تأسیس ۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

رساله دوره دکتری مهندسی برق– مخابرات سیستم

طراحی و تحلیل کدهای LDPC مبتنی بر فرابری گراف برای کانال‌های بی سیم

رضا اسودی

استاد راهنما:

دکتر محمود احمدیان عطاری

استاد مشاور:

دکتر امیر حسین بنی هاشمی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر ، مادر و همسر عزیزم

تأییدیّه هیات داوران

اعضای هیئت داوران، نسخه نهائیپایان نامه آقای:**رضا اسودی**

را با عنوان:**طراحی و تحلیل کدهایLDPC مبتنی بر فرابری گراف برای کانال‌های بی‌سیم**

از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آن را برای تکمیل درجه دکتریتأییدمی‌کند.

اعضای هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	محمود احمدیان عطاری	دانشیار	
۲- استاد مشاور	امیر حسین بنی‌هاشمی	استاد	
۳- استاد ممتحن	محمد رضا عارف	استاد	
۴- استاد ممتحن	معصومه نصیری کناری	استاد	
۵- استاد ممتحن	کمال محامدپور	استاد	
۶- استاد ممتحن	علیرضامقدم فر	دانشیار	
۷- نماینده تحصیلات تکمیلی	علی خاکی صدیق	استاد	

اظهار نامه دانشجو

اینجانب **رضا اسودی** دانشجوی دکتری مهندسی برق گرایش مخابرات سیستم دانشکده **مهندسی برق و کامپیوتر** دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می نمایم که تحقیقات ارائه شده در پایان نامه با عنوان **طراحی و تحلیل کدهای LDPC مبتنی بر فرابری گراف برای کانال‌های بی‌سیم** با راهنمایی استاد محترم جناب آقای**دکتر محمود احمدیان عطاری**، توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگاشته شده در این پایان نامه مورد تأیید می‌باشد، و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است.

بعلاوه گواهی می‌نماید که مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان نامه چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را بطورکامل رعایت کرده ام.

امضاء دانشجو

تاریخ:

حق چاپ و تکثیر و مالکیت نتایج

۱- حق چاپ و تکثیر این پایان نامه متعلق به نویسنده آن می باشد. هرگونه کپی برداری بصورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده **مهندسی برق و کامپیوتر** دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می باشد.

ضمناً متن این صفحه نیز باید در نسخه تکثیر شده وجود داشته باشد.

۲-کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مراجع مجاز نمی‌باشد.

تشکر و قدردانی

در ابتدای سخن جا دارد از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر احمدیان نهایت تشکر و قدردانی خود را به عمل آورم. چرا که ایشان با نهایت متانت شرایط اینجانب را برای ادامه تحصیل در دوره دکتری پذیرفته و با علم و ادب خود به من درس های فراوانی آموختند. یقینا بدون زحمات ایشان به انجام چنین کاری موفق نمی‌شدم. در کنار ایشان، وجود گوهربار جناب دکتر بنی‌هاشمی نعمت بسیار بزرگی بود تا من بتوانم با دنیای تحقیقات سطح بالا آشنا شوم. بی‌اغراق بدون حضور ایشان این پایان نامه، به نتایج کنونی خود نمی‌رسید و من، بخش عمده دوره پژوهشی خود را مرهون بحث های علمی می‌دانم که با ایشان داشتم. امیدوارم که شاگرد لایقی برای ایشان و ادامه دهنده راه آن بزرگوار باشم.

هم چنین، افتخار دارم از استاد عزیزم جناب پروفسور عارف که در طول تحصیلات تکمیلی خود، در تمام کلاس‌های درس ایشان حضور داشته‌ام یاد کنم. به حق، پایه های علم تئوری اطلاعات اینجانب با حضور در کلاس‌های درس ایشان شکل گرفت، و هرگز کوشش‌های این بزرگوار را فراموش نخواهم کرد.

