بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات وفناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (جبر)

عنوان :

حلقه های چندجمله ای پواسون

نگارش :

مهدی کاظمی پور

استاد راهنما :

دکتر محمد اخوی زادگان

استاد مشاور :

دکتر شیرویه پیروی

آبان - ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر، مادر... و ...

همهٔ انسان دوستان واقعی؛

کسانی که خود را وقف خدمت به انسان‌های درمانده و محروم نگهداشته شده نموده و آنان را جزئی از خانوادهٔ خویش می‌انگارند و در برابرشان احساس مسئولیّت می‌کنند.

... در هر حرفه‌ای که هستید نه اجازه دهید که به بدبینی‌های بی‌حاصل آلوده شوید و نه بگذارید که بعضی لحظات تأسف‌بار که برای هر ملّتی پیش می‌آید شما را به یأس و ناامیدی بکشاند. در آرامش حاکم بر آزمایشگاه‌ها و کتابخانه‌هایتان زندگی کنید، نخست از خود بپرسید: (برای یادگیری و خودآموزی چه کرده‌ام؟) سپس همچنان که پیش‌تر می‌روید، بپرسید: (من برای کشورم چه کرده‌ام؟) و این پرسش را آن‌قدر ادامه دهید تا به این احساس شادی بخش و هیجان‌انگیز برسید که:
(شاید سهم کوچکی در پیشرفت و اعتلای بشریّت داشته‌اید). امّا هر پاداشی‌که زندگی به تلاش‌هایمان بدهد یا ندهد، هنگامی که به پایان تلاش‌هایمان نزدیک می‌شویم هر کدامیمان باید حقّ آن را داشته باشیم که با صدای بلند بگوییم:

(من آن‌چه در توان داشته‌ام انجام داده‌ام).

لوئی پاستور

(۱۸۲۲–۱۸۶۵)

تقدیر:

وظیفهٔ خود می‌دانم از همهٔ عزیزانی که در تهیّه و تدوین این اثر مرا یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر نمایم.

همچنین از اساتید گرانقدر جناب آقای **دکتر محمد اخوی زادگان** به‌عنوان استاد راهنمای رساله و جناب آقای **دکتر شیرویه پیروی** به‌عنوان استاد مشاور رساله بینهایت سپاسگزارم و کمک‌های بی‌شائبه و فراوان ایشان را ارج می‌نهم.

چکیده:

یک K ـ جبر A، با یک نگاشت K ـ دوخطی $\{\,,\,\}:A\times A\longrightarrow A$، یک جبر پواسون نامیده می‌شود اگر:

(۱) به‌ازای هر $a,b\in A$ ، $\{a,b\}=-\{b,a\}$

(۲) به‌ازای هر $a,b,c\in A$ ، $\{a,\{b,c\}\}+\{b,\{c,a\}\}+\{c,\{a,b\}\}=0$

(۳) به‌ازای هر $a,b,c\in A$ ، $\{ab,c\}=a\{b,c\}+b\{a,c\}$.

فرض کنید A یک جبر پواسون با کروشهٔ پواسون $\{.,.\}_A$ باشد و فرض کنید α و δ نگاشت‌های خطی از A به داخل A باشند. یک شرط لازم و کافی برای جفت (α,δ) پیدا می‌کنیم به‌طوری‌که حلقهٔ چندجمله‌ای $A[x]$، به‌ازای هر $a,b\in A$ ، یک کروشهٔ پواسون به‌صورت $\{a,x\}=\alpha(a)x+\delta(a) \quad , \quad \{a,b\}=\{a,b\}_A$ دارد. همچنین یک رده از جبرهای پواسون که شامل حلقه‌های مختصاتی ماتریس‌های 2×2 پواسون و ۴ـ فضای سیمپلکتیک پواسون است، می‌سازیم.

