بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بجنورد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض-گرایش جبر

عنوان:

ابرگروه‌های n-تایی کانونی فازی

استاد راهنما:

دکتر امیدرضا دهقان

پژوهشگر:

هادی تاجیک

شهریور ۱۳۹۱

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

ابرگروه‌های n-تایی کانونی فازی

نام نویسنده: هادی تاجیک

استاد راهنما: دکتر امیدرضا دهقان

دانشکده: علوم پایه	گروه: ریاضی	رشته تحصیلی: ریاضی محض-گرایش جبر
تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۱۰/۱۲		تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۰۶/۲۱
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد		تعداد صفحات: ۱۱۴

چکیده پایان‌نامه :

هدف از این پایان نامه مطالعهٔ مفهوم ابرگروه‌های n -تایی کانونی فازی است. بدین منظور ابتدا نظریه گروه‌های n -تایی، ابرگروه‌های n -تایی و ابرگروه‌های n -تایی فازی را معرفی نموده و چندین مثال از آنها را مرور خواهیم کرد. سپس خواص اساسی نظریه‌های بالا و روابط بین آنها را تحقیق می‌کنیم. در انتها ابرگروه‌های n -تایی کانونی که نوع خاصی از ابرگروه‌های n -تایی فازی است را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی: گروه n -تایی، ابرگروه n -تایی، ابرگروه n -تایی کانونی، ابرگروه فازی، ابرگروه n -تایی فازی، ابرگروه n -تایی کانونی فازی.

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : ابرگروه‌های n-تایی کانونی فازی

اینجانب هادی تاجیک دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم پایه نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر امیدرضا دهقان متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه بجنورد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه بجنورد" و یا "University of Bojnord " به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ
امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه بجنورد است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.**

تقدیم به

آن‌ها که بی‌دریغ کوشیدند

تا امروز سربراوج ساییدن را تجربه کنم.

هوالعلیم

زیباترین نام را بر زبان جاری می کنم ... که هر کس زبان به حمد تو گشود بی‌تردید نگاه تو بر او افتاده. پس بر قلبم آن جاری کن که خود می‌پسندی در ثنایت لب گشایم.

در وادی معرفت نگنجد، سرچشمه هدایت نجوشد، سر بر قامت بندگی فرو نیافتد ...، گر گنجینه‌ای را که مقدسش خواندی و به آن قسم یاد کردی[1]، کوچک شمرده شود و تنها خاطره جوهر خشک شده‌ای از آن بر برگ برگِ صفحات زندگی باقی ماند.

تو علم را روشنی قرار دادی و فانوسی در بیغوله راه که مسیر را، راه نماید و تزکیه را مقدم بر آن دانستی تا نگاهبانش باشد که تزکیه و تعلیم در معیت هم گوهر وجودی انسان را به نور تو منور کند، پرده از واقعیات کنار زند. آن جاست که حقیقت رخ نمایاند، نظر فراتر افتد، خوان گنجینه‌های دانش رنگین شود و ... آری آنجاست که آدمی معنا یابد.

من اگر وعده‌هایم با تو زیر خروارها تل فراموشی و غفلت مدفون گردیده، اگر زشتی طغیان در نظرم زیبا جلوه‌گری می‌کند و چشمانم خشک‌تر از آن است که در مقام توبه اشکی بر آن جاری شود، بدان از سر جهل است و نسیان...اما بار الها چشمِ طمع بر رحمتت دوخته‌ام و در تمنای رهایی از ظلمت ضلالت، ترنم باران معرفتت را می‌طلبم، امید آنکه جوانه‌های حقیقت را در وجودم برویاند و انعکاس آن چشمانم را روشن کند.

اکنون چهره بر چهره خاک می‌سایم و تو را به حبیبت قسم می‌دهم که..." هر آن خصلت ناپسند که در من می‌بینی به لطف واسع خویش اصلاحش فرمای تا پسندیده شود و هر آن عیب که نفسم را به فساد بیالاید از من بازگیر و هر آن نقص که جانم را از کمال باز دارد برطرفش فرمای!"