انسان‌های شایسته دیگری نیز، در این برهه سخت مرا همراهی کردند. بدون همراهی همسر عزیزم و پدر و مادر فداکارم، انجام تحقیقات دکتری برای من مقدور نبود. هم چنین، دوستان عزیزم در شرکت نصیر سیستم که حمایت‌های مالی ایشان در کل دوره دکتری در کنار حمایت‌های روحی، زمینه کاملا مناسبی برای پژوهش اینجانب فراهم آورد. از این رو، بر خود واجب می‌دانم از جناب مهندس مهدی خورشا، دکتر سید آرش احمدی، مهندس احمد صفایی عرشی و محمد شهاب طاهری نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم. همین طور، دین بزرگی از جانب اساتید محترم دانشکده ریاضی جناب آقایان دکتر مقدم فر و دکتر حقیقی بر گردن دارم. این عزیزان نظریه گراف و گراف‌های جبری را با سعه صدرتمام و بی‌هیچ چشم‌داشتی به من آموختند تا در رساله خود به کار گیرم. تلاش بی‌منت این بزرگواران در شکل‌گیری روحیه علمی اینجانب، هرگز فراموش شدنی نخواهد بود.

چکیده

در این رساله به کدهایLDPC با ساختار پروتوگرافی و کاربردهای کدهایLDPC در کانال‌های بی‌سیم و کدگذاری با نرخ وفقی می‌پردازیم. در سال های اخیر نشان داده شده است که ساختارهای پروتوگرافی، نه تنها قابلیت رسیدن به ظرفیت شانون را دارند بلکه از ویژگی پیاده‌سازی راحت‌تری نیز برخوردارند. یکی از مشکلات مطرح در طراحی کدهایLDPC به ویژه کدهای با ساختار پروتوگرافی، مساله کاهش کف خطای این کدها می باشد. برای همین، راهکاری برای کاهش کف خطای کدهایLDPC با حذف دورهای تشکیل دهنده مجموعه‌های گیرانداز ارائه می‌کنیم. برای این کار از فرابری دوری گراف پایه به نحوی استفاده می‌کنیم که دورهای مشکل ساز را در گراف پایه به دورهایی با طول بلندتر تبدیل کنیم. سپس، این روش را برای کدهای نامنظمی که مجموعه‌های گیرانداز آن‌ها در دسترس نمی‌باشد گسترش داده و به طراحی کدهایی با طول محدود مناسب که در هر دو ناحیه آبشاری و کف خطا به خوبی کار می‌کنند می‌پردازیم. در گام بعدی، کاربرد کدهایLDPC در کانال‌های بی‌سیم به ویژه حالتی که تخمین درستی از کانال نداریم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این حالت تقریب لگاریتم نسبت درست‌نمایی (LLR) کانال را بر مبنای سری تیلور مورد مطالعه قرار داده و نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی در عین سادگی بسیار کارامد است. در نهایت برای کاربردهای بی‌سیم، طرح‌های متنوع غربال‌گری کدهایLDPC را برای طول‌های محدود مورد مطالعه قرار داده و طرح پیشنهادی که قادر است به صورت کارامد در هر دو ناحیه آبشاری و کف خطا کار کند ارائه می‌کنیم.

کلید واژه:کدهایLDPC، فرابری گراف، پروتوگراف، تقریب LLR، کدگذاری سازگار با نرخ، کدهای LDPC غربال شده.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها ..... د
فهرست شکل‌ها ..... ه
فهرست علایم و نشانه‌ها ..... ز

فصل ۱- مقدمه ۱
۱-۱- زمینه تاریخی ۱
۱-۲- انگیزه و پشتوانه مساله ۶
۱-۳- نوآوری های رساله ۱۰
۱-۴- آرایش رساله ۱۰

فصل ۲- پیش نیازهای رساله ۱۲
۲-۱- کدهای LDPC و مفاهیمی از تئوری گراف ۱۲
۲-۲- فرابری گراف ۱۶
۲-۳- کانال‌های مخابراتی ۲۰
۲-۴- الگوریتم‌های کدبرداری کدهای LDPC ۲۱
۲-۴-۱ کدبردارهای انتقال پیام ۲۲
۲-۴-۲ کدبردار برنامه ریزی خطی (LP) ۲۵
۲-۵- شکست کدبردار ۲۷
۲-۵-۱ مجموعه های گیرانداز برای کدبردارهای تکراری ۲۷
۲-۵-۲ شبه کلمات کد ۲۸
۲-۶- الگوریتم تکامل چگالی ۳۰
۲-۶-۱ الگوریتم تکامل چگالی برای کانال های BI-AWGN ۳۱
۲-۷- نتیجه گیری ۳۵

