بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید چمران اهواز
دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه آمار

عنوان:

روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته و کاربرد آن در برآورد تابع تولید محصولات مشخص کشاورزی

نگارنده:

مریم اسکندرزاده

استاد راهنما:

دکتر عبدالرحمن راسخ

استاد مشاور:

دکتر سید عزیز آرمن

شهریور ۸۹

چکیدهٔ پایان نامه

نام خانوادگی: اسکندرزاده	نام: مریم

عنوان پایان نامه: روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته و کاربرد آن در برآورد تابع تولید محصولات مشخص کشاورزی
استاد راهنما: دکتر عبدالرحمن راسخ

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: آمار	گرایش: اقتصادی و اجتماعی
محل تحصیل (دانشگاه): شهیدچمران اهواز		دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ التحصیلی:شهریور ۸۹	تعداد صفحه:۱۲۲
کلید واژه ها: اطلاع، آنتروپی، ماکسیمم آنتروپی، ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته، تابع تولید، کشش، محصولات کشاورزی	

چکیده:

روش های گوناگونی برای برخورد و بدست آوردن برآورد پارامترهای مدل خطی مانند روش کمترین مربعات خطا، برآوردگرهای نیرومند و روش های بیزی، مرسوم و متداول هستند. با پیدایش نظریه اطلاع در سال ۱۹۴۸ و تکامل تدریجی آن، این نظریه برای برآورد پارامترهای مدل خطی و اقتصادسنجی از دهه ۱۹۹۰ به بعد بکار گرفته شده است. این نوع برآوردگرها به خاطر سادگی و انعطاف پذیری و قابلیت استفاده از آنها در هر شرایطی که بر مدل خطی حاکم است، مورد توجه قرار گرفته اند. مسائل اقتصادی اغلب دارای شرایط ضعیف هستند یعنی اینکه تعداد پارامترها که باید برآورد شوند بیشتر از تعداد مشاهدات هستند. شرایط ضعیف وقتی رخ می دهند که مقدار اطلاعات نمونه برای برآورد کردن مدل مطلوب غیر کافی باشند به عبارت دیگر وقتی که تعداد پارامترهای مجهول بیشتر از مشاهدات باشند به آن مسئله، مسئله با شرایط ضعیف گفته می شود، یکی از مشکلات مرتبط با برآورد تابع تولید کشاورزی این است که گاهی سطح نهاده های مربوط به یک محصول معین قابل دسترس نیست که خوشبختانه روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته برای حل این گونه مسائل مناسب است. در این پایان نامه برآورد پارامترهای مدل خطی بر پایه نظریه اطلاع که مهم ترین عضو این کلاس از برآوردگرها، برآوردگر ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته است به همراه خاصیت ها و کاربردهایش مورد بررسی قرار می گیرند و در ادامه روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته را برای برآورد تابع تولید محصولات مشخص کشاورزی ایران (برخی استان ها) بیان و فرمول بندی می شود و به عنوان روشی برای برآورد پارامترهای مدل زمانی که مسئله شامل حالات ضعیف است، ارائه می شود.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مقدمه و بیان مسئله

۱.۱

مقدمه..... ۱

۲.۱ بیان مسئله و تاریخچه..... ۲

۳.۱ ساختار پایان نامه..... ۴

فصل دوم: نظریه اطلاع، آنتروپی و ماکسیمم آنتروپی

۱.۲ مقدمه..... ۶

۲.۲ اطلاع چیست؟..... ۷

۳.۲ اطلاع و آنتروپی..... ۸

۴.۲ آنتروپی متغیرهای تصادفی چندگانه (توأم)..... ۱۱

۵.۲ ماکسیمم آنتروپی..... ۱۳

۱.۵.۲ منحصر بفرد بودن جواب اولیه ماکسیمم آنتروپی..... ۱۷

فصل سوم: برآوردگر ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته در مدلهای رگرسیونی

