دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

ممانعت از جریان در شبکه روی گراف‌های مسطح

استادان راهنما
دکتر جواد وکیلی و دکتر میرکمال میرنیا

پژوهشگر
مریم فکرت

۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدر و مادرم

بنام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر **جواد وکیلی** و دکتر **میرکمال میرنیا** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**جواد مهری تکمه** که

در آماده‌سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
از جناب آقایان دکتر که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
از تمام دوستانم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل تحصیل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.
شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

مریم فکرت
۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: فکرت نام: مریم

عنوان: ممانعت از جریان در شبکه روی گراف‌های مسطح

استادان راهنما : دکتر جواد وکیلی و دکتر میرکمال میرنیا

:

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۹

کلید واژه‌ها: ممانعت جریان شبکه، گراف‌های مسطح، دوگانی مسطح، الگوریتم‌های شبه چندجمله‌ای

چکیده

در این پایان‌نامه ما علاقه‌مند به مینیمم کردن ماکزیمم جریان در یک شبکه با حذف کردن یال‌ها و راس‌ها با مقداری بودجه‌ی محدود هستیم. این مساله اساساً به عنوان ممانعت شبکه یا ممانعت از جریان در شبکه شناخته شده است. گاهی اوقات اصطلاح منع شبکه به کار برده شده است. می‌توان حذف جرئی یال‌ها را تعریف کرد و یا تعریف نکرد. در هرحال تکنیک‌ها و نتایج اساساً فرقی نمی‌کنند. ما علاقه‌مند به حالت بدون حذف یال جزئی هستیم. مساله‌ی پیدا کردن k حیاتی‌ترین یال یک جریان شبکه حالت خاصی از مساله‌ی ممانعت از جریان در شبکه است که k یال باید حذف شوند به طوری‌که ماکزیمم جریان تا حد ممکن کاهش یابد[۱۳].

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

مقدمه

علاقه‌مندی به مسأله‌ی ممانعت شبکه از نتایج اخیر مبارزه با مواد مخدر ایالات متحده به وجود آمد. به ویژه اداره‌ی مبارزه با مواد مخدر در جنوب آمریکا در نظر داشت برای ممانعت کوکا مخصوصاً کوکائین و مواد مخدر شیمیایی در مناطق تولیدکننده‌ی مواد مخدر آمریکای جنوبی، با توجه به منابع(بودجه) محدود خود بهترین تقسیم‌بندی را انجام دهد.

در مساله‌ی ممانعت از جریان در شبکه[۱] می‌خواهیم مقدار بیشینه جریان در شبکه تا حد ممکن با حذف یال‌ها و گره‌های شبکه با مقدار بودجه‌ی ثابت کاهش دهیم. اگرچه مساله‌ی ممانعت از جریان در شبکه NP-کامل روی شبکه‌های عمومی است، ولی الگوریتم‌های شبه چندجمله‌ای[۲] برای شبکه‌های مسطح با تنها یک مبدأ[۳] و چاهک[۴] و بدون امکان حذف گره‌ها یافته شده‌اند. الگوریتم‌های شبه چندجمله‌ای در این‌جا معرفی می‌شوند که محدودیت‌های گوناگون روش‌های قبلی را مغلوب می‌سازد.

خصوصاً یک تبدیل معرفی می‌شود که مسطح‌سازی را حفظ می‌کند و الحاق حذف گره‌ها و ظرفیت گره‌ها را در الگوریتم‌های شبه چندجمله‌ای برای گراف‌های مسطح[۵] ممکن می‌سازد. به علاوه یک روش جدید معرفی می‌شود که به ما اجازه می‌دهد که در زمان چند جمله‌ای[۶] کم‌ترین بودجه‌ی مورد نیاز را تعیین کنیم تا یال‌ها و گره‌های یک شبکه به گونه‌ای حذف شوند که بیش از این نتواند رضایت‌بخش باشد.

یک تعمیم ساده از روش پیشنهاد شده به ما اجازه می‌دهد تا قابلیت اجرائی آن را برای حل مسائل ممانعت از جریان در شبکه روی گراف‌های مسطح با یک مبدأ و چاهک تنها که هیچ محدودیتی روی تقاضا و موجودی ندارد تعمیم دهد.