فصل ۳- کاهش کف خطای کدهای LDPC با استفاده از فرابری دوری ۳۶
۳-۱- مقدمه ۳۶
۳-۲- کف خطای کدهای LDPC و روش های کاهش آن ۳۶
۳-۳- مجموعه های گیرانداز و کف خطای کد در BSC ۴۰
۳-۴- طراحی فرابری دوری جهت حذف مجموعه های گیرانداز ۴۲
۳-۴-۱- فرابری دوری دورها ۴۲
۳-۴-۲- الگوریتم تعویض یال معین (DES) ۴۴

۳-۴-۳- حداقل فاصله و نرخ کدهای فرابری دوری شده ۴۷
۳-۵- نتایج شبیه سازی ۵۰
۳-۶- نتیجه گیری ۵۸
فصل ۴- طراحی کدهای نامنظم شبه دوری پروتوگرافی با کف خطای پایین ۶۰
۴-۱- مقدمه ۶۰
۴-۲- کدهای LDPC طول محدود با ساختار شبه تصادفی ۶۳
۴-۲-۱- طراحی کدهای LDPC با ساختار رشد یالی پیش رونده ۶۳
۴-۲-۲- طراحی کدهای LDPC با مشخصه ACE محدود شده ۶۵
۴-۳- فرابری دوری با ACE محدود شده ۶۷
۴-۳-۱- تصویر دورهای فرابری دوری ۶۷
۴-۳-۲- ساختار گشت های TBC در گراف پایه ۷۰
۴-۳-۳- الگوریتم تعویض یال دوری با ACE محدود شده ۷۱
۴-۴- نتایج شبیه سازی ۷۵
۴-۵- نتیجه‌گیری ۸۰
فصل ۵- تقریب لگاریتم نسبت درست‌نمایی (LLR) در کانال‌های بی‌سیم بر مبنای بسط تیلور و کاربرد آنها در BICM همراه با کدهای LDPC ۸۱
۵-۱- مقدمه ۸۱
۵-۲- مدل کانال، طرح BICM کد شده با LDPC ۸۵
۵-۲-۱- مدل کانال، BICM و تقریب های LLR ۸۵
۵-۲-۲- کدگذاری LDPC ۸۹
۵-۳- تقریب LLR بر مبنای سری های تیلور ۹۰
۵-۳-۱- مروری خلاصه بر سری های تیلور ۹۰
۵-۳-۲- تقریب های LLR ۹۱
۵-۴- نتایج عددی و بحث ۱۰۰
۵-۴-۱- مدولاسیون BPSK ۱۰۰
۵-۴-۲- مدولاسیون 8-PAM ۱۰۳
۵-۴-۳- مدولاسیون 16-QAM ۱۰۴
۵-۵- نتیجه گیری ۱۰۶
فصل ۶- طرح غربال‌گری سازگار با نرخ کارا برای کدهای LDPC با طول محدود همراه با کف خطای پایین ۱۰۸
۶-۱- مقدمه ۱۰۸
۶-۲- الگوریتم غربال‌گری پیشنهادی ۱۱۱

۶-۲-۱- مفاهیمی از غربال‌گری کدهای LDPC با طول محدود ۱۱۱
۶-۲-۲- روش پیشنهادی ۱۱۴
۶-۳- نتایج شبیه سازی ها ۱۲۰
۶-۳-۱- غربال‌گری کد LDPC (۳،۶)- منظم با طول ۱۰۲۴ ۱۲۱
۶-۳-۲- غربال‌گری کد LDPC نامنظم با نرخ ۰/۵ و طول ۱۰۲۴ ۱۲۴
۶-۴- نتیجه گیری ۱۲۷
فصل ۷- نتیجه گیری و پیشنهادها ۱۲۹
۷-۱- نتیجه گیری ۱۲۹
۷-۲- پیشنهادها ۱۳۲
لیست مقالات ارائه شده ۱۳۴
فهرست مراجع ۱۳۶

