱۱:گوییم گروه Gروی مجموعه X از**سمت چپ عمل**می‌کند، اگر نگاشتی مانند

$$\begin{aligned} \theta &: \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X} \\ (\mathrm{g}, x) &\mapsto \theta(\mathrm{g}, x) = \mathrm{g}x \end{aligned}$$

وجود داشته باشد.به طوریکه:

[۱] Integral curve
[۲] Lie group

۱) θ یک تابع C^{∞} باشد.

۲) اگر $g_1, g_2 \in G$ باشند،در اینصورت

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$$

برای همه $x \in X$.

۳) $\forall x \in X \quad \theta(e, x) = x$ که e عنصر همانی G است.

به همین ترتیب یک عمل راست از G روی مجموعه X تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۲:فرض کنید X یک میدان برداری روی Q باشد، میدان برداری $L_X Y$ را **مشتق لی** Y[۱] نسبت به X گوییم هرگاهبرای هر $P \in Q$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned}(L_X Y)_p &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\theta_{-t_*}(Y_{\theta(t,p)}) - Y_P] \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[Y_P - \theta_{t_*} Y_{\theta(-t,P)}\right]\end{aligned} \qquad (۱-٦)$$

که رابطه دوم از تبدیل t به $-t$ به دست می‌آید. در اینجا $\theta_{-t} = (\theta_t)^{-1}$

تعریف ۱-۱-۱۳:اگر ω یک میدان k-فرمی[۲] و X یک میدان برداری روی Q باشد آنگاه،**مشتق لی** ω **نسبت به میدانبرداری** X یک میدان k- فرمی است که به صورت زیر تعریف میشود:

$$(L_X \omega)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\theta_t^{*}\omega_{\theta(t,p)} - \omega_p] \qquad (۱-۷)$$

در اینجا θ_t شار وابسته به میدان برداری X است

$$\begin{aligned}&\theta_t : Q \to Q, \qquad \theta_t^{*} : T^{*}_{\theta_t(p)}Q \to T^{*}_{p}Q \\ &p \mapsto \theta_t(p) \qquad W_{\theta(t,p)} \mapsto \theta_t^{*} W_{\theta(t,p)}.\end{aligned}$$

گزاره ۱-۱-۱٤: فرض کنیم $X, Y \in \bullet(Q)$ و $\omega \in \bullet^{*}(Q)$ نشان می‌دهیم که با تعریف مناسب مشتق لی تانسور[۳]ها داریم

$$L_X(Y \otimes \omega) = L_X Y \otimes \omega + Y \otimes L_X \omega. \qquad (۱-۸)$$

---

[۱] Lie derivative
[۲] K-form
[۳] Tensor

اثبات: دیدیم که عملی که روی ω و Y اثر می‌کرد به ترتیب عبارت بود از $(\theta_{-t})_*, (\theta_t)^*$ لذا به طور مشابه عملی که روی حاصلضربتانسوری $Y \otimes \omega$ در نقطه $\theta_t(p)$ اثر می‌کند، عبارت است از نگاشت $(\theta_{-t})_* \otimes (\theta_t)^*$ در نقطه p از Q. لذا داریم:

$$\left((\theta_{-t})_* \otimes (\theta_t)^*\right)(Y \otimes \omega)\Big|_{\theta_t(p)} = (\theta_{-t})_* Y \otimes (\theta_t)^* \omega\Big|_p .$$

از تعریف مشتق لی داریم:

$$L_X\left(Y \otimes \omega\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(\theta_{-t})_* Y \otimes (\theta_t)^* \omega\Big|_p - Y \otimes \omega\Big|_p$$

که با اضافه و کم کردن جمله $(\theta_{-t})_* Y \otimes \omega$ در عبارت بالا داریم:

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(\theta_{-t})_* Y \otimes ((\theta_t)^* \omega - \omega) + ((\theta_{-t})_* Y - Y) \otimes \omega] \\ &= Y \otimes L_X \omega + L_X Y \otimes \omega. \end{aligned}$$

۱-۲)الصاق آفین[1]

قرارداد: فرض کنید Qیک منیفلد nـ بعدی باشد. قرار می‌دهیم:

$C^\infty(Q)$: مجموعه توابع دیفرانسیل پذیر C^∞روی Q.

• (Q): مجموعه میدان های برداری C^∞روی Q.

• $^*(Q)$: مجموعه ۱- فرم های C^∞ روی Q.

