بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

(گرایش تحقیق در عملیات)

برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی

از:

فاطمه نیک نفس شال

استاد راهنما:

دکتر محمد کیانپور

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت وغرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتاوزیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست

تقدیم به

پدر رو مادر عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به هم‌نشینی رهروان علم ودانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.
در آغاز از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر محمد کیانپور که همواره راهنما و راه‌گشای من در اتمام و اکمال این پایان‌نامه بوده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.
از آقایان دکتر سعید کتابچی و دکتر محمد یاقوتی که داوری و مطالعه این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند و از نظراتشان به نحو احسن بهره بردم کمال تشکر را دارم.
در پایان نیز تشکر می‌کنم از پدر و مادر عزیزم که وجودشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کرده‌اند...

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

چکیده:

برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی شهودی

فاطمه نیک‌نفس شال

در این پایان نامه، ابتدا مفهوم مجموعه‌ها و روابط فازی شهودی را بیان می‌کنیم. سپس چند گونه از مسائل برنامه ریزی خطی فازی شهودی را مطرح کرده و جواب‌های شدنی و بهینه را برای این مسائل تعریف می‌کنیم. در هر مورد راه حل‌های مناسب برای حل این مسائل ارائه می‌دهیم. نهایتاً برای یک نوع از این مسائل مسأله دوگان فازی شهودی را معرفی کرده و به بررسی قضایای دوگانی در مورد آن می‌پردازیم.

کلید واژه:

برنامه ریزی خطی فازی شهودی، جواب‌های شدنی، روابط فازی شهودی، قضایای دوگانی.

Abstract:

Linear programming with intuitionistic fuzzy numbers

Fatemeh Niknafs Shal

In this dissertation, we first introduce the concept of intuitionistic fuzzy sets and intuitionistic fuzzy relations. Then several kinds of intuitionistic fuzzy linear programming and feasible solutions of them are defined. In each case, appropriate methods are presented. Eventually, for one kind of this problems, dual intuitionistic fuzzy problem is presented and dual theorems is invistigated.

Key words:
Duality theorems, Feasible solutions, Intuitionistic fuzzy linear programming, Intuitionistic fuzzy relations.

مقدمه:

دو حادثه در اوایل قرن بیستم منجر به شکل گیری «منطق فازی»[۱] یا «منطق مبهم» شد. اولین حادثه پارادوکس‌های مطرح‌شده توسط برتراند راسل[۲] در ارتباط با منطق ارسطویی بود. برتراند راسل بنیادهای منطقی برای منطق فازی (منطق مبهم) را طرح نمود، اما هرگز موضوع را تعقیب نکرد. برتراند راسل در ارتباط با منطق ارسطویی چنین بیان می دارد: «تمام منطق سنتی بنا به عادت، فرض را بر آن می گذارد که نمادهای دقیقی به کار گرفته شده است. به این دلیل موضوع در مورد این زندگی خاکی قابل به کارگیری نیست، بلکه فقط برای یك زندگی ماوراء الطبیعه معتبر است.»

دومین حادثه، کشف «اصل عدم قطعیت» توسط هایزنبرگ[۳] در فیزیك کوانتوم بود. اصل عدم قطعیت کوانتومی هایزنبرگ به باور کورکورانه ما به قطعیت در علوم و حقایق علمی خاتمه داد و یا دست‌کم آن را دچار تزلزل ساخت. هایزنبرگ نشان داد که حتی هسته اتم‌ها نیز نامطمئن هستند. او هم چنین نشان داد که حتی در فیزیك، حقیقت گزاره‌ها تابع درجات است. در این میان منطقیون برای گریز از خشکی و جزمیت منطق دو ارزشی، منطق‌های چندارزشی را به عنوان تعمیم منطق دوارزشی پایه‌گذاری کردند. اولین منطق سه‌ارزشی در سال ۱۹۳۰ توسط لوکاسی ویچ[۴] منطق‌دان لهستانی پایه‌گذاری شد. سپس منطق‌دانان دیگری نظیر بوخوار[۵] ، کلین[۶] و هی‌تینگ [۷] نیز منطق های سه‌ارزشی دیگری ارائه کردند. در منطق سه‌ارزشی گزاره‌ها بر حسب سه ارزش (۰،$\frac{1}{2}$ و۱)مقدار دهی می شوند، لذا این منطق‌ها واقعیت‌ها را بهتر از منطق ارسطویی(۰ و ۱) نشان می دهند. ولی روشن است که منطق سه‌ارزشی نیز با واقعیت فاصله دارد. منطق فازی گونه‌ای مهم از منطق است. در این منطق به جای درست یا نادرست، سیاه یا سفید، صفر یا یك، سایه‌های نامحدودی از خاکستری بین سیاه و سفید وجود دارد. تمایز عمده منطق فازی با منطق سه ارزشی آن است که در منطق فازی، حقیقت و حتی ذات مطالب هم می‌تواند نادقیق باشد. در منطق فازی، مجاز به بیان جملاتی از قبیل «کاملاً درست است» یا «کم و بیش درست است» هستیم. حتی می