اگر A یک جبر پواسون با تولید متناهی روی یک میدان با مشخصهٔ صفر باشد، ثابت می‌کنیم هر ایده‌آل اول پواسون A، اول است و روشی برای پیداکردن ایده‌آل‌های اول پواسون در یک حلقهٔ چندجمله‌ای پواسون دلخواه $A[x;\alpha,\delta]$ ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: مشتق ـ جبر پواسون ـ حلقهٔ چندجمله‌ای پواسون ـ ایده‌آل اول پواسون.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در مقاله‌ای[۱] که سیمون دنیس پواسون[۲] در سال ۱۸۰۹ منتشر کرد یک پیشرفتی در نظریهٔ مکانیک لاگرانژ که توسط ژوزف– لویی لاگرانژ[۳] و پیر– سیمون لاپلاس [۴] بسط داده شده بود، پیدا کرد. پواسون در این مقاله نمادگذاری

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} \right)$$

را معرفی کرد. که در آن a و b دو تابع از مختص‌های q_i و کمیّت‌های مزدوج $p_i = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ برای یک سیستم مکانیکی[۵] با تابع لاگرانژی R، هستند. (a,b) امروزه به‌صورت $\{a,b\}$ نشان داده می‌شود و

---

[۱] *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de m'ecanique*

[۲] *Siméon Denis Poisson*

[۳] *Joseph – Louis Lagrange*

[۴] *Pierre – Simon Laplace*

[۵] در مکانیک لاگرانژی برای هر سیستم، کمیّتی به‌نام تابع لاگرانژی تعریف می‌شود. تابع لاگرانژی برابر با تفاضل انرژی پتانسیل سیستم از انرژی جنبشی سیستم است. سپس این مقدار در معادله‌ای که به معادلهٔ لاگرانژ معروف است، قرار داده می‌شود. معادلهٔ لاگرانژ، معادله‌ای به‌صورت $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}) = \frac{\partial R}{\partial q_i}$ است به‌طوری‌که R تابع لاگرانژی، q_i مختصات تعمیم یافته(برای مشخص کردن پیکربندی یک سیستم خاص، احتیاج به تعداد حداقل n مختص معیّن است. این مختصات، مختصات تعمیم یافته نامیده می‌شود.) و $\dot{q}_i$ سرعت‌های تعمیم یافته (که نقطه بیانگر مشتق زمانی مختصات تعمیم یافته q_i است) را نشان می‌دهد.

کروشهٔ پواسونِ a و b نامیده می‌شود. ریاضیدانان قرن نوزدهم پیش از این اهمیّت این کروشه را به رسمیّت شناختند. به‌ویژه، ویلیام هامیلتون [1] در مقاله‌ای [2] در سال ۱۸۳۵ به طور گسترده‌ای از آن برای بیان کردن معادله‌های خود استفاده کرد. چیزی که اکنون آن را دینامیک هامیلتون می‌نامیم. کارل ژاکوبی [3] در کتاب [4] خود در سال (۱۸۴۳–۱۸۴۲) نشان داد که کروشهٔ پواسون در اتحاد معروف ژاکوبی یعنی:

$$\{\{a,b\},c\}+\{\{b,c\},a\}+\{\{c,a\},b\}=0$$

صدق می‌کند. این همان اتحادی است که برای جبرهای لی برقرار است، که یک نسخه بسیار کوچک از گروه های لی هستند به‌طوری‌که اوّلین بار توسط سوفاس لی [5] و همکارانش در اواخر قرن نوزدهم مطالعه و بررسی شد[6].

به زبان امروزی یک ساختار پواسون روی یک R ـ جبر A، توسط یک نگاشتِ R ـ دوخطی پادمتقارن، $A \times A \longrightarrow A : \{\ ,\ \}$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که:

(۱) $(A, \{\ ,\ \})$ یک جبر لی روی R است ،

(۲) در قاعدهٔ لایپنیتز صدق کند، یعنی به‌ازای هر $a,b,c \in A$، $\{ab,c\}=a\{b,c\}+\{a,c\}b$.