---

[۱] Network flow interdiction

[۲] Pseudo-polynomial algorithms

[۳] source

[۴] sink

[۵] Planar graphs

[۶] polynomial

بنابراین روش پیشنهاد شده می‌تواند رده وسیع‌تر از مسائل ممانعت را در زمان شبه چندجمله‌ای قبلی حل کند و اولین الگوریتم شبه چندجمله‌ای است که می‌تواند مسائل ممانعت از جریان در شبکه را با چند مبدأ و چاهک حل کند. به علاوه نشان داده می‌شود که مساله‌ی k چگال‌ترین زیرگراف[۷] می‌تواند به مساله‌ی ممانعت از جریان در شبکه با چند مبدأ و چاهک تبدیل شود به طوری که داده‌های ورودی به طور چند جمله‌ای کراندار شده‌اند.

در این پایان‌نامه ما علاقه‌مند به کمینه کردن بیشینه جریان در یک شبکه با حذف یال‌ها و گره‌ها با مقدار بودجه‌ی ممانعت هستیم. این مساله اساساً به عنوان مساله‌ی ممانعت یا ممانعت از جریان در شبکه شناخته شده است بعضی اوقات اصطلاح منع شبکه به کار می‌رود. هم می‌توان حذف جزئی یال‌ها را در نظر گرفت و هم می‌توان در نظر نگرفت(حذف نیمی از یک یال متناظر با کاهش ظرفیتش به نیمی از مقدار اولیه است). در هر حال روش‌ها و نتایج در مورد این موضوع تفاوت چندانی با هم نمی‌کنند. ما علاقه‌مند به حالت بدون حذف یال جزئی هستیم. مساله‌ی پیدا کردن k حیاتی‌ترین یال یک شبکه‌ی جریان حالت خاصی از مساله‌ی ممانعت از جریان در شبکه است که k یال باید حذف شوند به طوری که بیشینه جریان تا حد ممکن کاهش یابد. یک رده‌ی مهم از مسائل که به طور نزدیک مربوط به ممانعت شبکه است ممانعت شبکه‌ی تصادفی[۸] است.

ممانعت شبکه و مسائل مربوط به آن در نواحی گوناگون ظاهر می‌شوند: مثل ممانعت مواد مخدر[۸] ، برنامه‌ریزی نظامی[۲] ، محافظت شبکه‌ی برق الکتریکی علیه حمله‌های تروریستی [۹] و کنترل عفونت بیمارستانی [۱] .

یک رده‌ی مهم از مسائلی که خیلی نزدیک به ممانعت شبکه است ممانعت شبکه‌ی تصادفی است، کورمیکان و همکاران روی ممانعت شبکه‌ی تصادفی کار کرده‌اند [۳] .

ممانعت شبکه و مسائل مربوط به آن در زمینه‌های مختلفی ظاهر می‌شود . وود روی کاربردهای ممانعت شبکه مثل ممانعت مواد مخدر[۸] ، قیر و همکاران روی برنامه‌ریزی نظامی[۳] ، سالمرون و همکاران روی محافظت شبکه‌ی برق الکتریکی علیه حمله‌های تروریستی[۹] ، اسیماکوپولوس روی کنترل عفونت بیمارستانی کار کرده‌اند [۱] .

راه حل‌های دقیق برای مسائل ممانعت شبکه توسط قیر و همکاران پیشنهاد شده‌است که اساسا بر پایه‌ی روش شاخه و کران است که بورچ و همکاران او یک شبه تقریب ارائه داده است [۲] . با توجه به اهمیت دوگانی مسطح، لاویر جزئیاتی را در مورد دوگانی مسطح در متن شبکه‌های ممانعت ارائه

[۷] k-densest subgraph

[۸] Stochastic network interdiction

داده‌است [۷] .

تلفیق ممانعت راس و ظرفیت راس مساله‌ی دیگری است که ناوور و خولر روشی را برای آن پیشنهاد داده‌اند(برای مدل‌سازی ظرفیت گره‌ها در مسائل جریان شبکه) [۶] .

برای استفاده‌ی راحت از این پایان‌نامه کوشیده‌ایم پیش‌نیازهای لازم را تا جای ممکن بیان کنیم تا نیازی به ارجاع به منابع دیگر نباشد. در فصل ۱ مفاهیم مقدماتی درباره‌ی گراف و ممانعت شبکه بیان می‌شود. در فصل ۲ ممانعت از جریان در شبکه بررسی خواهد شد. در فصل ۳ امنیت جریان شبکه مورد بررسی قرار می‌گیرد، در فصل ۴ جریان در گراف‌های مسطح با چند مبدأ و چاهک را با در نظر گرفتن عامل زمان بررسی می‌شود که در ابتدای این فصل مقدمات و قضیه‌هایی در مورد جریان در طول زمان آورده شده است.

