چکیده:

روشهای مرتبه ۲،٤،٦ بر اساس توابع نمایی اسپلاین ترکیبی چند جمله ای ها ی درجه ۳ ونمایی هستند، به منظور پیدا کردن تقریب مسئله دو نقطه ای مقداری مرزی خطی و غیر خطی مرتبه چهارم بدست آمده اند. بدین وسیله نشان داده شده است که پارامتر آزاد k بخش نمایی می تواند برای افزایش مرتبه دقت روش جدید استفاده شود. تحلیل همگرایی این روشها با مثال هایی عددی برای موارد خطی و غیر خطی برای نمایش مفید بودن و کاربرد این روش هاآورده شده اند.

این پایان نامه اساسا مبتنی بر مرجع [۳۳] می باشد.

متغیر ها و واژه های کلیدی:

نمایی.......... Exponential

اسپلاین مرتبه پنجم.......... Quintic spline

تفاضل متناهی.......... Finite difference

مسئله مقدار مرزی دو نقطه ای.......... Two-point boundary value problem

کران خطا.......... Error bound

مقدمه:

مسئله دو نقطه ای مقدار مرزی غیر خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$y^{(٤)} = f(x, y), \qquad x \in [a, b] \qquad \text{(I)}$$

همراه با شرایط مرزی زیر

$$y(a) - A_۱ = y^{(۱)}(a) - A_۲ = ۰, \quad y^{(۲)}(b) - B_۱ = y^{(۳)}(b) - B_۲ = ۰, \qquad \text{(II)}$$

که در آن B_i, A_i و a, b برای $i = ۱,۲$ ثابت های حقیقی متناهی هستند. مسائل مقدارمرزی مرتبه چهارم در سالهای اخیر توجه زیادی را به خود معطوف کرده اند. این گونه مسائل درمدلهای ریاضی جریانات ویسکو الاستیک و غیر الاستیکی،در بررسی تغیر شکل شعاع ها و انحنای صفحه به وجود می آیند. به [۳٤،۳۰] فرض می کنیم که $f(x, y)$ روی (a, b) حقیقی وپیوسته باشد ، برای مسئله خطی $f(x, y) = g(x) - p(x)y$ ، توابع $g(x)$ و $p(x)$ روی (a, b) پیوسته باشند. جواب تحلیلی مسئله (I) – (II) باهر انتخاب دلخواه برای $g(x)$ و $p(x)$ قابل دستیابی نیست [۲۹].وجود جواب و منحصر به فرد بودن جواب مسئله (I) – (II) در مراجع [۲۹،۲٦] بررسی شده است.

در منابع موجود حل عددی برای معادلات دیفرانسیل اطلاعاتی کمی درباره جواب مسایل مقدار مرزی (I) و (II) وجود دارد. تیون و عثمانی [۲٦] تحقیقی در مورد حل عددی مسایل (I) – (II) با استفاده از روش های تفاضل متناهی، روش تیر اندازی و روش اسپلاین چند جمله ای درجه ٥ ارائه کردند.

همچنین عثمانی [۲۹] روش تفاضل متناهی و تیر اندازی اصلاح شده مبنی بر روش رونگ کوتاه مرتبه چهارم را مورد بحث قرارداده است. از طرف دیگر، همان متون دراین زمینه روشهای متعددی برای پیدا کردن جواب تقریبی مسئله (I) با انواع دیگری از شرایط مرزی شامل مشتقهای مرتبه ۱و۲ فرموله شده اند دارد.

برای مثال عثمانی [۲۷و۲۹]، رشید نیا، گل بابایی [۱۵] و صدیقی و اکرم [۱۷و۱۸] روشهای همگرایی مرتبه ۲ و ٤ را برای جواب مسئله مقدار مرزی دو نقطه ای به ترتیب با استفاده از توابع اسپلاین چند جمله ای درجه ٤ و٥ و٦ بدست آوردن و تحلیل کردند. السعید و همکارانش [٥و٦] روش همگرایی مرتبه دوم را مبنی برتوابع اسپلاین چند جمله ای مرتبه ۳و ٤ برای جواب مسائل مانعی مرتبه ٤ تخمین زدند.