تعریف ۱-۲-۱:یک الصاق خطی روی منیفلد Qعبارت است از یک تابع دو خطی روی میدان (اعداد حقیقی)

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TQ)\times\Gamma(TQ) &\to \Gamma(TQ)\\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned} \tag{۹-۱}$$

که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\nabla_{fX} Y = f(\nabla_X Y)$

۲) $\nabla_{\mathrm{x}}(\mathrm{fY}) = \mathrm{f}(\nabla_{\mathrm{x}}\mathrm{Y}) + (\mathrm{L_x f})\mathrm{Y}$

۳) $\nabla_{d/dt} X^j = \dfrac{DX^j}{dt}$

برای $f \in C^\infty(Q)$ و $X,Y \in$ • (Q).

در اینجا $\Gamma(TQ)$مقطع‌های TQ می‌باشند. برای $f \in C^\infty(Q)$ تعریف می‌کنیم $\nabla_X f = L_X f$.

عملگر ∇_Xرا مشتق کوواریانت نسبت به میدان برداری X گوییم که برای $\alpha \in$ • $^*(Q)$می توان $\nabla_X \alpha$را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = \nabla_X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) \tag{۱۰-۱}$$

که در آن $Y \in$ • (Q).

حال اگر tیک میدان تانسوری از نوع (r,s)روی منیفلد Qباشد، در اینصورت $\nabla_X t$را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\nabla_X t)(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s) &= L_X\left(t(\alpha^1,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)\right)\\ &-\sum_{i=1}^{r} t(\alpha^1,\dots,\nabla_X\alpha^i,\dots,\alpha^r,X_1,\dots,X_s)\end{aligned}$$

[1] Affine connection

$$-\sum_{j=1}^{s} t\left(\alpha^1,\ldots,\alpha^r,X_1,\ldots,\nabla_X X_j,\ldots,X_s\right). \tag{۱۱-۱}$$

تعریف۱-۲-۲: فرض کنید (ϕ,U) یک چارت برایمنیفلد Qبا مختصات $(q^1,\ldots,q^n)$ باشد. مشتق کوواریانت پایه‌های میدان برداری $\frac{\partial}{\partial q^j}$نسبت به پایه‌های میدان برداری $\frac{\partial}{\partial q^i}$را می‌نویسیم:

$$\nabla : \Gamma(T_pQ)\times\Gamma(T_pQ)\to\Gamma(T_pQ)$$

$$\left(E_i,E_j\right)\mapsto \Gamma_{ij}^{k}E_k \qquad i,j,k=1,\ldots,n$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}\frac{\partial}{\partial q^j}=\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial q^k} \tag{۱۲-۱}$$

که در اینجا Γ_{ij}^kها **ضرایبالصاق** یا **نماد کریستوفل** می‌باشند.

گزاره ۱-۲-۳: با استفاده از خصوصیات الصاق آفین، اگر X,Y میدانهای برداری باشند که مؤلفه های آنها در مختصات بر اساس $X^1,\ldots,X^n$ و $Y^1,\ldots,Y^n$ تفکیک پذیر شوند، آنگاه مشتق کوواریانتY نسبت به Xبه صورت زیر بیان می‌شود. اگر میدان‌های برداری X,Y را بر حسب پایه‌هایشان بنویسیم داریم:

$$X=\sum_{j=1}^{n}X^j\frac{\partial}{\partial q^j},\quad Y=\sum_{i=1}^{n}Y^i\frac{\partial}{\partial q^i}$$

بنابراین:

$$\nabla_X Y=\nabla_X\left(Y^i\frac{\partial}{\partial q^i}\right)=Y^i\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial q^i}\right)+(\nabla_X Y^i)\frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$=Y^i\left(\nabla_{X^j\frac{\partial}{\partial q^j}}\frac{\partial}{\partial q^i}\right)+(\nabla_{X^j\frac{\partial}{\partial q^j}}Y^i)\frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$=Y^kX^j\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^j}}\frac{\partial}{\partial q^k}\right)+X^j(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^j}}Y^i)\frac{\partial}{\partial q^i} \qquad (\mathrm{i}\leftrightarrow\mathrm{k})$$

$$=\Gamma_{kj}^{i}X^jY^k\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial Y^i}{\partial q^j}X^j\frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$\Rightarrow \nabla_X Y=\left(\frac{\partial Y^i}{\partial q^j}X^j+\Gamma_{kj}^{i}X^jY^k\right)\frac{\partial}{\partial q^i}. \tag{۱۳-۱}$$

تعریف ۱-۲-۴: فرض کنید E یک فضای برداری n- بعدی روی میدان k باشد. در اینصورت، مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی از E به K را که با $E^* = L(E,K)$ نمایش می‌دهیم را **فضای دوگان** E می‌نامیم.