این پایان‌نامه برا اساس مقاله‌ی

R. Zenclusen, Network flow interdiction on planar graphs, (158) (2010), 1441-1455.

است.

فصل ۱

تعریف‌های مقدماتی

در این فصل به بیان برخی مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز خواهیم داشت. تعریف‌های ارائه شده در این بخش مطالبی استاندارد است که در بسیاری از کتاب‌های مربوط به نظریه‌ی گراف آورده شده است[۱۴، ۱۵].

مفاهیم اولیه برای گراف

تعریف ۱. *گراف بدون جهت G یک سه تایی به صورت $(N(G), A(G), \psi_G)$ است که در آن $N(G)$ یک مجموعه‌ی متناهی و ناتهی، $A(G)$ یک مجموعه‌ی مجزا از مجموعه‌ی $N(G)$ و ψ_G یک تابع وقوع است به طوری که هر عضو از مجموعه‌ی $A(G)$ را به یک جفت نامرتب از اعضای $N(G)$ نظیر می‌کند. اعضای $N(G)$ را گره‌های گراف و اعضای $A(G)$ را یال‌های گراف G می‌نامیم.*

اگر a یک یال باشد و u و v گره‌هایی باشند به قسمی که $\psi_G(a) = \{u, v\}$ آن‌گاه می‌گوییم یال a، u و v را به هم وصل می‌کند و به طور خلاصه می‌نویسیم $a = \{u, v\}$. گره‌های u و v را دو انتهای یال a می‌نامیم.

تعریف ۲. *گراف جهت‌دار G یک سه‌تایی مرتب به صورت $(N(G), A(G), psi_G)$ است که در آن $N(G)$ یک مجموعه‌ی متناهی و ناتهی، $A(G)$ یک مجموعه‌ی مجزا از مجموعه‌ی $N(G)$ و ψ_G یک تابع وقوع است به طوری که هر عضو از مجموعه‌ی $A(G)$ را به یک جفت مرتب از اعضای $N(G)$ نظیر می‌کند. به طور مشابه اعضای $N(G)$ را گره‌های گراف G و اعضای $A(G)$ را یال‌های گراف G می‌نامیم.*

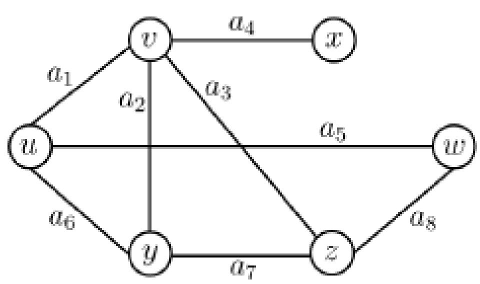
اگر $a \in A(G)$ و u و v گره‌هایی باشند به قسمی که $\psi_G(a) = (u, v)$، آن‌گاه می‌گوییم یال a گره u را به گره v وصل می‌کند یا از گره u خارج و به گره v وارد می‌شود. گره u را ابتدا و گره v را انتهای یال a می‌نامیم و به طور خلاصه می‌نویسیم $a = (u, v)$.

به عنوان مثال در شکل ۱.۱ گراف $G = (N(G), A(G), \psi_G)$ یک گراف بدون جهت است که در آن

$$N(G) = \{u, v, w, x, y, z\}, A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

است و تابع وقوع ψ_G به صورت

$$\begin{aligned}
&\psi_G(a_1) = \{u, v\}, \quad \psi_G(a_2) = \{v, y\} \\
&\psi_G(a_3) = \{z, v\}, \quad \psi_G(a_4) = \{v, x\} \\
&\psi_G(a_5) = \{u, w\}, \quad \psi_G(a_6) = \{y, u\} \\
&\psi_G(a_7) = \{y, z\}, \quad \psi_G(a_b) = \{z, w\}
\end{aligned}$$