رسالهٔ حاضر مشتمل بر ۴ فصل است:

فصل اول شامل مفاهیم و قضایایی است که در فصل‌های دیگر به آن نیاز داریم.

در فصل دوم به معرفی مفهوم جبر پواسون A می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی می‌توان کروشهٔ پواسون روی جبر پواسون A را به حلقهٔ چندجمله‌ای $A[x]$ توسعه داد به‌طوری‌که $A[x]$ یک جبر پواسون (حلقهٔ چندجمله‌ای پواسون) شود. همچنین مثال‌هایی از جبر پواسون برای درک

[1] *William Hamilton*
[2] *Second essay on a general mthod in dynamics*
[3] *Carl Jacobi*
[4] *Vorlesungen über Dynamik*
[5] *Sophus Lie*
[6] *Theorie des transformationgrupen*

بیشتر مفهوم حلقه‌های چندجمله‌ای پواسون آورده شده است.

در فصل سوم مفهوم ایده‌آل پواسون اول در یک جبر پواسون معرفی می‌شود و روشی را برای پیدا کردن ایده‌آل‌های پواسون اول حلقهٔ چندجمله‌ای پواسون $A[x;\alpha]_p$ توسعه می‌دهیم. در قسمت پایانی این فصل نیز ایده‌آل‌های پواسون اول حلقهٔ مختصاتی ۴− فضای سیمپلکتیک پواسون را رده‌بندی می‌کنیم.

در فصل چهارم به معرفی مفهوم ایده‌آل اول پواسون در یک جبر پواسون و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم. در این فصل نشان می‌دهیم که در یک جبر پواسون با تولید متناهی A روی یک میدان با مشخصهٔ صفر، هر ایده‌آل اول پواسون، اول است. همچنین روشی را برای پیدا کردن همهٔ ایده‌آل‌های اول پواسون در یک حلقهٔ چندجمله‌ای پواسون دلخواه $A[x;\alpha,\delta]_p$ ارائه می‌دهیم.

ارجاعات در این رساله به این‌صورت است که اگر در فصلی نوشته باشیم قضیه (لم، نتیجه، مثال) $m.n$، منظور قضیه (لم، نتیجه، مثال) شمارهٔ m از فصل n است، لیکن اگر نوشته باشیم قضیه (لم، نتیجه، مثال) $m.k.n$، منظور قضیه (لم، نتیجه، مثال) شمارهٔ m از بخش k در فصل n است. همچنین برای ارجاع به یک منبع از [n ، m] استفاده می‌شود که n شمارهٔ منبع و m قضیه (لم، نتیجه، مثال، صفحه) مورد نظر است.

منابع اصلی این رساله مقاله‌های زیر می‌باشد:

[12] S. -Q. Oh, *Poisson polynomial rings.* Comm. Algebra 34 (2006) 1265-1277.

[13] S. -Q. Oh, *Poisson prime ideals of Poisson polynomial rings.* Comm. Algebra 35 (2007) 3007-3012.

در پایان از همهٔ عزیزانی که در تهیّه و تدوین این اثر مرا یاری نموده‌اند، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در سرتاسر این رساله فرض می‌کنیم K یک میدان است و همهٔ جبرها (جبرهای پواسون روی K)، جابه‌جایی و یکدار هستند. در این فصل تعاریف و قضایایی را که در فصل‌های دیگر به‌آن نیاز داریم، بیان می‌کنیم.

۱. تعاریف و قضایای مقدماتی

نمادگذاری. نماد$\mathbb{Z}$ همواره نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ عددهای صحیح است ونماد $\mathbb{N}$($\mathbb{N}_0$) همواره نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت (نامنفی) است. مجموعهٔ عددهای گویا (حقیقی، مختلط) با نماد $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{C}, \mathbb{R}$) نشان داده می‌شود.