۱.۳ مقدمه..... ۱۹

۲.۳ ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته..... ۲۰

۳.۳ روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته و آنتروپی عرضی تعمیم یافته..... ۲۴

۱.۳.۳ برآورد ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته..... ۲۶

۲.۳.۳ راه حل آنتروپی عرضی تعمیم یافته..... ۲۸

۳.۳.۳ آنتروپی نرمال شده..... ۳۳

۴.۳.۳ تابع آنتروپی دوگان (درستنمایی شامل محدودیت)..... ۳۴

۴.۳ مثالی از کاربرد معیار ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته..... ۳۶

۵.۳ خاصیت های مجانبی برآورد ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته..... ۴۰

۱.۵.۳ سازگاری..... ۴۶

۲.۵.۳ توزیع مجانبی نرمال..... ۴۷

۶.۳ بررسی خاصیت های برآوردگر GME-GCE در نمونه های متناهی..... ۵۰

۱.۶.۳ انتخاب Z، فضای تکیه گاه سیگنال..... ۵۲

۲.۶.۳ انتخاب M و j..... ۵۲

فصل چهارم: جمع آوری داده ها و اطلاعات

۱.۴ مقدمه..... ۵۴

۲.۴ اقتصادسنجی چیست؟..... ۵۵

۳.۴ جمع آوری اطلاعات برای برآورد تابع تولید محصولات کشاورزی..... ۵۷

۱.۳.۴ محصولات..... ۵۷

۲.۳.۴ نیروی کار..... ۵۹

۳.۳.۴ زمین..... ۶۰

۴.۳.۴ کودشیمیایی..... ۶۰

۵.۳.۴ ماشین آلات..... ۶۳

فصل پنجم: کاربرد روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته در برآورد تابع تولید محصولات کشاورزی

۱.۵ مقدمه..... ۷۴

۲.۵ تابع تولید..... ۷۵

۱.۲.۵ تابع کاب–داگلاس..... ۷۶

تابع تولید محصولات مشخص کشاورزی

۳.۵ مشخصات مدل..... ۷۸

۴.۵ روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته در برآورد تابع تولید کشاورزی..... ۸۰

۵.۵ تعیین میزان کشش و سهم نهاده ها در سطح محصولات مشخص کشاورزی..... ۸۴

۱.۵.۵ تعیین میزان کشش..... ۸۵

۲.۵.۵ سهم نهاده ها در سطح هر کدام از محصولات مشخص کشاورزی..... ۸۸

۶.۵ نتیجه گیری و پیشنهادات ۹۲

ضمیمه (الف)..... ۹۴

ضمیمه (ب) ۱۱۱

واژه نامه.....۱۱۵

منابع.....۱۱۹

فصل اول

مقدمه و بیان مسئله

۱.۱ مقدمه

مدل بندی بین دو یا چند متغیر یا پیدا کردن معادله ای که ارتباط بین چند متغیر را بیان کند در تمام شاخه های علوم مهم و اساسی است. به وسیله این مدل بندی یا معادله برازش شده، می توان تغییرات هر کدام از متغیرها نسبت به دیگری را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. پیدا کردن این مدل زمانی میسر است که نمونه ای از آن متغیرها در دست باشد. مدل های بسیاری می توانند رابطه بین این متغیرها را در نمونه مورد نظر اندازه گیری و بیان کنند. از آنجا که اندازه گیری ها با خطا همراه است هیچ معادله ای نمی تواند به طور دقیق رابطه بین متغیرها را بدون خطا بیان کند. حال سوالی که مطرح می شود این است که معادله این رابطه چگونه بدست آورده شود؟ یا به عبارت دیگر چه معیاری برای پیدا کردن این مدل باید به کار بسته شود؟

مدل های خطی که شاخه ای از مدل های رگرسیونی هستند برای حل این مسائل به وجود آمده اند و شامل پارامترهای مجهول هستند که به صورت خطی در مدل ظاهر شده اند.