[۱] Fuzzy logic

[۲] Rasel

[۳] Heisenberg

[۴] Lukasiewicz

[۵] Bochvar

[۶] Klieene

[۷] Heyting

توان از احتمال نادقیق مثل «تقریباً غیر ممکن»، «نه چندان» و «به ندرت» نیز استفاده کرد. بدیهی است منطق فازی نظام کاملاً انعطاف پذیری را در خدمت زبان طبیعی قرار می‌دهد. منطق فازی عبارت است از «استدلال با مجموعه های فازی».

یک مجموعه قطعی، مجموعه‌ای است که دارای مرزهای مشخصی باشد. به عنوان مثال مجموعه‌ی قطعی A با اعضای حقیقی بزرگتر از ۶ به صورت $A = \{x \mid x > ۶\}$ تعریف می‌شود.

همان‌طور که می‌بینید این مجموعه دارای مرز مشخص ۶ است و هر x حقیقی بزرگتر از ۶، عضوی از مجموعه A می‌باشد. اگر چه مجموعه‌های قطعی برای بسیاری از کاربردها مناسب بوده و ابزار بسیار مهمی در ریاضیات و علوم کامپیوتری هستند، ولی قادر به انعکاس مفاهیم و افکار مجرد و نادقیق زندگی انسان نیستند. انتقال ناگهانی از شمول به عدم شمول یکی از اشکالات عمده مجموعه‌های قطعی و در نتیجه منطق ارسطویی است.

مجموعه‌های فازی[1] توسط ماکس بلك و لطفی زاده[2] ارائه گردید. ابتدا در سال ۱۹۳۷ ماکس بلك فیلسوف کوانتوم مقاله‌ای راجع به آنالیز منطق به نام «ابهام» را منتشر کرد. البته جهان علم و فلسفه مقاله بلك را نادیده گرفت. سپس در سال ۱۹۶۵ پروفسور لطفی زاده از دانشگاه کالیفرنیا واقع در برکلی مقاله‌ای تحت عنوان «مجموعه‌های فازی» [۲۱] در مجله اطلاعات و کنترل منتشر ساخت. او نام فازی را برای این مجموعه‌ها در نظر گرفت تا مفهوم فازی را از منطق دودویی دور سازد. بر خلاف مجموعه‌های قطعی، یک مجموعه فازی همان‌طور که از نامش برمی‌آید، مجموعه‌ای با مرزهای نامشخص است. درواقع در این نوع از مجموعه‌ها، انتقال از شمول به عدم شمول به صورت تدریجی انجام می‌شود.

این انتقال تدریجی و نرم توسط تابع عضویت [3] سازماندهی می‌گردد. این مفهوم سبب می‌شود تا مجموعه‌های فازی از انعطاف‌پذیری خوبی برای مدل‌سازی مفاهیم زبان‌شناختی مانند"آب داغ است" و یا "هوا گرم است" برخوردار باشند.

پس از معرفی منطق فازی به دنیای علم، در ابتدا مقاومت‌های بسیاری در برابر پذیرش این نظریه صورت گرفت، بخشی از این مقاومت‌ها ناشی از برداشت‌های نادرست از منطق فازی وکارآیی آن بود. با این حال به‌تدریج که این علم کاربردهایی پیدا کرد و وسایل الکترونیکی و دیجیتالی جدیدی وارد بازار شدند که بر اساس منطق فازی کار

---

[1] Fuzzy sets

[2] L. A. Zade

[3] Membership function

می‌کردند، مخالفت‌ها نیز اندک اندک کاهش یافت. در سال ۱۹۷۴، ابراهیم ممدانی[۱] از دانشگاه لندن برای نخستین بار منطق فازی را در زمینه کنترل [۸]، کنترل یک موتور بخار ساده، به کار گرفت. پس از آن منطق فازی در زمینه‌های فراوانی همچون شبیه‌سازی، هوش مصنوعی، مدیریت، تحقیق در عملیات و ... کاربرد فراوانی یافت.