نماد $\subseteq$ برای نمایش زیرمجموعه بودن و نماد $\subset$ برای نمایش زیرمجموعهٔ سره بودن به‌کار می‌رود. لذا به‌ازای مجموعه‌های A و B عبارت $A \subset B$ یعنی $A \subseteq B$ و $A \neq B$.

نماد ■ برای نمایش پایان اثبات یا عدم ارائه اثبات به‌کار می‌رود.

تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای[۱] جابه‌جایی باشد. منظور از R ـ جبر، حلقه‌ای چون A [۲] مجهز به یک همریختی حلقه‌ای چون $f : R \longrightarrow A$ است. لذا همریختی f را باید قسمتی از ساختار R ـ جبر

[۱] در سرتاسر این رساله، منظور از حلقه، حلقه‌ای یکدار است.

[۲] A یک حلقهٔ جابه‌جایی است.

A بدانیم. بنابراین در این حالت A توسط همریختی یک‌به‌یک طبیعی [1] $i: Imf \longrightarrow A$، یک جبر روی زیرحلقه‌اش Imf است.

نکته. برای یک جبر ناجابه‌جایی، همریختی حلقه‌ای f، به‌صورت $f: R \longrightarrow Z(A)$ است. که در آن $Z(A)$ [2] مرکز حلقهٔ A است.

نکته. فرض کنید A یک حلقه باشد. در این صورت نگاشت $f: \mathbb{Z} \longrightarrow A$ با تعریفِ

$$f(n) = n(1_A) \quad \text{به‌ازای هر}\ n \in \mathbb{Z}$$

همریختی حلقه‌ای است و درواقع تنها همریختی ممکن ازحلقهٔ $\mathbb{Z}$ به حلقهٔ A است. در اینجا داریم:

$$n(1_A) = \begin{cases} 1_A + \cdots + 1_A & (n: \text{تعدادجملات}) \qquad \text{به‌ازای}\ n > 0 \\ 0_A & \qquad \text{به‌ازای}\ n = 0 \\ (-1_A) + \cdots + (-1_A) & (-n: \text{تعدادجملات}) \qquad \text{به‌ازای}\ n < 0 \end{cases}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که هرحلقه یک $\mathbb{Z}$ ـ جبر است.

تعریف و نمادگذاری. فرض کنید A' زیرحلقه‌ای ازحلقهٔ A و Γ زیرمجموعه‌ای از A باشد. در این‌صورت $A'[\Gamma]$ را اشتراک همهٔ زیرحلقه‌هایی از A تعریف می‌کنیم که شامل هر دو مجموعهٔ A' و Γ باشند. (یقیناً دست‌کم یک‌چنین زیرحلقه‌ای وجوددارد، که همان A است.) لذا $A'[\Gamma]$ زیرحلقه‌ای از A است که هر دو مجموعهٔ A' و Γ را شامل می‌شود و کوچکترین زیرحلقه A ازاین نوع است، به این معنا که در هر زیرحلقهٔ دیگری از A که A' و Γ را شامل می‌شود قرار دارد.

درحالت خاصی که Γ مجموعه‌ای متناهی چون $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ باشد، $A'[\Gamma]$ را به‌صورت $A'[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ می‌نویسیم.

---

[1] به‌ازای هر $a \in Imf$، $i(a) = a$.

[2] $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \quad \forall x \in A\}$

تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و A یک R ـ جبر با همریختی حلقه‌ای ساختاری $f: R \longrightarrow A$ باشد؛ قراردهید $R' = Imf$. منظور از R ـ زیرجبر A، زیرحلقه‌ای از A مانند A' است که شامل $R' = Imf$ باشد.