۲.۱: بیان مسئله و تاریخچه

برای پیدا کردن برآورد پارامترهای مدل خطی کارهای گوناگون و جامعی انجام شده است، که تاریخچه بسیار طولانی دارد. یکی از معیارهای رایج، استفاده از روش کمترین مربعات خطا است. این معیار در شاخه استنباط آماری از مهمترین معیارهای برآورد پارامترها شناخته می شود. معیارهای دیگری نیز بر پایه این معیار یا تکامل دادن این معیار به وجود آمده اند که ارتباط نزدیکی با روش کمترین مربعات خطا دارند.

با پیدایش نظریه اطلاع که شامل معیارهای اندازه گیری عدم قطعیت همچون آنتروپی و معیار ماکسیمم آنتروپی است، استفاده از این روش جدید در شاخه های مختلف علوم طی چند دهه اخیر رونق یافته است.

ارتباط و همبستگی مابین نظریه اطلاع و استنباط آماری و اصول ماکسیمم آنتروپی به وضوح با کارهای قدیمی کولبک و لیبر [۱] (۱۹۵۱) و لیندلی[۲] (۱۹۵۶) شروع شده است. براساس مفاهیم اساسی و خواص نظریه اطلاع، کولبک و لیبر تعدادی از ویژگی های مهم مانند کارایی و بسندگی را که به خوبی در نامساوی کرامر–رائو بیان شده بود تکامل دادند و بدین ترتیب این مفهوم ها یکی شدند. از طرف دیگر لیندلی (۱۹۵۶) تفسیری از یک نمونه آماری ارائه داد که از طریق یک کانال مغشوش (دارای نویز) بررسی می شود و شامل پیغامی (اطلاعاتی) در مورد پارامترهای توزیع مخصوص اولیه است. ارتباط بین نظریه اطلاع و استنباط آماری در ابتدا ممکن است به نظر آید که تنها برای تعداد معدودی از مسائل مخصوص کاربرد دارد اما هم اکنون به وضوح روشن است که این نظریه قابل استفاده در آنالیز و مسائل گوناگون و متنوع علمی است.

مثال هایی از کاربردهای نظریه اطلاع را می توان در موارد زیر بیان کرد:

• کارهایی روی بازسازی تصویر، آنالیز طیفی در پزشکی، فیزیک، شیمی، توپوگرافی، شاخه های مختلف مهندسی، ارتباطات و اطلاعات، تحقیقات اجرایی و علوم سیاسی و اقتصادی (اسکن مغز، توموگرافی، تصاویر ماهواره، جستجوی موتورها، تحلیل های سیاسی و...)

---

۱ Kullbach and leibler
۲ Lindley

• تحقیقاتی در مورد استنباط آماری و برآوردها

• فرایند اطلاعات (نقل و انتقال اطلاعات)

هدف اصلی تحقیقات بر پایه نظریه اطلاع، این است که چگونه توزیع سیستم مورد بررسی زمانی که اطلاعات ناقص یا حاشیه ای از آن سیستم در دست است، تعیین شود. این هدف ممکن است براساس اصطلاحات نظریه تصمیم ارائه شود که در این حالت هدف پیدا کردن بهترین راه برای بازسازی تصویر براساس اطلاعات ناقص به دست آمده از آن تصویر یا سیستم است که در کارهای شانون[۱] (۱۹۴۸) به پیدا کردن بهترین پیغام اشاره شده است.

به عبارت دیگر این گونه می توان بیان کرد که چگونه برآورد محافظه کارانه ای از توابع نامعلوم که به وسیله داده هایی محدود ارائه می شود، پیدا کرد. ماکسیمم آنتروپی کلاسیک طوری طراحی شده است که این حالات را در برگرفته و توزیع احتمالاتی را زمانی که مقادیری از گشتاورها ی توزیع (که تنها اطلاعات قابل دسترس هستند) در اختیار می باشد، برآورد نماید.