و در آن روز که نوبت زندگانی به سر رسد و پیک مرگ حلقه بر در خانه تن بکوبد و دعوت واجب الاجابه تو از آسمان‌ها به گوش آید...پروردگارا! بر محمد (ص) و آل پاکش درود فرست و به حق ایشان عمر ما را با رستگاری به پایان آور و عاقبتمان را ختم به خیر فرمای...!

زبان قاصر است و مجال کوتاه...

تو خود قصیده‌ی مهر را از لوح نانوشته‌ی قلبم بخوان...!

[1] ن و القلمِ و ما یَسطُرونَ

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر امیدرضا دهقان صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

بر خود لازم می‌دانم از اساتید دیگر خودم جناب آقای دکتر بخشی و سرکار خانم دکتر محمدزاده که در دوره ارشد زحمت آموزش علم به بنده را تقبل کردند و همچنین استاد فرهیخته جناب آقای دکتر هدایتی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

هادی تاجیک
شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

مقدمه

گروههای n -تایی که یک تعمیم طبیعی از نظریه گروه هامی باشد، ۸۳ سال قبل توسط دورنته [۱۱] معرفی شد. تعمیم n-تایی ساختارهای جبری یکی از طبیعی ترین راههای توسعه درک عمیق خواص آنهاست. از آن زمان تاکنون مقالات متعددی در زمینه جبرهای n -تایی منتشر شده است. (برای اطلاعات بیشتربه مراجع [۲] ، [۱۳] ، [۱۵] ، [۲۱] و [۲۴] مراجعه نمائید.)
نظریه ابرگروهها در سال ۱۹۳۴ توسط مارتی [۲۱] پایه گذاری شد. وی به تجزیه و تحلیل و کاربرد آنها در گروهها و توابع جبری حقیقی مقدار پرداخت. اکنون ابرگروهها در موضوعات محض و کاربردی زیادی و از جمله نظریه اتوماتا [۱۴] مورد استفاده قرار میگیرد.
ابرساختارهای n -تایی که یک تعمیم ابرساختارهای جبری می باشند؛ در هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی، گراف ها، مشبکه ها، مجموعه های طبیعی و فازی، کدگذاری و هوش مصنوعی، احتمالات و ... مورد استفاده قرار گرفته است. (ببینید [۶]، [۹]، [۲۵] و [۲۸])
در سال ۱۹۶۵ زاده [۲۹] نظریه مجموعه های فازی را به عنوان یک تابع از مجموعه غیرتهی X به[۱ ,۰] معرفی کرد. در ادامه رزنفلد [۲۶] در سال ۱۹۷۱ مفهوم گروه فازی را معرفی کرد. مطالعات رزنفلد در ابتدای امر باعث فازی نمودن ساختارهای جبری شد، ولی کاوش های جدید مسیر تفکر جدیدی در زمینه های دیگر از جمله مهندسی، کامپیوتر و سایر شاخه های علمی باز نمود.
میتاس [۲۲] اولین فردی بود که در سال ۱۹۷۰ ابرگروههای کانونی را به طور مستقل مطالعه کرد.
کرسینی [۵] ابرگروههای sd را که نوع مخصوصی از ابرگروههای کانونی هستند را مورد مطالعه قرارداد.
مولن و پرایس [۲۳] ابرگروههای کانونی را در تجزیه هارمونیک و فیزیک ذره به کار بردند. شبه ابرگروههای کانونی که چندگروهها نیز نامیده می شوند، بوسیله کومر [۳] در جبر استوانه ای و جبر بول و توسط کرسینی [۴] در گراف و روابط مورد استفاده قرار گرفت.
ابرگروههای n -تایی توسط دواز و وجیوکلیس [۱۰] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت.
ابرگروههای n -تایی فازی از دو دیدگاه مورد مطالعه قرار گرفته اند؛ نگرش اول توسط دواز و

کرسینی [۸] و نگرش دوم توسط سن، عامری و چادوری [۲۷]. در نگرش دوم که مورد بحث این پایان نامه است، به هر n -تایی از عناصر مجموعه ناتهی S ، به جای یک زیرمجموعه ناتهی از S (نگرش اول)، یک زیرمجموعه فازی غیرصفر از S را نسبت می دهیم. این دیدگاه در مقالات [۱۸] و [۱۹] گسترش داده شده است.