شکل ۱.۱: گراف بدون جهت $G = (N(G), A(G), \psi(G))$

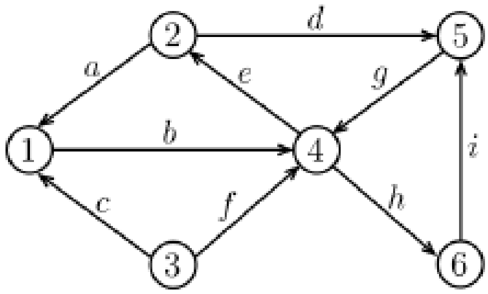
است. هم‌چنین در شکل ۲.۱ گراف $H = (N(H), A(H), \psi_H)$ یک گراف جهت‌دار است که در آن

$$N(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

$$\begin{aligned}
&\psi_H(a) = (2, 1), \quad \psi_H(b) = (1, 4) \\
&\psi_H(c) = (3, 1), \quad \psi_H(d) = (2, 5) \\
&\psi_H(e) = (4, 2), \quad \psi_H(f) = (3, 4) \\
&\psi_H(g) = (5, 4), \quad \psi_H(h) = (4, 6) \\
&\psi_H(i) = (6, 5)
\end{aligned}$$

است.

این مبحث را به این دلیل گراف می‌نامند که می‌توان موضوع مورد بحث را به صورت یک نمودار(گراف) نمایش داد. هر گره از یک گراف بدون جهت به صورت یک نقطه و هر یال آن با یک خط که دو انتهای یال را به هم وصل می‌کند مشخص می‌شود. نمودار گراف جهت‌دار نیز به صورت مشابه رسم می‌شود تنها با این تفاوت که در آن یک یال به صورت یک خط جهت‌دار از ابتدای یال به انتهای آن رسم می‌شود. غالبا نمودار گراف را رسم و به آن به عنوان خود گراف اشاره می‌کنیم. با همین برداشت نقطه‌هایش را گره و خط‌هایش را یال می‌نامیم. نمودار گراف‌های G و H به ترتیب به صورت شکل‌های ۱.۱ و ۲.۱ نمایش داده می‌شود. در این پایان‌نامه گره‌های یک گراف را به صورت یک دایره و در برخی مواقع به صورت یک نقطه رسم کرده‌ایم.



شکل ۲.۱: گراف جهت‌دار $H = (N(H), A(H), \psi(H))$

برای راحتی کار اغلب گراف بدون جهت $G = (N(G), A(G), \psi_G)$ به صورت زوج مرتب (N, A) نشان داده می‌شود که در آن

$$N = N(G), A = \{\{u, v\} | \psi_G(a) = \{u, v\}, a \in A(G)\}$$

است. به طور مشابه گراف جهت‌دار $G = (N(G), A(G), \psi_G)$ نیز به صورت زوج مرتب (N, A) نشان داده می‌شود که در آن

$$N = N(G), A = \{(u, v) | \psi_G(a) = (u, v), a \in A(G)\}$$

است. در این صورت برای تعریف گراف G نیازی به بیان تابع وقوع ψ_G نخواهد بود. N و A را به ترتیب مجموعه‌ی گره‌ها و مجموعه یال‌های گراف G می‌نامند. به عنوان مثال گراف داده شده در شکل ۱.۱ به صورت $G = (N, A)$ تعریف می‌شود که در آن

$$N = \{u, v, w, x, y, z\} , A = \{\{u, v\}, \{v, y\}, \{z, v\}, \{v, x\}, \{u, w\}, \{y, u\}, \{y, z\}, \{z, w\}\}$$

است.

تعریف ۳. *گراف جهت‌دار $G=(N,A)$ را یک شبکه گوییم اگر امکان وجود جریان در امتداد تمامی یال‌ها باشد.*

تعریف ۴. *دو گره $u,v \in N$ درگراف بدون جهت $G=(N,A)$ را مجاور گوییم هرگاه $\{u,v\} \in A$. مجموعه رئوس مجاور با گره $u \in N$ را همسایگی u می‌نامند و با $N(u)$ نشان می‌دهند.*

$$N(u) = \{v \in N : \{u,v\} \in A\}$$

تعداد اعضای مجموعه‌ی $N(u)$ یعنی $|N(u)|$ را درجه‌ی گره $u \in N$ می‌گویند.