تعریف و حکم ۱-۲-۵: فرض کنید V یک فضای برداری و (r,s) اعداد صحیح نامنفی باشند.در اینصورت، فضای تانسوری $T^{(r,s)}(V)$ عبارت است از **حاصلضربتانسوری**

$$\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{\text{مرتبه}-r}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{\text{مرتبه}-s}$$

کهتانسور $\alpha\in T^{(r,s)}(V)$ را **پادوردا** در r-مقدار اول و **هم وردا** در s- مقدار بعدی می‌نامیم. اگردر روی منیفلد Q فرض کنیم T_pQ و $T_p{}^*Q$ فضای مماس و دوگانمماس با پایه‌های $\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}$ و $\{(\theta^j)_p\}$باشند. در این صورت،هر تانسور از نوع (r,s) روی منیفلد Q به صورت زیر در مختصات (x,U) نوشته می‌شود:

$$A=\sum\alpha^{i_1,\ldots i_r}_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx_{j_1}\otimes\ldots\otimes dx_{j_s}. \tag{۱۴-۱}$$

اگر Aیک میدان تانسوری(۱,۱) با مؤلفه‌های $A_i^j,\ i,j=1,\ldots,n$در یک چارت باشد، در این صورت فرمول زیر از معادلات (۱-۱۰) و (۱-۱۱) به دست می‌آید:

$$(\nabla_X A)^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}=\frac{\partial A^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}}{\partial q^k}X^k+\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kl}}A^{\mathrm{l}}_{\mathrm{j}}X^k-\Gamma^{\mathrm{l}}_{\mathrm{kj}}A^{\mathrm{i}}_{\mathrm{l}}X^k \tag{۱۵-۱}$$

چون A یک میدان تانسوری از نوع(۱,۱) است، داریم:

$$A\in T^{(1,1)}(V)\Rightarrow A=\sum_{\mathrm{i,j}}^{n}t^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}(dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^j})$$

$$\nabla_X A=\nabla_X\sum_{i,j}t^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}(dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^j})$$

حال بنا بر خصوصیات الصاق آفین برابر با:

$$=t^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}\underbrace{\nabla_{\mathrm{x}}(dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^i})}_{(1)}+\underbrace{(\nabla_{\mathrm{x}}t^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}})(dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^i})}_{(2)}$$

با استفاده از رابطه (۱-۸) از عبارت (۱) داریم:

$$t_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\left(\nabla_X dx^j\right)\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}+dx^j\otimes\left(\nabla_{\mathrm{X}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)$$

بنابراین $\nabla_X A$ برابر است با

$$\underbrace{t_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\left(\nabla_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\otimes dx^i\right)}_{(\mathrm{a})}+\underbrace{t_j^i\left((\nabla_X dx^i)\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{(\mathrm{b})}+\underbrace{\left(\nabla_{\mathrm{x}}\mathrm{t}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\right)\left(dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{(\mathrm{c})}$$

اگر میدان برداری X را به صورت موضعی و بر حسب پایه‌های آن بنویسیم داریم $X=\sum_k X^k\frac{\partial}{\partial x^k}$

$$(a)\Rightarrow\nabla_{X^k\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i}=X^k\Gamma_{\mathrm{ki}}^{\mathrm{l}}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{i}\leftrightarrow\mathrm{l}}X^k\Gamma_{\mathrm{kl}}^{\mathrm{i}}(\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j)t_{\mathrm{j}}^{\mathrm{l}}$$

چون $dx^j\in\bullet^*(Q)$ و $Y\in\bullet(Q)$، از معادله(۱-۱۰) نتیجه می‌گیریم:

$$(b)\Rightarrow\left(\nabla_{\mathrm{X}}dx^j\right)(\mathrm{Y})=\underbrace{\nabla_{\mathrm{X}}\left(dx^j(Y)\right)}_{(*)}-dx^j(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})$$

$$(*)\Rightarrow L_{\mathrm{X}}\left(dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right)=L_{\mathrm{X}}\left(\delta_{\mathrm{j}}^{\mathrm{l}}\right)=X\cdot\left(\delta_{\mathrm{j}}^{\mathrm{l}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\nabla_{\mathrm{X}}dx^j\right)(\mathrm{Y})=-(\nabla_{\mathrm{X}}Y)dx^j$$

$$(c)\Rightarrow\nabla_{X^k\frac{\partial}{\partial x^k}}t_j^i=X^k\frac{\partial t_j^i}{\partial x^k}\left(dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

که با حذف جمله $\left(dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ از طرفین رابطه‌های بالا معادله (۱-۱۵)بدست می‌آید.