در این پایان نامه برخی از مطالعات انجام شده برای رسیدن به مفهوم و نتایج مربوط به ابرگروههای n -تایی کانونی فازی مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرارمی گیرند.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ ساختارهای جبری n -تایی

تعمیم سه تایی و n -تایی ساختارهای جبری طبیعی ترین راه توسعه این ساختارها و فهم عمیق خواص آنهاست. آشناترین ساختارهای جبری (ساختارهای جبری ۲ -تایی) که می شناسیم گروه، حلقه، مدول و فضای برداری می باشند که اساس تمامی آنها عمل دوتایی روی یک مجموعه ناتهی می باشد. بر این اساس به هر دوتایی از عناصر یک مجموعه ناتهی، یک عنصر از همان مجموعه را نسبت می دهیم. به این مجموعه همراه با این عمل یک گروه وار ۲ -تایی یا به اختصار گروه وار می گویند. گروه، حلقه، مدول و فضای برداری یک گروه وار می باشند که در یک سری اصول موضوعه صدق می کنند.
آنچه در ادامه می آید تعریف گروه وار n -تایی و گروه n -تایی می باشد که با مثال همراه خواهد شد. بدیهی است که اگر n رامساوی ۲ قرار دهیم، مفهوم گروه تداعی خواهد شد.
تعاریف و مثال‌های این بخش از مرجع [۱۲] استناد شده است.

تعریف ۱.۱.۱. عمل n-تایی روی مجموعه ناتهی G یعنی نگاشتی مانند

$$\left[\begin{array}{l} f : G \times ... \times G \to G \\ \quad (a_1, ..., a_n) \mapsto f(a_1, ..., a_n) \end{array}\right.$$

که به هر n-تایی از عناصرG یک عنصر از آن را متناظر می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه ناتهی G همراه با عمل n-تایی f یک گروه وار n-تایی نامیده می شود و با (G, f) نشان داده می شود.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک مجموعهٔ ناتهی باشد. نگاشت π_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{l} \pi_k : \underbrace{G \times ... \times G}_{n\text{بار}} \longrightarrow G \\ \qquad (x_1, ..., x_n) \longmapsto x_k \end{array}\right.$$

در این صورت (G, π_k) یک گروه‌وار n-تایی است. نگاشت π_k به نگاشت تصویری کانونی معروف است.

نمادگذاری ۴.۱.۱. فرض کنیم $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. دنباله عناصر $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ از مجموعه

دلخواه G را با x_i^j نشان می دهیم. اگر $j < i$، آنگاه دنباله x_i^j تهی می باشد. همچنین اگر $x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_{i+t} = x$ ، آنگاه x_{i+1}^{i+t} را با $x^{(t)}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم (G, f) یک گروه وار n-تایی باشد. در این صورت f را (i, j)-شرکت پذیر نامیم هرگاه برای هر $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ در G داشته باشیم

$$f(x_1^{i-1}, f(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}) = f(x_1^{j-1}, f(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1}).$$

عمل f شرکت پذیر نامیده می شود اگر برای هر $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ تساوی فوق برقرار باشد. در این حالت (G, f) را یک نیم گروه n -تایی نامیم.

تبصره ۶.۱.۱. در حالت $n = 2$، (G, f) یک نیم گروه معمولی است.

مثال ۷.۱.۱. فرض کنید $(G, \cdot)$ یک نیم‌گروه باشد. نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{l} f : \underbrace{G \times G \times \ldots \times G}_{n\text{بار}} \longrightarrow G \\ \qquad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \end{array}\right.$$

در این صورت (G, f) یک نیم گروه n-تایی می‌باشد.