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

جدول ۳-۱: مجموعه‌های گیرانداز غالب کد (۱۰۰، ۲۰۰) نامنظم، ۱۳-فرابری تصادفی و ۱۳-فرابری DES آن ۵۵
جدول ۴-۱: طیف ACE فرابری دوری برای درجات مختلف برای کد پایه (۱۵، ۳۰) مثال ۴-۳.....۷۶
جدول ۴-۲: طیف ACE فرابری دوری برای درجات مختلف برای پروتوگراف بحث شده در مثال ۴-۴.. ۷۹
جدول ۵-۱: ضرایب چندجمله‌ای‌های تیلور برای تقریب‌های 8-PAM LLR ۹۷
جدول ۵-۲: آستانه مجموعه کد LDPC $\lambda_1(x) = x^2, \rho_1(x) = x^5$ با استفاده از انتشار باور در تقریب-های LLR مختلف. ۱۰۱
جدول ۵-۳: آستانه مجموعه کد LDPC $\lambda_2(x) = x^3, \rho_2(x) = x^{15}$ با استفاده از انتشار باور در تقریب های LLR مختلف. ۱۰۱
جدول ۵-۴: کدهایLDPC طراحی شده برای کانال محوشدگی رایلی تخت ناهمبسته با CSI نامعلوم بر پایه تقریب (۵-۱۷). کد ۱ و ۲ به ترتیب برای نرخ و آستانه کدبرداری بهینه شده‌اند. ۱۰۳
جدول ۶-۱: کلاس‌بندی گره‌های غربال شده کد مادر منظم بر مبنای انتخابشان بر حسب پارامترهای مختلف به کار رفته در الگوریتم ۶-۱ (مثال بخش ۶-۳-۱) ۱۲۱
جدول ۶-۲: کلاس‌بندی گره‌های غربال شده کد مادر نامنظم بر مبنای انتخابشان بر حسب پارامترهای مختلف به کار رفته در الگوریتم ۶-۱ (مثال بخش ۶-۳-۲) ۱۲۵

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۲-۱ : نمایشی از گراف تنر کد (۲-۱) ۱۵
شکل ۲-۲الف : نمونه ای از گراف پایه (پروتوگراف) ۱۸
شکل ۲-۲ب : گراف پایه سه بار کپی شده ۱۸
شکل ۲-۲ج : گراف مشتق با جایگشت یالی ۱۸
شکل ۳-۱ : (الف) مجموعه گیرانداز (۵،۳) (ب) مجموعه گیرانداز (۴،۲) (ج) مجموعه گیرانداز (۴،۴). ۴۱
شکل ۳-۲: مقایسه عملکرد FER کد تنر و فرابری های آن در BSC ۵۱
شکل ۳-۳: مقایسه عملکرد FER کدهای تنر (۳۰۵،۱۲۴) و (۳۳۴، ۷۵۵) و DES ۲- و ۵- فرابری های تنر (۶۴، ۱۵۵) در BSC ۵۳
شکل ۳-۴: مقایسه عملکرد FER کد منظم (۵۰۴،۲۵۲) مک کی و فرابری‌هایش در BSC ۵۴
شکل ۳-۵: مقایسه عملکرد FER کد (۲۰۰،۱۰۰) نامنظم، ۱۳-فرابری تصادفی، ۱۳-فرابری دوری حاصل از DES، و یک کد نامنظم (۲۶۰۰،۱۳۰۰) با همان توزیع درجات در BSC. ۵۶
شکل ۳-۶: مقایسه عملکرد FER کد تنر (۶۴، ۱۵۵)، ۵-فرابری دوری حاصل از DES، ۵- فرابری دوری تصادفی آن و یک کد (۳۱۰، ۷۷۵) تصادفی با همان توزیع درجه در کانال BI-AWGN. ۵۷
شکل ۳-۷: مقایسه عملکرد FER کد منظم (۲۵۲، ۵۰۴)، ۶-فرابری دوری حاصل از DES، ۶- فرابری دوری تصادفی آن و یک کد (۱۵۱۲، ۳۰۲۴) تصادفی با همان توزیع درجه در کانال BI-AWGN. ۵۸
شکل ۴-۱: درخت محاسباتی بسط داده شده تا لایه ℓ-ام بدست آمده از گره متغیر v_r ۶۴
شکل ۴-۲: یک گراف تنر پایه ساده ۷۰
شکل ۴-۳: عملکرد BER/FER کدهای LDPC طراحی شده در مثال ۴-۳. ..... ۷۷
شکل ۴-۴: پروتوگراف‌های سازگار با نرخ برای نرخهای $\frac{1}{2}$، $\frac{5}{8}$ ، $\frac{3}{4}$، و $\frac{7}{8}$ بکار رفته در مثال ۴-۴. ..... ۷۸
شکل ۴-۵: عملکرد BER/FER کدهای LDPC سازگار با نرخ طراحی شده در مثال ۴-۴، و طراحی شده در [۱۱]. ۷۹
شکل ۵-۱: بلوک دیاگرام یک طرح BICM کد شده با LDPC ۸۶
شکل ۵-۲: منظومه های 8-PAM و 16-QAM که با روش گری برچسب‌گذاری شده‌اند. ۹۰
شکل ۵-۳: مقایسه مقادیر LLR واقعی و تقریب‌های بدست آمده از سری‌های تیلور برای کانال محوشدگی رایلی تخت ناهمبسته با CSI نامعلوم و $\sigma = 0.6449$. ۹۴
شکل ۵-۴: مقادیر واقعی LLR $l^{(1)}$، $l^{(2)}$، و $l^{(3)}$ به عنوان تابعی از خروجی کانال y برای 8-PAM در SNR=7.91 dB، در کنار تقریب‌های تیلور (تکه‌ای) متناظرشان. ۹۶
شکل ۵-۵: کانتورهای مقادیر LLR بیت‌های واقعی $l^{(1)}$ و $l^{(2)}$ ثابت در صفحه (y_r, y_i). ۹۸