روشن است که اشتراک هر خانوادهٔ ناتهی از R ـ زیرجبرهای A یک R ـ زیرجبر A است. به‌ازای زیرمجموعهٔ Γ از A، R ـ زیرجبر تولید شده توسط Γ را به‌صورت اشتراک خانوادهٔ (ناتهی) از R ـ زیر جبرهای A که شامل Γ هستند تعریف می‌کنیم؛ و بنابراین این زیرجبر چیزی جز $R'[\Gamma]$ نیست. البتّه $R'[\Gamma]$ کوچکترین R ـ زیرجبر A است که Γ را شامل می‌شود، به این معنا که (R ـ زیرجبر است و همچنین) زیرمجموعهٔ هر R ـ زیرجبر A است که شامل Γ باشد.

می‌گوییم R ـ زیرجبر A' از A با تولید متناهی است اگر به‌ازای زیرمجموعه‌ای متناهی چون Δ از A، $A' = R'[\Delta]$، یعنی $a_1, \ldots, a_n \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $A' = R'[a_1, \ldots, a_n]$.

برای مثال حلقهٔ چندجمله‌ای $\mathbb{R}[x,y]$، یک $\mathbb{R}$ ـ جبر با تولید متناهی است که توسط x و y تولید شده است. توجّه داشته باشید اگر A یک R ـ جبر جابه‌جایی با همریختی ساختاری $f: R \longrightarrow A$ باشد، آن‌گاه R ـ زیرجبر A' تولید شده توسط Γ، متشکل از همهٔ عناصر A است که به‌صورت چندجمله‌ای‌هایی از عناصر Γ نوشته می‌شوند به‌طوری‌که ضرایب آن‌ها در $R' = Imf$ می‌باشد.

تعریف. فرض کنید A، B، C جبرهایی روی K باشند. آن‌گاه:

(۱) نگاشت $f: A \longrightarrow B$، K ـ خطی نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر x و y در A و $k \in K$ داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(kx) = kf(x)$$

(۲) نگاشت $f: A \times B \longrightarrow C$، K ـ دوخطی نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر x و x_1 و x_2 در A، y و y_1 و y_2 در B، و $k \in K$ داشته باشیم:

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),$$

$$f(kx,y)=f(x,ky)=kf(x,y)\ .$$

تعریف. فرض کنید A و B جبرهایی روی K باشند. در این‌صورت نگاشت K ـ خطی $f:A\longrightarrow B$ که یک همریختی (یکریختی) حلقه نیز است، یک همریختی (یکریختی) K ـ جبری یا یک همریختی (یکریختی) از K ـ جبرها نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۱. فرض کنید A یک جبر روی میدان K باشد. اگر A به‌عنوان K ـ جبر با تولید متناهی باشد، آن‌گاه A نوتری است.

برهان. فرض کنید x_1 ، ... ، x_n، A را به‌عنوان یک K ـ جبر پدید آورند. قراردهید $S=K[y_1,\ldots,y_n]$، که یک حلقهٔ چندجمله‌ای روی K، در n متغیرمستقل y_1 ، ... ، y_n، می‌باشد. چون A جابه‌جایی است، پس یک همریختی حلقه مانند $\phi:S\longrightarrow A$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $\phi(y_i)=x_i$. ϕ پوشاست، زیرا x_i ها A را تولید می‌کنند. K نوتری است بنابراین طبق قضیهٔ پایهٔ هیلبرت [1]، S یک حلقهٔ نوتری است و بنابراین هر ایده‌آل از S با تولید متناهی است. اگر I یک ایده‌آل از A باشد آن‌گاه $\phi^{-1}(I)$ یک ایده‌آل از S با تولید متناهی است و $\phi\phi^{-1}(I)=I$، زیرا ϕ پوشا است . در نتیجه I با تولید متناهی است. بنابراین A نوتری است. ∎

تعریف. فرض کنید A حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. طیف اول A یا به اختصار طیف A را مجموعهٔ همهٔ ایده‌آل‌های اول A تعریف می‌کنیم. طیف A را با $Spec(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. فرض کنید I ایده‌آل سرهٔ حلقهٔ جابه‌جایی A باشد. قرار دهید:

$$Var(I)=\{P\in Spec(A):P\supseteq I\}$$

عضوهای مینیمال $Var(I)$ را ایده‌آل‌های اول مینیمال I یا ایده‌آل‌های اول مینیمال شامل I می‌نامیم.