اثبات.

f خوش تعریف است، زیرا

$$\begin{aligned} \forall x_1^n, y_1^n \in G, (x_1, \ldots, x_n) &= (y_1, \ldots, y_n) \\ &\Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n \\ &\Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n \\ &\Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

f شرکت‌پذیر است، زیرا

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \; ; f\big(x_1^{i-1}, f(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}\big) \\ = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot (x_i \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_{n+i-1}) \cdot x_{n+i} \cdot \ldots \cdot x_{2n-1} \end{aligned}$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{j-1} \cdot (x_j \cdot x_{j+1} \cdot \ldots \cdot x_{n+j-1}) \cdot x_{n+j} \cdot \ldots \cdot x_{2n-1}$$
$$= f(x_1^{j-1}, f(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1}).$$

مثال ۸.۱.۱. عمل n–تایی π_1 در مثال ۳.۱.۱ شرکت‌پذیر است، زیرا

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \; ; \; \pi_1(x_1^{i-1}, \pi_1(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1})$$
$$= \pi_1(x_1^{i-1}, x_i, x_{n+i}^{2n-1}) = x_1.$$

همچنین داریم

$$\pi_1(x_1^{j-1}, \pi_1(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1}) = \pi_1(x_1^{j-1}, x_j, x_{n+j}^{2n-1}) = x_1.$$

بنابراین

$$\pi_1(x_1^{i-1}, \pi_1(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}) = \pi_1(x_1^{j-1}, \pi_1(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1}).$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم (G, f) یک گروه وار n–تایی باشد و $i \in \{1, 2, ..., n\}$. اگربرای هر $x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in G$ عنصر $z \in G$ موجود باشد به طوری که

$$f(x_1^{i-1}, z, x_{i+1}^{n}) = x_0 \qquad (1.1)$$

آنگاه معادله (۱.۱) را i–حل پذیر یا حل پذیر در مکان i–ام نامیم. معادله (۱.۱) را به طور یکتا i–حل‌پذیر نامیم هرگاه دارای جواب یکتا باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. گروه وار n–تایی (G, f) را یک شبه گروه n–تایی نامیم اگر معادله (۱.۱) برای هر $i \in \{1, 2, ..., n\}$، به طور یکتا i–حل پذیرباشد.
شبه گروه n–تایی (G, f) را یک گروه n–تایی نامیم هرگاه f شرکت پذیر باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. گروه n–تایی (G, f) را تعویض پذیر نامیم اگر به ازای هر $a_1^n \in G$ و هر جایگشت

$\sigma \in S_n$ تساوی زیر برقرار باشد:

$$f(a_1, ..., a_n) = f(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}).$$

مثال ۱۲.۱.۱. نیم گروه n-تایی (G, f) در مثال ۷.۱.۱ یک گروه n-تایی است، زیرا

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}\ , \forall x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in G$$
$$\exists z = x_{i-1}^{-1} \cdot x_{i-2}^{-1} \cdot ... \cdot x_1^{-1} \cdot x_0 \cdot x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot ... \cdot x_{i+1}^{-1}$$

به طوری که

$$\begin{aligned}
f(x_1^{i-1}, z, x_{i+1}^n) &= x_1 \cdot ... \cdot x_{i-1} \cdot z \cdot x_{i+1} \cdot ... \cdot x_n \\
&= x_1 \cdot ... \cdot x_{i-1} \cdot (x_{i-1}^{-1} \cdot x_{i-2}^{-1} \cdot ... \cdot x_1^{-1} \cdot x_0 \cdot x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot ... \cdot x_{i+1}^{-1}) \cdot x_{i+1} \cdot ... \cdot x_n \\
&= x_1 \cdot ... \cdot x_{i-2} \cdot (\underbrace{x_{i-1} \cdot x_{i-1}^{-1}}_{=e_G} \cdot x_{i-2}^{-1} \cdot ... \cdot x_1^{-1} \cdot x_0 \cdot x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot ... \cdot x_{i+2}^{-1}) \\
&\cdot \underbrace{x_{i+1}^{-1} \cdot x_{i+1}}_{=e_G} \cdot ... \cdot x_n \\
&= x_1 \cdot ... \cdot x_{i-2} \cdot (x_{i-2}^{-1} \cdot ... \cdot x_1^{-1} \cdot x_0 \cdot x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot ... \cdot x_{i+2}^{-1}) \cdot x_{i+2} \cdot ... \cdot x_n \\
&= ... = x_1 \cdot (x_1^{-1} \cdot x_0 \cdot x_n^{-1}) \cdot x_n = (\underbrace{x_1 \cdot x_1^{-1}}_{=e_G} \cdot x_0) \cdot \underbrace{x_n^{-1} \cdot x_n}_{=e_G} \\
&= x_0.
\end{aligned}$$

یکتا بودن z از منحصر به فرد بودن عنصر معکوس در گروه نتیجه می شود.