شکل ۵-۶: کارایی BER طرح‌های BICM با 8-PAM و 16-QAM ترکیب شده با کد LDPC (۳،۴)-منظم به طول ۱۲۰۰۰ بر حسب تقریب‌های مختلف LLR. ۱۰۵
شکل ۶-۱: مثالی از ساختار درخت بازیابی گره چک داده شده ۱۱۲
شکل ۶-۲: فرایند هرس کردن که بر روی درخت بازیابی شکل (۶-۱) در دو مرحله اجرا شده است. ۱۱۴
شکل ۶-۳: کارایی FER روش‌های متنوع غربال‌گری کدLDPC (۳،۶)-منظم با طول ۱۰۲۴ در نرخ‌های ۰/۶، ۰/۷، و ۰/۸. ۱۲۳
شکل ۶-۴: کارایی BER روش‌های متنوع غربال‌گری کدLDPC (۳،۶)-منظم با طول ۱۰۲۴ در نرخ‌های ۰/۶، ۰/۷، و ۰/۸. ۱۲۴
شکل ۶-۵: کارایی FER روش‌های متنوع غربال‌گری کدLDPC نامنظم با طول ۱۰۲۴ در نرخ‌های ۰/۶، ۰/۷، ۰/۸، و ۰/۹. ۱۲۶
شکل ۶-۶: کارایی BER روش های متنوع غربال‌گری کدLDPC نامنظم با طول ۱۰۲۴ در نرخ‌های ۰/۶، ۰/۷، ۰/۸، و ۰/۹. ۱۲۷

فهرست علایم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری
Approximate Cycle Extrinsic Message Degree	ACE
Additive White Gaussian Noise	AWGN
Bose-Chadhuri-Hocqengham	BCH
Binary Erasure Channel	BEC
Bit Error Rate	BER
Binary Input-Additive White Gaussian Noise	BI-AWGN
Belief Propagation	BP
Binary Phase Shift Keying	BPSK
Binary Symmetric Channel	BSC
Deterministic Edge Swapping	DES
Frame Error Rate	FER
Hybrid Automatic Repeat Request	HARQ
Low-Density Parity-Check	LDPC
Log Likelihood Ratio	LLR
Linear Programming	LP
Maximum A posterior Probability	MAP
Maximum Likelihood	ML
Minimum Mean Square Error	MMSE
Min Sum	MS
Probability Density Function	PDF
Progressive Edge Growth	PEG
Signal to Noise Ratio	SNR
Step Recovery	SR
Tailless Backtrackless Closed	TBC
Trapping Set	TS