تعریف ۵. *درگراف جهت‌دار $G=(N,A)$ درجه‌ی ورودی یک گره عبارت است از تعداد یال‌هایی که به آن وارد می‌شود و درجه‌ی خروجی یک گره تعداد یال‌هایی است که از آن گره خارج می‌شود.*

تعریف ۶. *یک گذر T از گره i_1 به گره i_r درگراف بدون جهت $G=(N,A)$ دنباله‌ای از گره‌ها و یال‌ها به صورت $i_1 - a_1 - i_2 - a_2 - ... - a_{r-1} - i_r$ است به طوری که :*

1. $j = 1,..,r, i_j \in N$

2. $j = 1,...,r-1, a_j = \{i_j, i_{j+1}\} \in A$

3. $j \neq l, j,l = 1,...,r-1, a_j \neq a_l$

تعریف ۷. *درگراف بدون جهت $G=(N,A)$ گذر $T : i_1 - a_1 - i_2 - a_2 - ... - a_{r-1} - i_r$ را یک مسیر از گره i_1 به گره i_r می‌نامند هرگاه گره‌های $i_1, i_2, ..., i_r$ مجزا باشند.*

تعریف ۸. *یک گذر بدون جهت T از گره i_1 به گره i_r درگراف جهت‌دار $G=(N,A)$ عبارت است از یک دنباله از گره‌ها و یال‌ها به صورت $i_1 - a_1 - i_2 - a_2 - ... - a_{r-1} - i_r$ به طوری که :*

1. $j = 1,...,r, i_j \in N$

2. $j = 1, ..., r-1, a_j = (i_{j+1}, i_j) \in A \quad or \quad a_j = \{i_j, i_{j+1}\} \in A$

3. $j \neq l, j, l = 1, ..., r-1, a_j \neq a_l$

تعریف ۹. *در یک گراف جهت‌دار، گذر بدون جهت $T: i_1 - a_1 - i_2 - a_2 - ... - a_{r-1} - i_r$ را یک مسیر بدون جهت از گره i_1 به گره i_r می‌نامند هرگاه گره‌های $i_1, i_2, ..., i_r$ مجزا باشند.*

تعریف ۱۰. *یک گذر جهت‌دار T از گره i_1 به گره i_r در گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ عبارت است از یک دنباله از گره‌ها و یال‌ها به صورت $i_1 - a_1 - i_2 - a_2 - ... - a_{r-1} - i_r$ به طوری که :*

1. $j = 1, ..., r, i_j \in N$

2. $j = 1, ..., r-1, a_j = (i_{j+1}, i_j) \in A$

3. $j \neq l, j, l = 1, ..., r-1, a_j \neq a_l$

تعریف ۱۱. *در یک گراف جهت‌دار، گذر جهت‌دار $T: i_1 - a_1 - i_2 - a_2 - ... - a_{r-1} - i_r$ را یک مسیر جهت‌دار از گره i_1 به گره i_r می‌نامند هرگاه گره‌های $i_1, i_2, ...$ و i_r مجزا باشند.*

برای راحتی کار مسیر $P: i_1 - a_1 - i_2 - a_2 - ... - a_{r-1} - i_r$ را به صورت $P: i_1 - i_2 - ... - i_r$ نشان می‌دهند . در مسیر $P: i_1 - i_2 - ... - i_r$ گره‌های i_1 و i_r را به ترتیب ابتدا و انتهای مسیر P و $P: i_2 - i_3 - ... - i_{r-1}$ را گره‌های داخلی مسیر P می‌نامند.

به عنوان مثال در گراف بدون جهت داده شده در شکل ۱.۱ ، $T_1: u - v - z - y - v - x$ و $p_1: u - y - v - x$ به ترتیب یک گذر و یک مسیر از گره u به گره x است. در گراف جهت‌دار داده شده در شکل ۲.۱ ، $T_2: 2 - 4 - 3 - 1 - 4 - 6$ یک گذر بدون جهت، $T_3: 2 - 5 - 4 - 6$ یک گذر و مسیر جهت‌دار و $P_2: 2 - 1 - 3 - 4 - 6$ یک مسیر بدون جهت از گره ۲ به گره ۶ است.