در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، نوعی عدم قطعیت در اهداف و قیود موجود است و این ابهام معمولاً از نوع احتمالی نیست. بنابراین استفاده از نظریه فازی در مدل‌سازی این مسائل بسیار کمک کننده است. کاربرد فازی در برنامه‌ریزی ریاضی دارای تاریخچه نسبتاً طولانی است.

بلمن و زاده در [۳۲] مفهوم بزرگترین تصمیم‌گیری را در مسائل تصمیم‌گیری فازی بیان کردند. بیان این مفهوم در قالب برنامه‌ریزی ریاضی نخستین بار توسط تاناکا[۲] و همکارانش [۱۵] پیشنهاد شد. زیمرمن[۳] اولین کسی بود که از توابع عضویت خطی برای متناظرکردن مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی با مسائل برنامه‌ریزی خطی استفاده کرد [۹]. ورنرز[۴] یک تعدی قابل قبول برای تابع هدف فازی ارائه کرد و به این ترتیب تابع هدف را نیز به عنوان یک محدودیت در نظر گرفت [۳]. بعد از آن روش‌های متعددی برای حل این مسائل پیشنهاد شد. در میان آنها روش وردگای[۵] و چاناس[۶] [۱۷، ۳۷] که از برنامه‌ریزی پارامتری برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی استفاده کرده بودند بسیار جالب توجه بود. دلگادو[۷] و همکارانش [۲۴] به مسائلی پرداختند که در آن از ضرایب و عملگرهای فازی در محدودیت‌های مسأله استفاده شده بود. باکلی[۸] و فئورینگ[۹] مسائل تماماً فازی [۱۶] را مورد بررسی قرار دادند. بسیاری از محققان از مفهوم مقایسه اعداد فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی استفاده کردند [۲۲، ۲۷]. در بسیاری از این تحقیقات [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۳۱] از یک تابع رتبه بندی برای مقایسه اعداد فازی استفاده شده بود. به این ترتیب آنها یک مسأله کمکی را مطرح کردند و با حل این مسأله رابطه‌ی بین جواب‌های مسأله کمکی و مسأله اصلی را مورد بررسی قرار دادند.

[۱] E. H. Mamdani

[۲] H. Tanaka

[۳] H. J. Zimmermann

[۴] B. Werners

[۵] J. L. Verdegay

[۶] S. Chanas

[۷] M. Delgado

[۸] J. Buckley

[۹] T. Feuring

اولین بار اتانسوو[۱] [۲۰] در سال ۱۹۸۹ مفهوم مجموعه‌های فازی شهودی را به عنوان یک تعمیم از مجموعه‌های فازی مطرح کرد. مجموعه‌های فازی شهودی[۲] ابزاری بسیار مناسب برای ارتباط با ابهام نهفته در ماهیت مسائل دنیای واقعی بود. بنابراین در پی ظهور این مجموعه‌ها، تلاش‌ها برای تعمیم تعاریف و مفاهیم فازی از جمله برنامه‌ریزی برای مجموعه‌های فازی شهودی آغاز شد [۶، ۱۱، ۲۳، ۳۳، ۴۰]. در سال‌های اخیر در زمینه مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی مقالاتی به چاپ رسیده است [۱، ۲، ۳۴] . موخرجی[۳] مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی را با استفاده از اندازه‌های همسانی [۴] حل نمود [۳۸]. دابی[۵] به مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی با متغیرهایی از نوع اعداد فازی شهودی مثلثی پرداخته است [۴]. مالاتهی[۶] و پاروتهی [۷] از یک تابع رتبه‌بندی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی استفاده کردند [۳۵، ۳۶].

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل است. فصل اول شامل مفاهیم و تعاریف اولیه مجموعه‌های فازی می‌باشد. در فصل دوم مجموعه‌ها و کمیت‌های فازی شهودی را مطرح نموده و روابط فازی شهودی را که در این پایان‌نامه بسیار از آن بهره می‌بریم معرفی می‌نماییم. فصل سوم را به مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی اختصاص می دهیم. این فصل شامل ۴ بخش است. در بخش اول به مسائل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی شهودی می‌پردازیم. در بخش دوم مسائل برنامه‌ریزی خطی باضرایب تکنولوژیکی و بردارهای سمت راست فازی شهودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم مسائل برنامه‌ریزی خطی با روابط فازی شهودی عنوان شده است و سعی بر آن بوده که جواب‌های بهینه مناسب برای این مسائل ارائه دهیم. در بخش چهارم روش سیمپلکس را برای دو دسته از مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی تعمیم می‌دهیم و در آخر در فصل چهارم دوگان فازی شهودی را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی با روابط فازی شهودی معرفی می‌کنیم و قضایای دوگانی را برای این مسائل بررسی می‌کنیم.