تعریف ۱-۲-۶:فرض کنید Qیک منیفلددیفرانسیل پذیر از بعدn باشد، یک **متریکریمانی**[۱] روی Qیک خانواده از ضرب داخلی

[۱] Riemannian metric

$$\forall P \in Q, \qquad g_p : T_pQ \times T_pQ \to R$$

$$g(v,w) = \sum_{i=j=1}^{n} \delta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j (v,w)$$

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad i,j = 1,\ldots,n$$

می‌باشد که g_p دو خطی بوده و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) g_p مثبت معین است. یعنی $g(v,w) > 0$ اگر $v \neq 0$ باشد

$$g(v,v) = \sum_{i=j=1}^{n} \delta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j (v,v) = \sum_{i,j} \delta_{ij}\theta^i(v)\theta^j(v)$$
$$= \sum_i (\theta^i(v))^2 > 0$$

۲) g_p متقارن است یعنی $g(v,w) = g(w,v)$

$$g(v,w) = \sum_{i,j} \delta_{ij}\theta^i \otimes \theta^j (v,w) = \sum_{i,j} \delta_{ij}\theta^i(v)\theta^j(w)$$
$$= \sum_{i,j} \delta_{ij}\theta^j(v)\theta^i(w) = \sum_{i,j} \delta_{ij}\theta^i(w)\theta^j(v) = g(w, v)$$

متریکریمانی، نمونه ای از یک میدان تانسوری(۰,۲) است.

تعریف و حکم۱-۲-۷:یک منحنی چون $c: [a,b] \to Q$ را **ژئودیزیک**[۱] برای الصاق آفین ∇ گوییم،هرگاه

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right) = \nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0 \quad ; t \in [a,b]. \tag{۱-۱۶}$$

تعیین معادلات موضعی مربوط به ژئودیزیک: اگر منحنی c ارائه شده در مختصات به صورت زیر

$$c : I \to Q$$
$$t \mapsto c(t) = (q^1(t),\ldots,q^n(t))$$

باشد،در این صورت c ژئودیزیک است اگر و تنها اگر

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k = 0. \tag{۱-۱۷}$$

اثبات:

$$c(t) = \left(q^1(t),\ldots,q^n(t)\right) \in Q$$

[۱] geodesic

$$\dot{c}(t)=\frac{dc(t)}{dt}=\frac{dq^{i}(t)}{dt}\in T_{c(t)}Q=\left\{\frac{\partial}{\partial q^{i}}\right\}$$

برای اثبات به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
0=\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right)&=\frac{D}{dt}\Big(\sum_{i}\frac{dq_{i}}{dt}\cdot\frac{d}{dq_{i}}\Big)\\
&=\sum_{i}\Big(\frac{d^{2}q_{i}}{dt^{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial q^{i}}+\frac{dq_{i}}{dt}\big(D_{\frac{d}{dt}}\frac{\partial}{\partial q^{i}}\big)\Big)\\
&=\sum_{i}\Big(\frac{d^{2}q_{i}}{dt^{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial q^{i}}+\sum_{j}\frac{dq_{i}}{dt}\cdot\frac{dq_{j}}{dt}\big(\sum_{k}\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial q^{k}}\big)\Big)\\
&\xrightarrow{\mathrm{i}\leftrightarrow\mathrm{k}}\sum_{k}\Big(\frac{d^{2}q_{k}}{dt^{2}}+\sum_{i,j}\frac{dq_{i}}{dt}\cdot\frac{dq_{j}}{dt}\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}\Big)\frac{\partial}{\partial q^{k}}=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{d^{2}q_{k}}{dt^{2}}+\sum_{i,j}\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}\frac{dq_{i}}{dt}\cdot\frac{dq_{j}}{dt}=0$$

این ژئودیزیکها توسط یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم روی Qتعیین شده‌اند. نشان می‌دهیم که معادله (۱-۱۷) یک معادله مرتبهاول روی T_pQ می‌باشد. اگر مختصات روی T_pQ را بوسیله $(q^{1},\dots,q^{n},v^{1},\dots,v^{n})$ نمایش دهیم آنگاه، معادله دیفرانسیل مرتبهاول در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$(\dot{q}^{i}=v^{i})\Rightarrow\ddot{q}^{i}+\Gamma_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}}\dot{q}^{j}\dot{q}^{k}=0$$

$$\dot{v}^{i}+\Gamma_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}}v^{j}v^{k}=0\quad\Rightarrow\quad\dot{v}^{i}=-\Gamma_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}}v^{j}v^{k}$$

که این معادله های مرتبه اول، معرف میدان برداری Z_g روی TQ در محورهای مختصاتی داده شده است که برابر با رابطه زیر می‌باشد

$$Z_{g}=v^{i}\frac{\partial}{\partial q^{i}}-\Gamma_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}}v^{j}v^{k}\frac{\partial}{\partial v^{i}}.\qquad(۱-۱۸)$$

این میدان برداری، معروف به **ژئودیزیکاسپری**[۱] است که با معادله (۱-۱۷) هم ارز می باشد.

[۱] Geodesic spray