اسکات و واتز مسئله مقداری مرزی مرتبه چهارم خطی که شامل یک پارامتر c که به فرم زیر می باشد حل کردند:

$$y^{(٤)} - (١ + c)y^{(٢)} + cy = -١ + \frac{١}{٢}cx^{٢}, \quad ٠ \leq x \leq ١$$

با شرایط مرزی:

$$y(٠) = ٠ \quad , y^{(١)}(٠) = ١ \quad , \ y(١) = ١.٥ + \sinh(١) \quad , y^{(١)}(١) = ١ + \cosh(١)$$

با استفاده متعامد سازی در سال ۱۹۷۵، [١٦]. ژو [٣٤] روشهای بهینه هم محلی اسپلاین مرتبه چهار را برای جواب عددی این مسئله مبنی بر روش hojghg که منجربه وجود آوردن دو روش هم محلی یک گامی و سه گامی اسپلاین بهینه مرتبه چهار شد، معرفی کردند. وندال و همکاران [۳۱] روش مرتبه دوم جدیدی را برای حل مسائل مقداری مرزی (I) با شرایط مرزی شامل مشتق های اول مبنی بر تابع اسپلاین غیر چند جمله ای به وجود آوردند. سراج و همکاران [۲۳و ٢٤] یک دسته از مسئله مقداری مرزی مرتبه سوم و مسئله مقدار مرزی دو نقطه ای مرتبه چهارم را با استفاده از توابع اسپلاین غیر چند جمله ای حل کردند. رمضان و همکاران [۱۲و١٤] و زهرا [۳۲] چندین روش را مبنی بر اسپلاین غیر چند جمله ای برای تولید روشهای همگرای مرتبه های ۲و٤و ٦ به منظورحل عددی مسائل مقداری مرزی مرتبه های ۲و٤ و ٦ و همچنین مسایل مقداری مرزی مراتب بالاتر بدست آوردند. خانواده ای از روش ها بر اساس روشهای مناسب مثلثاتی و نمایی چند گامی دارای دقت های مختلف برای حل معادله شرودینگر توسعه داده اند. برای جزییات بیشتر می توانم به مقالات و مراجع آنها مراجعه کنیم [۱۱،۱۰،۷] و [۱۹-۲۳].

هدف این پایان نامه ساخت روش اسپلاینی جدید که مبنی بر یک تابع اسپلاین نمایی به فرم

$ae^{kx} + be^{-kx} + P_{n-۲}(x)$ با $P_{n-۲}(x) = \sum_{i=۰}^{n-۲} m_i x^i$ که یک چند جمله ای معمولی از درجه $n-۲$ است، می باشد. همچنین می خواهیم یک قسمت نمایی را برای روشهای عددی به منظور به دست آوردن تقریب های هموار برای جواب مسئله (I) - (II) بدست آوریم .

بر اساس [۹] فضای $T_n = \text{span}\,\{۱, x, x^۲, x^۳, \ldots, x^n, e^{kx}, e^{-kx}\}$ یک فضای کامل چبیشف گسترده را روی (a, b) به وجود می آورد. بنابراین امکان ایجاد تقریب اسپلاین که یک بخشی از آن یک چند جمله ای و بخشی دیگر نمایی است ، وجود دارد . تابع اسپلاین ارائه شده در پایان نامه حاضر فرمی به شکل $T_۵ = \text{span}\,\{۱, x, x^۲, x^۳, e^{kx}, e^{-kx}\}$ دارد، که در آن k یک پارامتر آزاد می باشد که می تواند حقیقی یا کاملاً فرضی باشد و برای افزایش دقت روش از آن استفاده می شود.

بنابراین در هرزیر بازه ی $x_i \le x \le x_{i+۱}$ داریم :

$$T_۵ = \text{span}\{۱, x, x^۲, x^۳, e^{kx}, e^{-kx}\}$$

یا

$$T_۵ = \text{span}\{۱, x, x^۲, x^۳, \cos kx, \sin kx\}$$

یا

$$T_۵ = \text{span}\{۱, x, x^۲, x^۳, x^۴, x^۵\}$$

(زمانی که $k = ۰$)

این رویکرد در مقایسه با روش های تفاضل متناهی [۲۶] مزایای خوبی را دارد. برای مثال وقتی جواب آن محاسبه شد، اطلاعات مورد نیاز برای درون یابی اسپلاین بین نقاط شبکه ای بدست آمده است. این موضوع وقتی که جواب مسئله مقدار مرزی مسئله در موقعیت های مختلف بازه ی (a, b) نیاز است، اهمیت پیدا می کند.