[۱] K. T. Atanssov

[۲] Intuitionistic fuzzy sets

[۳] S. Mukherjee

[۴] Similarity measures

[۵] D. Dubey

[۶] C. Malathi

[۷] R. Parvathi

فصل ۱

مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

فرض کنید X مجموعه‌ی مادر(مجموعه جهانی [1]) و x نمایانگر عضوی از X باشد. یک مجموعه قطعی A که $A \subseteq X$، به صورت مجموعه‌ای از اعضاء و یا اشیاء $x \in X$ تعریف می‌شود که هریک از x ها می‌توانند متعلق به A بوده و یا متعلق به آن نباشند. باتعریف یک تابع مشخصه روی هر x متعلق به X، می‌توان مجموعه‌ی قطعی A را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب $(x, \circ)$ و یا $(x, ۱)$ نشان داد که به ترتیب بیانگر $x \notin A$ و $x \in A$ می‌باشند. یک مجموعه فازی برخلاف مجموعه‌های سنتی یادشده، به هر عضو درجه‌ای که میزان عضویت به یک مجموعه است را تخصیص می‌دهد. در واقع تابع مشخصه یک مجموعه فازی، به هر عضو مجموعه عددی بین ۰ و ۱ را به عنوان درجه عضویت اختصاص می‌دهد.

با ذکر این مقدمه، جهت آشنایی بیشتر با مجموعه‌های فازی، این فصل را به تشریح کامل مجموعه‌های فازی و ذکر برخی تعاریف ابتدایی در رابطه با آن اختصاص می‌دهیم.

۱-۲ تعاریف پایه

فرض کنید X داده شده است، آنگاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X ، به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

تعریف می‌شود که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تحت عنوان تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ شناخته می‌شود. تابع عضویت، هر عضو از X را به درجه‌ای از عضویت که یک مقدار بین ۰ و ۱ است، نگاشت می‌کند.

مشخصاً، تعریف یک مجموعه‌ی فازی، بسط ساده‌ای از تعریف مجموعه‌های قطعی می‌باشد، با این خصوصیت که تابع مشخصه در مجموعه‌های فازی، می‌تواند دارای هر مقداری بین ۰ و ۱ باشد. در صورتی که مقادیر تابع عضویت، فقط به دو مقدار ۰ و یا ۱ محدود شود، آنگاه $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی قطعی و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ یک تابع مشخصه خواهد بود.

معمولاً از مجموعه‌ی X تحت عنوان مجموعه‌ی مادر و یا مجموعه‌ی جهانی یاد می‌شود. مجموعه‌ی جهانی X ممکن است شامل اشیاء گسسته و یا فضای پیوسته باشد.

مثال ۱-۲-۱. فرض کنید مجموعه‌ی X به صورت زیر به عنوان مجموعه‌ی شهرهایی که یک فرد تمایل به زندگی در آنها دارد، تعریف شده باشد

$X =$ { سن‌فرانسیسکو، بستون، لس‌آنجلس }

[1] Universal set

مجموعه‌ی فازی $\widetilde{C}$ که دربرگیرنده میزان تمایل فرد به زندگی در هر یک از شهرهای یاد شده است، به صورت زیر تعریف می‌گردد

$\widetilde{C} =${ (سن‌فرانسیسکو، ۰.۹) ، (بستون، ۰.۸) ، (لس‌آنجلس، ۰.۶)}

در این مثال مجموعه‌ی جهانی X گسسته است و شامل اشیاء نامرتب (در این مورد سه شهر بزرگ از ایالات متحده) می‌شود.

مثال ۱-۲-۲. فرض کنید مجموعه‌ی $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

تعداد فرزندانی را نشان دهدکه یک خانواده تمایل به داشتن آنها دارد. آنگاه می‌توان مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف نمود

$$\tilde{A} = \{(10, 0/1), (1, 0/3), (2, 0/7), (3, 1), (4, 0/7), (5, 0/3), (6, 0/1)\}$$

در این جا مجموعه جهانی X، دارای اعضای گسسته ومرتب است.