تعریف ۱۲. *طول مسیر P برابر است با تعداد یال‌های موجود در مسیر P که با $|P|$ نشان داده می‌شود.*

تعریف ۱۳. *دو مسیر P_1 و P_2 از گره u به گره v را مجزا گوییم هرگاه در هیچ یال و گره داخلی از این دو مشترک نباشند.*

تعریف ۱۴. *هر مسیر جهت‌دار یا بدون جهت با ابتدا و انتهای یکسان را به ترتیب یک دور جهت‌دار و یا دور بدون جهت می‌نامند. گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ را بدون دور گوییم اگر شامل هیچ دور جهت‌دار نباشد.*

تعریف ۱۵. *گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ را همبند گوییم هرگاه بین دو گره دلخواه $i, j \in N$ حداقل یک مسیر بدون جهت موجود باشد. در غیر این صورت ناهمبند گوییم و آن را همبند قوی می‌نامند هر گاه بین دو گره دلخواه آن یک مسیر جهت‌دار موجود باشد.*

تعریف ۱۶. *گوییم گراف $G' = (N', A')$ یک زیرگراف از گراف بدون جهت $G = (N, A)$ است هرگاه:*

1. $N' \subseteq N$

2. $A' \subseteq \{\{i, j\} \in A : i, j \in N'\}$

تعریف ۱۷. *گوییم گراف $G' = (N', A')$ یک زیرگراف از گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ است هرگاه:*

1. $N' \subseteq N$

2. $A' \subseteq \{(i, j) \in A : i, j \in N'\}$

تعریف ۱۸. *هر زیرگراف همبند (قوی) ماکسیمال در یک گراف ناهمبند را یک مولفه (همبند قوی) می‌نامند.*

مفهوم برش در یک گراف جهت‌دار

فرض کنید $G = (N, A)$ یک گراف جهت‌دار همبند باشد. برش در گراف G عبارت است از یک زیرمجموعه از یال‌ها که حذف آن‌ها از گراف باعث ناهمبند شدن آن می‌شود.

تعریف ۱۹. *فرض کنید S و $\bar{S} = N - S$ یک افراز از مجموعه رئوس N باشد. مجموعه‌ی تمام یال‌هایی که ابتدا و انتهای آن‌ها به ترتیب در مجموعه‌های S و $\bar{S}$ باشد و یا برعکس تشکیل یک برش می‌دهند را با $[S, \bar{S}]$ نشان می‌دهند.*

گوییم یال $(i, j) \in [S, \bar{S}]$ یک یال پیشرو در برش $[S, \bar{S}]$ است اگر $i \in S$ و $j \in \bar{S}$. مجموعه‌ی تمام یال‌های پیشرو در برش $[S, \bar{S}]$ را با $(S, \bar{S})$ نشان می‌دهیم.
گوییم یال $(i, j) \in [S, \bar{S}]$ یک یال پسرو در برش $[S, \bar{S}]$ است اگر $i \in S$ و $j \in S$. مجموعه‌ی تمام یال‌های پسرو در برش $[S, \bar{S}]$ را با $(\bar{S}, S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰. *فرض کنید $s, t \in N$ و $[S, \bar{S}]$ یک برش باشد گوییم $[S, \bar{S}]$ یک $s - t$ برش است هرگاه $s \in S$ و $t \in \bar{S}$ باشد.*

اگر در گراف داده شده در شکل ۲.۱ قرار دهیم $S = \{1, 2, 3\}$ خواهیم داشت $\bar{S} = \{4, 5, 6\}$. در این صورت برش $[S, \bar{S}]$ و مجموعه یال‌های پسرو و پیشرو برش فوق به صورت

$$[S, \bar{S}] = \{(2, 5), (4, 2), (1, 4), (3, 4)\}$$
$$(S, \bar{S}) = \{(2, 5), (1, 4), (3, 4)\}$$
$$(\bar{S}, S) = \{(4, 2)\}$$

خواهد بود.

تعریف ۲۱. *یک تابع ظرفیت در شبکه‌ی $G = (N, A)$ تابعی به صورت $u : A \to Z^+$ است به طوری که هر یال $(i, j) \in A$ را به یک عدد صحیح مثبت u_{ij} نظیر می‌کند. گوییم u_{ij} ظرفیت یا کران بالای یال (i, j) است.*

فرض کنید $G = (N, A)$ یک شبکه‌ی همبند باشد و $u : A \to Z^+$ یک تابع ظرفیت باشد. ظرفیت برش $[S, \bar{S}]$ را با $U[S, \bar{S}]$ نشان می‌دهند و به صورت