فصل ۱– مقدمه

۱–۱– زمینه تاریخی

همانند تمامی رساله‌های تئوری اطلاعاتی، کارمان را با زمینه‌ای تاریخی از کار شانون در نظریه اطلاعات و کدگذاری[1] که در سال ۱۹۴۸ چاپ شده شروع می کنیم [۱]. شانون اثبات کرد که هر کانال مخابراتی ظرفیت متناظری دارد، که مخابرات قابل اعتمادی در نرخ‌های تا ظرفیت کانال می-تواند برقرار باشد و برای نرخ‌های بالاتر از ظرفیت، احتمال خطای بیت الزاما از صفر دور خواهد شد. به ویژه اثبات کرد که برای نرخ‌های زیر ظرفیت، کدگذاری کانالی وجود دارد که به همراه الگوریتم کدبرداری متناظرش می‌تواند احتمال خطای بیت کانال را به اندازه دلخواه پایین آورد. شانون، هیچ گونه ساختار مشخصی برای این کدها ارائه نکرد و از این رو تلاش برای ساختن چنین کدهایی موجب به وجود آمدن نظریه کدگذاری شد.

توسعه اولیه نظریه کدگذاری بیشتر معطوف به کدهای جبری بود. در این زمینه، کد همینگ[2][۲] اولین کدی بود که قادر به تصحیح یک خطا بود. کار کدگذاری کانال توسط بوز-چادهوری-هوکوِنگام[3](BCH) [۳]، [۴] گسترش داده شد تا قادر به تصحیح چندین خطا باشد. رید و سالومون[4] [۵] سپس دسته دیگری از کدهای BCH را پیشنهاد دادند که قابلیت‌های بیشتری نسبت به کدهای قبلی داشتند. روش‌های کارامد زیادی برای کدگذاری و کد برداری این دسته از کدها پیشنهاد شده است.

[1] Coding
[2] Hamming
[3] Bose-Chadhuri-Hocqengham (BCH)
[4] Reed and Solomon

کدهای جبری زمانی که سودان[1] [۶] روش کدبرداری لیستی[2] را ارائه داد دوباره در مرکز توجه قرار گرفت. این روش اجازه می‌دهد که کدهای جبری به صورت تصمیم گیری نرم[3] نیز کدبرداری شوند. کدهایی که تاکنون معرفی شده‌اند قابلیت کار کردن برروی قالبی از داده‌های ورودی را دارند، که این امر موجب نام‌گذاری این کدها به کدهای قالبی[4] می باشد. دسته دیگری از کدها که بسیار مورد توجه قرار گرفت ساختارهایی هستند که بر روی جریان پیوسته‌ای از بیت‌ها کار می‌کنند و توسط رجیسترهای انتقال مکانی[5] ایجاد می‌شوند. این دسته از کدها به کدهای کانولوشنی[6] معروف شده‌اند و الگوریتم کدبرداری ارائه شده توسط ویتربی[7][۷] برای این دسته از کدها، قابلیت کدبرداری بیشترین درست‌نمایی[8](ML) را داراست. اگرچه هر دو دسته کدهای معرفی شده قابلیت‌های زیادی در عمل دارند ولی هیچ‌کدام از آن‌ها به همراه الگوریتم‌های کدبرداری با پیچیدگی پایین، قادر به رسیدن به محدوده ظرفیت کانال نمی‌باشند.

تلاش برای دستیابی به کدهای نائل به ظرفیت[9] موجب ظهور کدهای توربو[10][۸] با استفاده از کدهای کانولوشنی شد. البته گالاگر[11]سه دهه پیشتر در رساله دکترایشکدهای قالبی با ماتریس بررسی توازن تنک[12](LDPC)را معرفی کرده بود که قابلیت دستیابی به ظرفیت کانال را داشتند [۹]. کدهایی که گالاگردر رساله‌اش به آن‌ها پرداخته بود متاسفانه به مدت سه دهه به فراموشی سپرده شدند تا اینکه دوباره توسط تنر[13] مورد مطالعه قرار گرفتند [۱۰]. البته بررسی اینبار کدها از دیدگاه وسیع‌تری تحت عنوان کدهای مبتنی بر گراف[14] صورت گرفت. مک‌کی[15] کدهایLDPC را دوباره

[1]Sudan
[2]List Decoding
[3]Soft-decision
[4]Block codes
[5]Shift registers
[6]Convolutional
[7] Viterbi
[8] Maximum-likelihood (ML)
[9]Capacity achieving
[10]Turbo code
[11]Gallager
[12]Low-density parity-check (LDPC)
[13]Tanner
[14]Graph based code
[15]MacKay

کشف و اثبات کرد که کد LDPC ای وجود دارد که به همراه الگوریتم جمع-ضرب[۱] قادر است به ظرفیت کانال برسد [۱۱].