---

[1] $Hilbert$

ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل صفر A را گاه ایده‌آل‌های اول مینیمال A می‌نامیم.

قضیه ۲.۱. هر ایده‌آل اول P در یک حلقهٔ A شامل یک ایده‌آل اول مینیمال است.

برهان. فرض کنید $\sum$ مجموعهٔ تمام ایده‌آل‌های اول از A که مشمول در P هستند، باشد یعنی؛ $\sum = \{P' \mid P' \in Spec(A), P' \subseteq P\}$. $\sum$ ناتهی است زیرا $P \in \sum$. ما از لم زُرن[۱] رو به پایین در $\sum$ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر زنجیر ناتهی $\mathcal{Y} \subseteq \sum$ یک کران پایین در $\sum$ دارد. قراردهید: $Q = \cap\mathcal{Y}$. چون $\mathcal{Y}$ یک زنجیر است، Q یک ایده‌آل از A است و همچنین به‌وضوح داریم $Q \subseteq P$. نشان می‌دهیم که Q یک ایده‌آل اول است. عناصر x و y در A را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $xAy \subseteq Q$ امّا $x \notin Q$. بنابراین یک $P' \in \mathcal{Y}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \notin P'$. عناصر یک زنجیر مقایسه پذیرند، بنابراین برای هر $P'' \in \mathcal{Y}$، $P'' \subseteq P'$ یا $P' \subseteq P''$. اگر $P'' \subseteq P'$، داریم $x \notin P''$. چون $xAy \subseteq Q \subseteq P''$، نتیجه می‌شود $y \in P''$. به‌ویژه، $y \in P'$. اگر $P' \subseteq P''$، نتیجه می‌شود $y \in P''$. بنابراین برای هر عضو P'' از $\mathcal{Y}$ داریم: $y \in P''$، در نتیجه $y \in Q$. بنابراین ثابت شد که Q یک ایده‌آل اول است. $Q \in \sum$ و یک کران پایین برای $\mathcal{Y}$ است. در نتیجه طبق لم زُرن $\sum$ دارای یک ایده‌آل اول مانند P^* که در بین ایده‌آل‌های اول $\sum$ مینیمال است می‌باشد. چون هر ایده‌آل اول مشمول در P^*، در $\sum$ نیز است، نتیجه می‌شود P^* یک ایده‌آل اول مینیمال از A است. ■

---

[۱] گیریم $\sum$ یک مجموعهٔ ناتهی باشد. رابطهٔ $\leq$ را روی $\sum$ یک **رابطهٔ ترتیبِ جزئی** می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $a, b, c \in \sum$، (۱) $a \leq a$ ، (۲) $a \leq b$ و $b \leq a$ آن‌گاه $a = b$ ، (۳) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آن‌گاه $a \leq c$.

$\sum$ را بارابطهٔ ترتیب جزئی $\leq$ در نظر می‌گیریم. عضوی از $\sum$ مثل a را **عضوِ ماکسیمال** $\sum$ می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر عضو از $\sum$ مثل c، اگر $a \leq c$، آن‌گاه $c = a$. عضوی از $\sum$ مثل d را **کران بالای** زیرمجموعهٔ ناتهی Λ از $\sum$ می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر عضو از Λ مثل b، $b \leq d$. عضوی از $\sum$ مثل d' را **کران پایین** زیرمجموعهٔ ناتهی Λ از $\sum$ می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر عضو از Λ مثل b، $d' \leq b$. زیرمجموعه‌ای مثل Λ از $\sum$ را **زنجیر** می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر دو عضو از Λ مثل $b_۱$ و $b_۲$، $b_۱ \leq b_۲$ یا $b_۲ \leq b_۱$. لم زُرن چنین است:

لم زُرن . اگر $\sum$ مجموعه‌ای ناتهی همراه بارابطهٔ ترتیب جزئی $\leq$ باشد با این ویژگی که هر زنجیر ناتهی از آن کران بالایی در $\sum$ داشته باشد، آن‌گاه $\sum$ عضوی ماکسیمال دارد.