اکثر مطالعات در مورد استفاده از نظریه اطلاع در مدل های رگرسیونی و مدلهای خطی مانند اقتصادسنجی از دهه ۱۹۹۰ به بعد شروع شدند. ژانگ و فن[۲] (۲۰۰۱) از روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته برای برآورد مدل اقتصادی تابع تولید کشاورزی محصولات مشخصی در چین استفاده کردند و نشان دادند که این روش از سایر روش ها کاراتر است.گولان و میلر در سال ۲۰۰۶ از این روش برای برآورد مدل اقتصادی (تابع تقاضای گوشت خانوارها) در مکزیک استفاده کردند.

نتیجه مطالعه نظریه اطلاع منجر به کلاسی ازروشهای مختلف مانند:

درستنمایی تجربی[۳](EL)، درستنمایی تجربی تعمیم یافته[۴] (GEL)، برآورد ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته[۵] (GME)، روشهای برآورد گشتاوری[۶] (MEM)، روشهای گشتاوری تعمیم یافته[۷] (GMM) و روشهای گشتاوری بیزی[۸] (BMOM) شده است. همه این روش ها می توانند به عنوان تکنیکی

---

۱ Shannon
۲ Zhang and Fan
۳ Emprical likelihood
٤ Empirical likelihood Generalized
٥ Generalized Maximum Entropy
٦ Moment Estimation Methods
۷ Generilized Method of Moments
۸ Baysian Method of Moments

برای حل مسائلی در نظر گرفته شوند که دارای شرایط ضعیفی برای حل شدن یا به اصطلاح غیر قابل تعیین هستند. هسته اصلی در همه این روش ها معیار آنتروپی و ماکسیمم آنتروپی است که جینس[1] در سال ۱۹۵۷ ارائه نموده است.

مهم ترین عضو از این کلاس برآوردگرها، برآوردگر ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته است که توسط گولان و همکاران[2] در سال ۱۹۹۶ ارائه شده است.

با این تفاسیر ارائه شده معیار جدید برای انتخاب پارامترهای مدل یا به عبارتی دیگر برآورد پارامترهای مدل خطی یا اقتصاد سنجی، استفاده از نظریه اطلاع است. به خاطر سادگی و انعطاف پذیری و قابلیت استفاده از آن در هر شرایطی که بر مدل حاکم است، مطالعه این معیار ضروری و مهم بنظر می آید.

۳.۱ ساختار پایان نامه

با توجه به اهمیت نظریه اطلاع، فصل دوم به بیان نظریه اطلاع و معیارهای اندازه گیری اطلاع همچون آنتروپی و ماکسیمم آنتروپی اختصاص یافته است .در این فصل معیار ماکسیمم آنتروپی که توسط جینس (۱۹۵۷) بیان شده است به تفصیل ارائه می شود.

در فصل سوم نظریه برآورد پارامترهای مدل خطی بر پایه نظریه اطلاع به تفصیل بیان می شود در ادامه روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته برای برآورد مدل های رگرسیونی تعمیم یافته را توضیح می دهیم و روش آنتروپی عرضی تعمیم یافته را برای برآورد چنین مدلهایی به طور کامل توضیح خواهیم داد. در پایان به بررسی خاصیت ها و رفتارهای مجانبی برآوردگر ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته خواهیم پرداخت.

در فصل چهارم به چگونگی جمع آوری داده ها و اطلاعات مورد نیاز برای برآورد تابع تولید محصولات مشخص کشاورزی در ایران (برای برخی استان ها) خواهیم پرداخت.

و در آخر در فصل پنجم به دلیل اهمیت تابع تولید که در علم اقتصاد یکی از موضوعات بسیار مهم است در ابتدا به معرفی تابع تولید و انتخاب فرم تابعی مناسب برای تابع تولید را توضیح

---

[1] Jaynes
[2] Golan et al.

می دهیم در ادامه با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی تعمیم یافته برآورد تابع تولید را برای محصولات مشخص کشاورزی در ایران (برخی از استان ها) به دست می آوریم و در پایان با توجه به نتایج به دست آمده به تحلیل داده ها خواهیم پرداخت.