اهمیت والای کدهایLDPC در کارایی این دسته از کدها در دستیابی به ظرفیت کانال در کنار استفاده از الگوریتم‌های کدبرداری شبه بهینه[۲] با پیچیدگی پایین است. یک دسته از این کدبردارها الگوریتم‌های کدبرداری تکراری[۳] نامیده می‌شوند. این الگوریتم‌ها شامل الگوریتم‌های انتقال پیام[۴] (نظیر حالت‌های متنوع الگوریتم انتشار باور[۵]و الگوریتم‌های گالاگر) هستند. دسته دیگری از الگوریتم‌های کدبرداری برای کدهای LDPC الگوریتم‌های معکوس‌کردن وضع بیت[۶] (به صورت موازی و پشت سرهم[۷]) می‌باشد که حالت‌های اصلاح شده بسیاری برای آن پیشنهاد شده است.

ریچاردسون-اوربانکه[۸] توانستند با توسعه کار اساسی گالاگر به مجموعه‌ای از کدها[۹]، کدهای LDPC را به همراه کدبردارهای انتقال پیام تحلیل کرده و نشان دهند که چنانچه نویز کانال پایین‌تر از آستانه محدودی باشد، احتمال خطای بیت کانال به صورت مجانبی به صفر میل می‌کند [۱۲]. آنها، روش تکامل چگالی[۱۰] را برای محاسبه آستانه و کم‌ترین میزان نرخ سیگنال به نویز (SNR) کانال برای تحلیل رفتار مجموعه کدهایLDPC در کانال‌های مختلف مخابراتی به‌همراه کدبردارهای انتقال پیام پیشنهاد دادند. ریچاردسون، شکراللهی و اوربانکه از تکامل چگالی برای بهینه سازی کدها، به ویژه برای دستیابی به توزیع‌های درجه‌ای[۱۱] که نائل به ظرفیت می‌باشند بهره بردند [۱۳]. همین‌طور بازی[۱۲]، ریچادسون و اوربانکه آستانه دقیقی را برای کانال باینری متقارن[۱۳](BSC) با کدبردار گالاگرA[۱۴] استخراج کردند [۱۴].

---

[1] Sum-product
[2]Sub-optimal
[3]Iterative
[4]Message passing
[5]Belief propagation
[6] Bit flipping
[7] Serial
[8] Richardson-Urbanke
[9]Ensemble of codes
[10]Density evolution
[11]Degree distribution
[12]Bazzi
[13]Binary symmetric channel (BSC)
[14]Gallager A

زیابلف و پینسکر[1] نخستین افرادی بودند که کدهای LDPC را با کدبردارهای معکوس‌کردن وضع بیت مورد بررسی قرار دادند [۱۵]. بعد از آن‌ها سیپسر و اسپیلمن[2] الگوریتم‌های معکوس‌کردن وضع بیت را به کمک پارامترهای گسترش گراف[3] مورد تحلیل قرار دادند [۱۶]. آن‌ها همین‌طور دسته وسیعی از کدهای مجانبی نائل به ظرفیت را که به نام کدهای گسترش دهنده[4] است معرفی کردند.

آنچه که تا حال مطرح شد بیشتر به تحلیل کدهای LDPC در حالت‌های مجانبی می‌پردازد ولی در عمل، کارکرد کد تفاوت زیادی با حالت‌های مجانبی دارد. اکثراً به خاطر محدودیت تاخیر در سرویس‌های مخابراتی و پیچیدگی سخت‌افزاری ابزارها، طول کدهایی که مورد استفاده قرار می‌گیرند در محدوده چند صد تا چند هزار بیت می‌باشند که این با طول‌های مجانبی کد فاصله بسیاری دارد.

برای ساختن کدهایLDPC در طول‌های محدود روش‌های متعددی پیشنهاد شده است. ما روش‌های موجود را به سه دسته عمده زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم.