مثال ۱-۲-۳. فرض کنید $X = \mathbb{R}^+$ مجموعه جهانی مربوط به سن انسان‌ها باشد. آنگاه مجموعه فازی $\tilde{B}$، شامل نام انسان‌ها با سن حدود ۵۰ سال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{B}}(x)) \mid x \in X\}, \qquad \mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x-50}{10})^4}$$

باتوجه به سه مثال یادشده، واضح است که ایجاد یک مجموعه فازی به دو چیز بستگی دارد؛ تعریف یک مجموعه جهانی مناسب وتعیین یک تابع عضویت مناسب. نحوه‌ی تعریف تابع عضویت بستگی به مفهوم مورد پیاده سازی دارد و ممکن است در مورد افراد مختلف متفاوت باشد. این تفاوت ناشی از تفاوت ادراک و تشریح یک مفهوم مجرد توسط افراد مختلف است. بنابراین این وابستگی و غیر تصادفی بودن مجموعه‌های فازی را می‌توان مهم‌ترین تفاوت بین تئوری مجموعه‌های فازی با تئوری احتمالات دانست. به جهت ساده‌تر شدن نمایش مفاهیم، می‌توان مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر نشان داد

$$\tilde{A} = \begin{cases} \sum_{x_i \in X} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i & \text{اگر } X \text{ مجموعه‌ای از اشیا گسسته باشد} \\ \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x & \text{اگر } X \text{ مجموعه‌ای از اشیا پیوسته باشد} \end{cases}$$

علامت سیگما و انتگرال در عبارت بالا تنها برای محاسبه‌ی اجتماع زوج های$(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ مورد استفاده قرار می‌گیرند و نشان دهنده‌ی محاسبه‌ی مجموع و یا انتگرال نیستند.

اغلب تعاریفی که در ادامه بیان می‌شوند از منابع [۱۰] و [۵] استخراج شده‌اند.

تعریف ۱-۲-۴. محمل [1] مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه ای از همه‌ی نقاط x در X است که $\mu_{\tilde{A}}(x) > ۰$.

$$support(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰\}$$

تعریف ۱-۲-۵. هسته [2] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ مجموعه‌ای از نقاط x در X است که $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$.

$$core(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱\}$$

تعریف ۱-۲-۶. ارتفاع [3] مجموعه فازی $\tilde{A}$ ، بزرگترین مقدار درجه عضویت آن است؛ یعنی

$$hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

تعریف ۱-۲-۷. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نرمال [4] است اگر هسته‌ی آن ناتهی باشد. به عبارت دیگر یک $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ باشد. یک مجموعه فازی غیرتهی را می‌توان با تقسیم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بر $\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$ به یک مجموعه فازی نرمال تبدیل کرد.

تعریف ۱-۲-۸. α-برش[5] و یا مجموعه سطح α یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، $\alpha \in [۰,۱]$، یک مجموعه قطعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

α-برش قوی،$\alpha \in (۰,۱]$، نیز به صورت مشابه به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

تعریف ۱-۲-۹. با فرض متناهی بودن مجموعه مرجع X، عدد اصلی[6] مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mid \tilde{A} \mid = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

و اندازه نسبی عناصر مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X عبارت است از

$$\|\tilde{A}\| = \frac{\mid \tilde{A} \mid}{\mid X \mid}$$

که در آن $\mid \tilde{A} \mid$ اندازه مجموعه $\tilde{A}$ و $\mid X \mid$ اندازه مجموعه مرجع می‌باشد.

[1] Support

[2] Core

[3] Height

[4] Normal

[5] α-cut

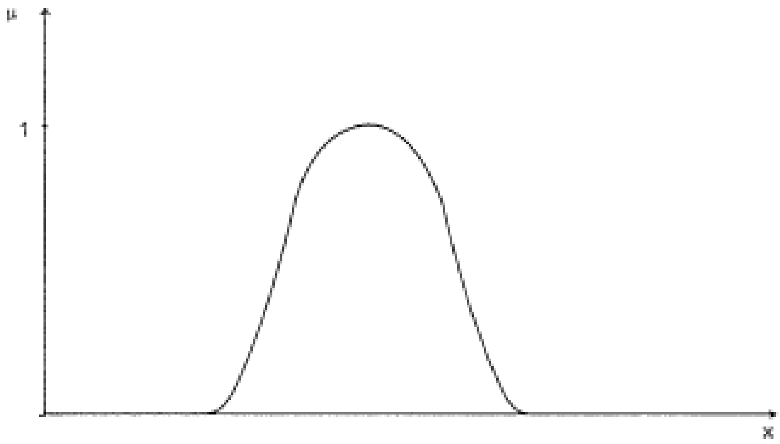
[6] Cardinal number

تعریف ۱-۲-۱۰. مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و به ازای هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم

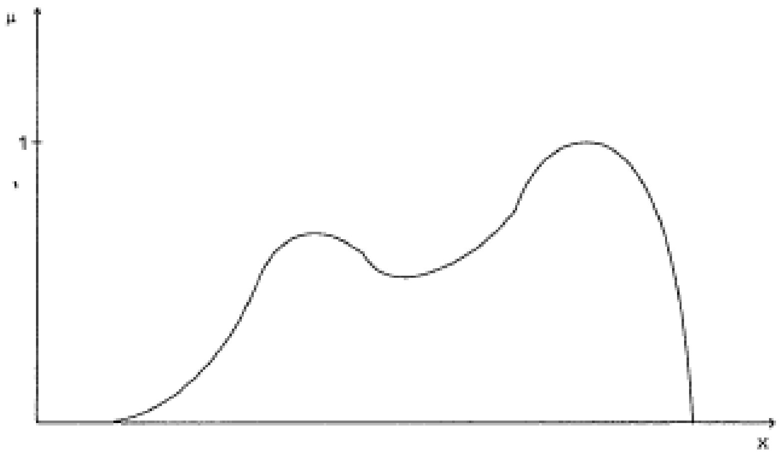
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

اگر همه‌ی α- برشهای مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب باشند، آنگاه $\tilde{A}$ نیز محدب خواهد بود.

شکل ۱-۱ و۱-۲ به‌ترتیب مثالی از یک مجموعه فازی محدب و یک مجموعه فازی نامحدب می‌باشند.



شکل ۱-۱: مجموعه فازی محدب



شکل ۱-۲: مجموعه فازی نامحدب

۱-۳ عملگرها بر مجموعه‌های فازی

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، دو مجموعه فازی داه شده باشند آنگاه اجتماع واشتراک آنها به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\tilde{C}=\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{C}}(x))\mid x\in x\},\qquad \mu_{\tilde{C}}(x)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$$
$$\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{D}}(x))\mid x\in X\},\qquad \mu_{\tilde{D}}(x)=\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

مطابق گفته‌ی پروفسور لطفی‌زاده، اجتماع دو مجموعه فازی عبارت است از کوچکترین مجموعه فازی که شامل هر دوی آنها باشد و اشتراکشان بزرگ‌ترین مجموعه فازی دربرگیرنده‌شان تعریف می‌شود.

تذکر ۱-۳-۲. توجه کنید که $\min$ و $\max$ تنها عملگرهایی نیستند که برای مدل‌سازی اشتراک و اجتماع مجموعه‌های فازی می‌توانند استفاده شوند.

تعریف ۱-۳-۳. متمم [۱] یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A}^c$ نشان داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x)=۱-\mu_{\tilde{A}}(x)$$

تعریف ۱-۳-۴. مجموعه فازی $\tilde{A}$، زیر مجموعه‌ی مجموعه فازی $\tilde{B}$ است ، اگر و تنها اگر

$$\forall x\in X,\qquad \mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۱-۳-۵. تساوی دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall x\in X,\qquad \tilde{A}=\tilde{B}\Longleftrightarrow\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۱-۳-۶. مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مفروض‌اند. جمع جبری[۲] $\tilde{C}=\tilde{A}+\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall x\in X,\qquad \mu_{\tilde{C}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۱-۳-۷. برای دو مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، جمع کراندار[۳] آنها عبارتست از

$$\tilde{D}=\tilde{A}\oplus\tilde{B},\qquad \forall x\in X,\qquad \mu_{\tilde{D}}(x)=min\{۱,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

تعریف ۱-۳-۸. برای دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$، تفاضل کراندار [۴] به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{E}=\tilde{A}\ominus\tilde{B},\qquad \forall x\in X,\quad \mu_{\tilde{E}}(x)=max\{۰,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-۱\}$$

تعریف ۱-۳-۹. برای دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ضرب جبری[۵] $\tilde{F}=\tilde{A}.\tilde{B}$، است و به صورت زیر تعریف می‌شود

[۱] Complement

[۲] Algebraic sum

[۳] Bounded sum

[۴] Bounded difference

[۵] Algebraic product