مثال ۱۳.۱.۱. عمل n-تایی f را روی گروه $(\mathbb{Z}_n, +)$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\forall x_1^n \in \mathbb{Z}_n; f(x_1^n) = (x_1 + x_2 + ... + x_n). \quad (mod\ n)$$

در این صورت $(\mathbb{Z}_n, f)$ یک گروه n-تایی است.(این مثال حالت خاصی از مثال۱۲.۱.۱ است)

تبصره ۱۴.۱.۱. در حالت $n = 2$ گروه n-تایی (G, f) یک گروه معمولی است. زیرا با در نظر

گرفتن $f = \centerdot$ داریم

$$\left[\begin{array}{l}\centerdot:\ G\times G\longrightarrow G\\ \qquad (a,b)\longmapsto f(a,b)=a\centerdot b\end{array}\right.$$

$(G,\centerdot)$ نیم گروه است، زیرا

$$\forall x_1,x_2,x_3\in G;\ x_1\centerdot(x_2\centerdot x_3)=f\big(x_1,f(x_2,x_3)\big)=f\big(f(x_1,x_2),x_3\big)=(x_1\centerdot x_2)\centerdot x_3.$$

$(G,\centerdot)$ دارای عضو خنثی است، زیرا با توجه به این که (G,f) شبه‌گروه ۲-تایی است، به ازای هر $x_0\in G$ معادله‌های $f(x_0,z)=x_0$ و $f(z,x_0)=x_0$ دارای جواب منحصر به فرد $z\in G$ می‌باشد؛ یعنی

$$\begin{cases} x_0\centerdot z=x_0\\ z\centerdot x_0=x_0\end{cases}$$

بنابراین $z=e$ عنصر خنثی $(G,\centerdot)$ است.

$(G,\centerdot)$ عنصر وارون دارد. زیرا

$$\forall x\in G,\quad \exists! z\in G;\begin{cases} f(x,z)=e\\ f(z,x)=e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\centerdot z=e\\ z\centerdot x=e\end{cases}$$

در نتیجه $z=x^{-1}$.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید (G,f) یک گروه n-تایی و H یک زیرمجموعهٔ ناتهی از G باشد. در این صورت H را یک زیرگروه n-تایی G نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

آ) H تحت عمل n-تایی f بسته باشد، یعنی

$$\forall(x_1,...,x_n)\in H^n;\quad f(x_1,...,x_n)\in H,$$

ب) به ازای هر $b_1^{i-1},b_{i+1}^n,b\in H$ معادلهٔ $f(b_1^{i-1},x_i,b_{i+1}^n)=b$ دارای جواب $x_i\in H$ باشد

$(\forall i \in \{۱, ۲, ..., n\})$.

قضیه‌های زیر را در گروه‌های n-تایی بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۱۶. [۱۳] گروه‌وار n-تایی (G, f) یک گروه n-تایی است اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد

آ) گروه‌وار n-تایی (G, f) در شرط (۲و۱)-شرکت پذیر صدق کند و معادلهٔ (۱.۱) به ازای $i = n$ و به طور یکتا برای $i = ۱$ قابل حل باشد،

ب) (G, f) در شرط (nو $n-۱$)-شرکت‌پذیر صدق کند و معادلهٔ (۱.۱) به ازای $i = ۱$ و به طور یکتا برای $i = n$ قابل حل باشد،

ج) $i \in \{۱, ..., n\}$ ای وجود داشته باشد به طوری که (G, f) در شرط ($i+۱$ وi)-شرکت‌پذیر صدق کند و معادلهٔ (۱.۱) به ازای $i = ۱$ و به طور یکتا برای $i = n$ قابل حل باشد.