فصل دوم

نظریه اطلاع: آنتروپی و

ماکسیمم آنتروپی

۱.۲ مقدمه:

در تمامی سطوح جامعه سیستم هایی رایج شده اند که با انتقال، ذخیره سازی و پردازش اطلاعات سروکار دارند. و در واقع در جامعه ای که زندگی می کنیم جامعه اطلاعاتی نامیده می شود. اطلاع در جامعه ما شکل کلیدی به خود گرفته است، بنابراین حیرت انگیز نیست که تمام بخش های مختلف در دانستن این که اطلاعات در حقیقت چیست و در نتیجه در کسب دانش بیشتر در جهت کاربرد اطلاعات، بگونه ای که تا حد امکان موثر باشد، از خود تمایل نشان دهد.

نظریه اطلاع با توجه به مفهوم اطلاع شیوه ای کمی توصیف می شود. به منظور معرفی اندازه ای برای اطلاع، در صدد پاسخ به پرسشهایی چون: چگونه اطلاعات را وقتی در حد امکان فشرده شده اند منتقل و ذخیره کنیم؟ حداکثر مقدار اطلاع که می توان از طریق یک کانال ارسال کرد چقدر است؟ چگونه می توان محافظت را به بهترین نحوترتیب داد؟

در این فصل به دلیل اهمیت این موضوع به بررسی نظریه اطلاع، معیار آنتروپی و ماکسیمم آنتروپی می پردازیم.

۲.۲ اطلاع چیست؟

کلمه اطلاع تعاریف وسیعی دارد. برای مثال در دیکشنری آکسفورد آن را به صورت زیر تعریف می کنند:

• عمل اطلاع دادن: صورت بندی یا قالب گیری آنچه در ذهن داریم(مجسم می کنیم)، آموزش دادن، دستورکار (دستورالعمل).

• آموزش دادن: وسایل ارتباطی یا دهنده دانش.

در دیکشنری وبستر[۱] به:

• وسایل ارتباطی یا وصول دانش یا اطلاعات

• دانش بدست آمده از تحقیق، مطالعه کردن یا آموزش: واقعیت ها، دانسته ها(داده ها)، اخبار.

• خواص ذاتی و مرتبط شده به وسیله یک یا دو یا چند دنباله متناوب یا مرتب شده از چیزی (مانند DNA یا اعداد باینری در یک برنامه کامپیوتر) که عوامل مشخصی تولید می کنند(سیگنال(خطا)، یا خصوصیت داده ها.)

• یک مقدار کمی از ظرفیت برای اطلاع، بویژه: یک کمیت عددی که عدم قطعیت در نتیجه یک آزمایش انجام گرفته شده را، اندازه گیری می کند.(گولان،۲۰۰۸).

با استفاده از این مفاهیم بالا امکان مشخص کردن مفاهیم اصلی برای اطلاع (و مفاهیم مرتبط همچون آنتروپی و عدم قطعیت) توسط دانشمندانی که در این عرصه کار می کنند وجود دارد. گرچه در نگاه اول تفاسیر آنها از این مفاهیم متفاوت بنظر می رسد اما در عمل شبیه به هم هستند.

مفاهیم فوق بیان می کنند که اطلاع در واقع بازتابی از کاهش دادن ابهام درباره یک پدیده است.

در واقع نظریه اطلاع علمی است که با مفهوم اندازه و کاربرد « اطلاع » سروکار دارد. به مفهوم وسیع آن بین سنت های آمریکایی و انگلیسی در نظریه اطلاع می توان وجه تمایزی در نظر گرفت.

---

[۱] Webster

به طور کلی سه نوع اطلاع وجود دارد:

- اطلاع ترکیبی، به علاماتی که پیامها با آنها ساخته می شوند و به رابطه بین آنها وابسته است.
- اطلاع معانی، وابسته به معانی پیامها و جنبه های معرفی آنها می باشد.
- اطلاع عملی، وابسته بکارگیری و اثر پیامهاست.