۱. ساختارهای تصادفی[5] که عموماً در طول‌های محدود با کمک روش‌های کامپیوتری، سعی در بهینه سازی پارامترهای کد می شود.
۲. ساختارهای یقینی[6] که عموماً از روش‌های جبری برای طراحی ماتریس بررسی توازن کد استفاده می شود.
۳. ساختار پروتوگرافی[7] که می‌توان آن را تلفیقی از روش‌های بالا دانست.

همان‌طور که قبلا نیز اشاره شد با کمک روش‌های تحلیلی می‌توان ساختارهای تصادفی از ماتریس بررسی توازن پیشنهاد داد که ویژگی‌های مجانبی بسیار خوبی داشته باشد. در کنار این ویژگی‌های مجانبی با در نظر گرفتن محدودیت‌های طول کد، در عمل می‌توان الگوریتم‌های مناسبی را با کمک کامپیوتر طراحی نمود. اگرچه نشان داده شده است که روش طراحی کد بدین طریق قابلیت نزدیک شدن زیادی به ظرفیت کانال را داراست، ولی به دلیل وجود اجزایی در ساختار گرافی

[1] Zyablov and Pinsker
[2] Sypser and Spielman
[3] Graph expansion
[4] Expander codes
[5] Random
[6] Determinstic
[7] Protograph

کد که آن‌ها را مجموعه‌های توقف‌ساز[۱] و گیرانداز[۲] می‌نامیم دچار پدیده کف خطا[۳] در منحنی نرخ خطای بیت[۴] (فریم) در کانال‌های مخابراتی می‌شویم. از طرف دیگر به خاطر آن‌که ماتریس بررسی توازن این کدها تصادفی هستند پیچیدگی کدکننده بالا رفته و نیازمند حافظه بالاتری در کدکننده می‌باشد.

اگرچه ساختارهای جبری، دارای ماتریس بررسی توازن با کف خطای پایین در کدبردار نسبت به روش‌های تصادفی می‌باشد و می‌توان کدکننده‌هایی با پیچیدگی پایین برای آن‌ها طراحی نمود، از دیدگاه عملکرد در ناحیه آبشاری[۵]این کدها از کدهای تصادفی عملکرد ضعیف‌تری دارند.

به نسبت روش‌های قبلی ساختارهای مبتنی بر پروتوگراف‌ها از قدمت کمتری برخورداراست. اگرچه تنر در [۱۰] برای نخستین بار ایده پروتوگراف‌ها را مطرح نمود ولی ثورپ[۶]اولین کسی بود که از این ایده برای طراحی کدهای نائل به ظرفیت در کانال نویز گوسی سفید جمع شونده[۷] (AWGN) استفاده کرد [۱۷]. ایده اساسی این روش استفاده از گراف کوچکی به عنوان گراف پایه یا پروتوگراف و گسترش آن به منظور رسیدن به طول دلخواه کد است. این نحوه گسترش باید به شکلی صورت گیرد که هم‌ریختی[۸] بین گراف‌های پایه و گراف نهایی حفظ شود. بعد از کار ثورپ، دیوسالار و دیگران [۱۸] تلاش‌های زیادی برای طراحی کدهای نائل به ظرفیت مبتنی بر پروتوگراف‌ها انجام دادند. آن‌ها نشان دادند که می‌توان پروتوگراف‌هایی با کمترین فاصله با حد شانون پیدا کرد. از آن‌سو نشان داده شده که کدگذاری دسته خاصی از ساختارهای مبتنی بر پروتوگراف‌ها را می‌توان به راحتی انجام داد [۱۹].

ایده پروتوگراف‌ها نه تنها برای طراحی کدهای مناسب پیشنهاد شد، بلکه کوتر[۹] و وُنتُبِل[۱۰] از همین ایده برای تحلیل عملکرد کدبردارهای انتقال پیام استفاده کردند [۲۰]. به کمک این ایده آن‌ها مفهوم جدید شبه کلمه کد[۱۱]را برای الگوریتم‌های انتقال پیام پیشنهاد دادند و نشان دادند که در کدبردارهای

---

[1] Stopping set
[2] Trapping set
[3] Error floor
[4] Bit error rate
[5] Waterfall region
[6] Thorp
[7] Additive white Gaussian noise
[8] Homomorphism
[9] Koetter
[10] Vontobel
[11] Pseudo-codeword