قضیه ۳.۱. در یک حلقهٔ نوتری A، تنها تعداد متناهی ایده‌آل اول مینیمال وجود دارد و یک حاصل‌ضرب متناهی ازایده‌آل‌های اول مینیمال (تکراری می‌تواند باشد) برابر با صفر وجود دارد.

برهان. کافی است نشان دهیم که ایده‌آل‌های اول P_1 ، ... ،P_n در A وجود دارند به‌طوری‌که $P_1P_2\ldots P_n = 0$. هر P_i را با یک ایده‌آل اول مینیمال مشمول درآن جایگزین می‌کنیم. هر P_i را مینیمال فرض کردیم از این رو برای هرایده‌آل اول مینیمال P که شامل $P_1P_2\ldots P_n$ است، P_jای وجود دارد به‌طوری‌که $P_j \subseteq P$، از این رو $P = P_j$. در نتیجه ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقهٔ A مشمول در مجموعهٔ متناهی $\{P_1, \ldots, P_n\}$ است.

فرض کنید هیچ حاصل‌ضرب متناهی از ایده‌آل‌های اول A که برابر با صفر شود وجود ندارد. فرض کنید X مجموعهٔ ایده‌آل‌های K در A است که نمی‌تواند شامل یک حاصل‌ضرب متناهی از ایده‌آل‌های اول باشد. X ناتهی است زیرا $0 \in X$. با فرض نوتری بودن A، X عضوی ماکسیمال چون K دارد. A را با $\frac{A}{K}$ جایگزین می‌کنیم و بدون اینکه به کلیّت مسأله خللی وارد شود فرض می‌کنیم که هیچ حاصل‌ضرب متناهی از ایده‌آل‌های اول A که برابر با صفر شود وجود ندارد، حال آن‌که همهٔ ایده‌آل‌های ناصفر از A شامل حاصل‌ضرب متناهی از ایده‌آل‌های اول است.

چون صفر نمی‌تواند یک ایده‌آل اول باشد، در نتیجه ایده‌آل‌های ناصفر I و J در A وجود دارند به‌طوری‌که $IJ = 0$. بنابراین ایده‌آل‌های اول P_1 ، ... ،P_m و Q_1 ، ... ،Q_n در A وجود دارند به‌طوری‌که $P_1P_2\ldots P_m \subseteq I$ و $Q_1Q_2\ldots Q_n \subseteq J$. امّا $P_1P_2\ldots P_mQ_1Q_2\ldots Q_n = 0$، و این با فرض ما در تناقض است. بنابراین یک حاصل‌ضرب متناهی ازایده‌آل‌های اول در A که برابر با صفر می‌شود وجود دارد. ■

تعریف. هرگاه $F \subset K$ دو میدان باشند، آن‌گاه گوییم $a \in K$ روی F جبری است اگر یک چندجمله‌ای مانند $p(x) \neq 0$ در $F[x]$ موجود باشد به‌طوری‌که $p(a) = 0$.

برای مثال عددمختلط $a = ۱ + i$ روی $\mathbb{Q}$ جبری است، زیرا در $۰ = a^۲ - ۲a + ۲$ روی $\mathbb{Q}$ صدق می‌کند.

هر عنصر K که روی F جبری نباشد روی F متعالی نام دارد. برای مثال می‌توان نشان داد که دو عدد آشنای e و π روی $\mathbb{Q}$ متعالی‌اند. متعالی بودن e در سال ۱۸۷۳ توسط هرمیت [۱] و متعالی بودن π روی $\mathbb{Q}$، که بسیارمشکل‌تر است، اولین بار توسط لیندمان [۲] در سال ۱۸۸۲ ثابت شد.