و در واقع اطلاع ترکیبی اصولا شکل اطلاع را در نظر می گیرد در حالی که اطلاع معانی و عملی وابسته به محتوای اطلاع می باشد.

سنت انگلیسی وابستگی نزدیکی به فلسفه، روان شناسی و بیولوژی دارد و جنبه های مفهومی و عملی اطلاع را در بر می گیرد. سنت آمریکایی با جنبه های ترکیبی اطلاع سروکار دارد. در این روش تجرد کاملی از معانی جنبه های اطلاع وجود دارد. گاهی اوقات سنت آمریکایی در نظریه اطلاع به عنوان نظریه ارتباطات، نظریه اطلاع ریاضی، یا بطور خلاصه نظریه اطلاع در نظر گرفته می شود. شانون با ارائه مقاله اش تحت عنوان نظریه ریاضی ارتباطات در سال ۱۹۴۸ به عنوان موسس سنت آمریکایی در نظریه اطلاع شناخته می شود. با این همه، تعدادی پیشرو نسبت به شانون وجود دارند که کوشیده اند کارایی استفاده از سیستم ارتباطات را فرمول بندی کنند.

نیکویست[۱] درسال ۱۹۲۴ مقاله ای چاپ کرد که در آن چگونگی ارسال پیام ها (یا نوشته ها، بااستفاده از خود کلمات) را توسط یک کانال تلگراف با ماکسیمم سرعت ممکن ولی بدون دگرشکلی فراهم نمود. با وجود این اطلاع هنوز توسط او این چنین استفاده نشده است. هارتلی[۲] (۱۹۵۷) اولین فردی است که کوشید اندازه اطلاع را تعریف کند.

۳.۲ اطلاع و آنتروپی

آنتروپی مقدار متوسط اطلاع است. در بسیاری الفاظ فنی، آنتروپی یک معیار از عدم قطعیت برای یک متغیر تصادفی منفرد است. بطور مشابه، اما در یک زمینه متفاوت، آنتروپی تقریبا میزان سنجش اختلال

---

۱ Nyquist
۲ Hartley

یک سیستم است. آنتروپی یک وسیله برای تجدید کردن احتمالات پیشین (معتقدات) با احتمالات پسین، وقتی اطلاع جدیدی در دسترس باشد، است. اما در واقع همه این تعاریف به یک تعریف منطقی همگرا هستند و آن اینکه، آنتروپی مقدار متوسط اطلاع است.

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک مجموعه متناهی و P تابع احتمال مناسب برای این مجموعه باشد به این معنی که همه مولفه ها غیرمنفی و جمع روی k عضو برابر یک باشد. هارتلی مقدار اطلاع در رابطه با همه مشخصه های عنصرهای این مجموعه گسسته k عنصری را به صورت زیر تعریف کرد:

$$I(A_k) = \log(k) \qquad (۱-۲)$$

به عبارت دیگر فرض کنید که هر نماد یک پیام را بتوان به K طریق انتخاب کرد. اکنون با در نظر گرفتن پیامهای l نمادی می توان K^l پیام متمایز تشخیص داد. هارتلی(۱۹۵۷) مقدار اطلاع را به صورت لگاریتم تعداد پیام های قابل تشخیص تعریف می کند.

$$I(A_{K^l}) = \log K^l = l \log K \qquad (۲-۲)$$

و داریم $I(A_{K^l}) = l\, I(A_K)$. لذا اطلاع هر پیام به طول l، l برابر اطلاع پیامی به طول یک است و حضور موجه لگاریتم در تعریف هارتلی را بیان می کند.

شانون (۱۹۴۸) بر روی فرمول هارتلی در زمینه اطلاعات کار کرد و فرمول هارتلی را به صورت زیر تعمیم داد که آنتروپی نامیده می شود:

$$H(P) = \sum_{k=1}^{K} p_k \log \frac{1}{p_k} = -\sum_{k=1}^{K} p_k \log_2 p_k = E\left[\log_2 \left(\frac{1}{p(x)}\right)\right] \qquad (۲-۳)$$

(اگر $x \to 0$ آنگاه $x\log x \to 0$).