قضیه ۱.۱.۱۷. [۲] نیم گروه n-تایی (G, f) یک گروه n-تایی است اگر و فقط اگر برای $k \in \{۱, ..., n-۲\}$ و هر $a_۱^k \in G$، عناصر $y_{k+۱}^{n-۱} \in G$ ، $x_{k+۱}^{n-۱}$ موجود باشند به طوری که

$$\forall b \in G; \ f(a_۱^k, x_{k+۱}^{n-۱}, b) = f(b, y_{k+۱}^{n-۱}, a_۱^k) = b.$$

۲.۱ ابرساختارهای جبری

می دانیم که در تعریف عمل، به هر ۲-تایی از عناصر یک مجموعه ناتهی، یک عنصر مربوط می شود. اگر در این تعریف به هر دو عنصر از یک مجموعه، زیرمجموعه ای ناتهی از آن را نسبت دهیم، ابرعمل را خواهیم داشت.

تعاریف و مثال‌های این بخش از مرجع [۱۹] و [۲۷] استناد شده است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H)$ مجموعه تمام زیرمجموعه های ناتهی H باشد. در این صورت نگاشت

$$\circ : H \times H \longrightarrow P^*(H)$$

یک ابرعمل روی H و جفت $(H, \circ)$ یک ابرگروه وار نامیده می شود.

نکته ۲.۲.۱. اگر A و B زیرمجموعه هایی از H باشند، آنگاه تعریف می کنیم

$$A \circ B = \bigcup_{a\in A, b\in B} (a \circ b),$$
$$x \circ A = \{x\} \circ A,$$
$$A \circ x = A \circ \{x\}.$$

تعریف ۳.۲.۱. ابرگروه وار $(H, \circ)$ نیم ابرگروه نامیده می شود، اگر ابرعمل "$\circ$" شرکت پذیر باشد، یعنی

$$\forall a, b, c \in H; a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

تعریف ۴.۲.۱. ابرگروه وار $(H, \circ)$ شبه ابرگروه نامیده می شود هرگاه

$$\forall a \in H; a \circ H = H \circ a = H.$$

این شرط به اصل تکثیر معروف است.

قضیه ۵.۲.۱. [۱۰] گروه وار $(H, \circ)$ در اصل تکثیر صدق می کند اگر و تنها اگر به ازای هر $a, b \in H$، عناصر $u, v \in H$ موجود باشند به طوری که

$$b \in a \circ u,\ b \in v \circ a.$$

برهان.

$\Leftarrow$) فرض کنیم $a \circ H = H$. در این صورت با توجه به $a \circ H = \cup_{x\in H} a \circ x$ داریم:

$$\forall b \in H,\ \ \exists u \in H\ \ s.t.\ \ b \in a \circ u$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد $b \in v \circ a$.

$\Rightarrow$) فرض کنیم: $\forall b \in H,\ \exists u \in H\ \ s.t.\ b \in a\circ u.$

در این صورت $b \in a \circ H$، زیرا

$$a \circ H = \cup_{x \in H} a \circ x.$$

بنابراین$H \subseteq a \circ H$.

به طور مشابه می توان نشان داد $H \subseteq H \circ a$. پس$a \circ H = H \circ a = H$ □

تعریف ۶.۲.۱. ابرگروه وار $(H, \circ)$ را ابرگروه نامیم هرگاه نیم ابرگروه و شبه ابرگروه باشد.

مثال ۷.۲.۱. مجموعه $H = \{a, b\}$ مفروض است. ابرعمل دوتایی " $\circ$ " را روی H به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \circ a = \{a\} \qquad b \circ a = \{a, b\}$$
$$a \circ b = \{b\} \qquad b \circ b = \{a, b\}$$

در این صورت $(H, \circ)$ یک ابرگروه است.

اثبات.

$$\begin{cases} (a \circ b) \circ a = \{b\} \circ a = \{a, b\} \\ a \circ (b \circ a) = a \circ \{a, b\} = (a \circ a) \cup (a \circ b) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (a \circ b) \circ a = a \circ (b \circ a).$$

با بررسی بقیه موارد بطور مشابه به این نتیجه می‌رسیم که $(H, \circ)$نیم ابرگروه است.
همچنین داریم

$$H \circ a = \{a, b\} \circ a = (a \circ a) \cup (b \circ a) = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} = H,$$
$$a \circ H = a \circ \{a, b\} = (a \circ a) \cup (a \circ b) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} = H.$$

به روش مشابه میتوان نشان داد $H \circ b = H, b \circ H = H$. پس $(H, \circ)$ شبه ابرگروه و در نتیجه