تعریف. فرض کنید R زیرحلقه‌ای ازحلقهٔ جابه‌جایی A باشد و $a \in A$. می‌گوییم a روی R صحیح است اگر $n \in \mathbb{N}$ و $r_۰, \dots, r_{n-۱} \in R$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$a^n + r_{n-۱}a^{n-۱} + \cdots + r_۱ a + r_۰ = ۰$$

یعنی a ریشهٔ یک چندجمله‌ای تکین متعلق به $R[x]$ باشد.

لذا در حالتی که R و A میدان باشند، a روی R صحیح است اگر و تنها اگر a روی R جبری باشد.

تعریف. می‌گوییم که مدول M روی حلقهٔ جابه‌جایی A صادق است اگر $(۰ : M) = ۰$ یعنی اگر پوچساز M صفر باشد.

قضیه ۴.۱. فرض کنید R زیرحلقه‌ای ازحلقهٔ جابه‌جایی A باشد و $u \in A$. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) u روی R صحیح است؛

(۲) زیرحلقهٔ $R[u]$ از A به عنوان R ـ مدول، با تولید متناهی است؛

(۳) زیرحلقه‌ای چون R' از A وجود دارد به‌طوری‌که $R[u] \subseteq R'$ و R' به‌عنوان R ـ مدول، با تولید متناهی است؛

---

[۱] $Hermite$
[۲] $Lindemann$

(۴) $R[u]$ ـ مدول صادقی وجود دارد که وقتی با تحدید اسکالرها به‌عنوان R ـ مدول در نظر گرفته شود با تولید متناهی است.

برهان. رجوع کنید به [۱۵، قضیه۲۰.۱۳]. ■

تعریف. فرض کنید A یک K ـ جبر باشد. یک نگاشت K ـ خطی $\alpha : A \longrightarrow A$ یک K ـ مشتق روی A نامیده می شود، هرگاه به ازای هر a و b در A ، داشته باشیم: $\alpha(ab) = \alpha(a)b + a\alpha(b)$.
البتّه به جای K ـ مشتق گاه از لفظ مشتق نیز استفاده می‌شود. مجموعهٔ همهٔ K ـ مشتق‌ها روی A به‌صورت $Der_K A$ تعریف می‌شود.

تعریف. فرض کنید M یک A ـ مدول باشد. نگاشت K ـ خطی (همریختی K ـ مدولی) $\delta : A \longrightarrow M$ یک K ـ مشتق از A به داخل M نامیده می‌شود، اگر به‌ازای هر a و b در A ، داشته باشیم: $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. مجموعهٔ همهٔ این مشتق‌ها به‌صورت $Der_K(A, M)$ تعریف می‌شود.
البتّه واضح است که؛ $Der_K(A, A) = Der_K A$.

تعریف و نمادگذاری. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته[۱] (ناتهی) از یک حلقهٔ A و M یک A ـ مدول باشد. آن‌گاه $ass_M S$ و $ass S$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$ass S = \{a \in A \mid as = 0 \quad \text{به‌ازای یک } s \in S\}$$

$$ass_M S = \{m \in M \mid ms = 0 \quad \text{به‌ازای یک } s \in S\}$$

لم ۵.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ ضربی بسته از A باشد و $I = ass_A S$. فرض کنید M یک A ـ مدول باشد و $N = ass_M S$، $\delta \in Der_K(A, M)$. آن‌گاه:

(۱) $\delta(I) \subseteq N$.

[۱] زیرمجموعهٔ S از حلقه A ضربی بسته است اگر (۱) $1 \in S$ و (۲) اگر $s_1, s_2 \in S$ آن‌گاه $s_1 s_2 \in S$