این معیار، عدم قطعیت یا میزان اطلاعی که فضای احتمالاتی P ایجاد می کند را می سنجد. رابطه (۲-۳) ماکسیمم مقدار خود را به ازای $P_1 = P_2 = \cdots = P_K = \frac{1}{K}$ اختیار می کند که در این حالت با فرمول هارتلی یکسان می شود و مقدار مینیمم خود را هنگامی که مجموعه فقط شامل یک عنصر باشد، می گیرد. نکته ای که در اینجا لازم به ذکر است این است که $H(P)$ تنها تابعی از توزیع احتمالاتی P است . به عنوان مثال اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر متمایز $x_1, x_2, \dots, x_k$ و با احتمالهای متمایز $p_1, p_2, \dots, p_k$ باشد آنگاه آنتروپی $H(P)$ به مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_k$ بستگی ندارد.

اگر $I(X)$ را مقدار اطلاع اعضای مجموعه تعریف کنیم آنگاه آن متغیر تصادفی با فضای نمونه ای $\{I(p_1), I(p_2), \dots, I(p_k)\}$ خواهد شد و میانگین $I(X)$ همان آنتروپی خواهد شد. بنابراین:

$$H(X) = E\big(I(X)\big) = -\sum_{k=1}^{K} p_k \log p_k \qquad (۲-۴)$$

لازم به توضیح است که $H(P)$ را با $H(X)$ نیز نمایش می دهند.

$H(X)$ زمانی که X گسسته باشد دارای خاصیت های زیر است:

۱) $H(X) \geq 0$ و $H(X) = 0$ اگر و فقط اگر توزیع تباهیده باشد.

۲) $H(X) \leq \log M$ تساوی برقرار است اگر و فقط اگرX دارای توزیع یکنواخت گسسته باشد.

۳) $H(X)$ برحسب P متقارن است.

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $p(x)$ باشد در این صورت دیفرانسیل آنتروپی متغیر تصادفی پیوسته X برابر است با:

$$H(X) = -\int p(x) \log p(x)\, dx \qquad (۲-۵)$$

بطوریکه دیفرانسیل آنتروپی همه خاصیت های آنتروپی گسسته در رابطه (۲-۳) را ندارد. به عنوان مثال اگر X دارای توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $[a,b]$ باشد، آنگاه $H(X)$ برابر $\log(b-a)$ خواهد شد که با انتخاب مقادیر مناسب a,b، اگر $b-a<1$ آنگاه $H(X)<0$ خواهد شد.(گولان،۱۹۹۶).

۴.۲ آنتروپی متغیرهای تصادفی چندگانه(توأم)

در این بخش آنتروپی را برای بیش از یک متغیر بیان می کنیم. فرض کنید X,Y دو متغیر تصادفی گسسته بترتیب، با مقادیر متمایز $x_1,x_2,\dots,x_K$ و $y_1,y_2,\dots,y_J$ و با احتمالهای متناظر $p_1,p_2,\dots,p_k$ و $q_1,q_2,\dots,q_J$ **باشند**. و همچنین، $P(X=x_k,Y=y_j)=P_{kj}$ احتمال توام X,Y است. $P(X|Y)=P(X=x_k|Y=y_j)=P_{(k|j)}$ و $P(Y|X)=P(Y=y_j|X=x_k)=P_{(j|k)}$ احتمالات شرطی باشند. آنگاه اندازه اطلاع توام یا آنتروپی توام X,Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(X,Y)=H(Y,X)=-\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}p_{kj}\log p_{kj} \qquad (۶-۲)$$

اگر X,Y مستقل باشند آنگاه:

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y) \qquad (۷-۲)$$

اندازه اطلاع شرطی نسبت به آزمایش Y به شرط X برابر است با:

$$H_X(Y)=H(Y|X)=-\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}P(X=x_k,Y=y_j)\log P(Y=y_j|X=x_k) \qquad (۸-۲)$$