این رویکرد نه تنها برتری در جهت تقریب های پیوسته برای $y(x)$ به دست می دهد، بلکه برای $y^{(1)}(x)$ و $y^{(2)}(x)$ و مشتقهای بالاتر، برای هر نقطه از حدود انتگرال را بدست می دهد. همچنین C^{∞} تمایز ترکیبی از اسپلاین های نمایی با اسپلاین های چند جمله ای است.

این پایان نامه به صورت زیر تقسیم بندی می شود:

درفصل ۲ به معرفی اسپلاین نمایی و فرمول بندی و آنالیز خطا خواهیم پرداخت.

در فصل ۳ روش مبتنی بر اسپلاین نمایی فوق ارائه و فرم ماتریسی آن را بیان می کنیم.

درفصل ٤ تحلیل هگرایی روش های مرتبه دوم ، چهارم وششم ، نشان داده شده است .

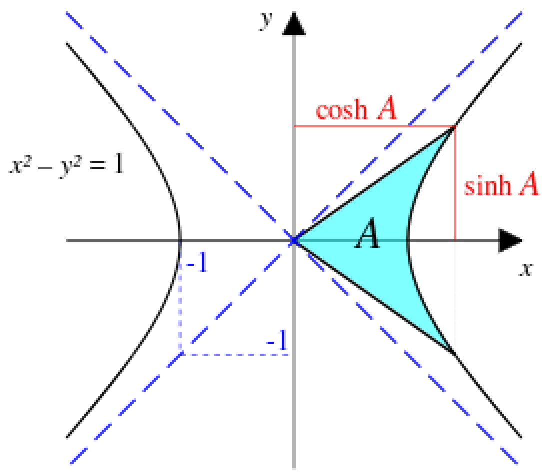
در فصل ٥ نتایج عددی ،برای نمایش قابلیت به کارگیری و دقت آورده شده اند .

و سرانجام در قسمت ٦ به نتیجه گیری روشهای حاصله تخصیص داده شده است.

فصل اول

تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱:[۱]تابع هذلولوی:



در تعریف این توابع، منحنی سمت راست هذلولی متساوی‌الساقین را در نظر می‌گیریم که در این صورت داریم: x = cosh a و y = sinh a و در یک رابطه کلی خواهیم داشت :

$$\cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱$$

توابع هیپربولیک یا هایپربولیک (Hyperbolic) یا توابع هُذلولوی یا هُذلولی از توابع پرکاربرد در ریاضیات می‌باشند که روابط حاکم بر آن شبیه مثلثات است، با این تفاوت که خطوط مثلثاتی با توجه به دایره ای که شعاع آن واحد می‌باشد تعریف می‌شود ولی توابع هذلولوی (هذلولی) با توجه به هذلولی متساوی‌الساقین تعریف می‌گردد. از تابع‌های پایه‌ای آن sinh و cosh هستند که دیگر توابع را مانند tanh می‌سازند.

این توابع درانتگرالها، معادلات دیفرانسیل خطی و همچنین معادله لاپلاس بسیار ظاهر می‌شوند. همانند توابع مثلثاتی که دارای معکوس اند، این توابع نیز دارای معکوس اند و با پسوندهای arc و arg نمایش داده می‌شوند. مانند: arcsinh

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$

$$\tanh x = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{۲}}{\frac{e^x + e^{-x}}{۲}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱}$$

$$\coth x = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{۲}}{\frac{e^x - e^{-x}}{۲}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{۲x} + ۱}{e^{۲x} - ۱}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{۱}{\cosh x} = \frac{۲}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{۱}{\sinh x} = \frac{۲}{e^x - e^{-x}}$$

تعریف ۱.۲ : [۲]: مجموعه ی تمام توابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ را با $\mathrm{C}[a,b]$، مجموعه تمام توابع مشتق پذیر بر بازه ی $[a,b]$ را با $C^{1}[a,b]$ و ... مجموعه تمام توابع n مرتبه مشتق پذیر بر بازه ی $[a,b]$ را با $C^{n}[a,b]$ و همچنین مجموعه ی تمام توابع بی نهایت مرتبه مشتق پذیر بر بازه ی $[a,b]$ را با $C^{\infty}[a,b]$ نشان می دهیم. ممکن است در بازه ی $[a,b]$ داشته باشیم $a \to -\infty$ و یا $b \to \infty$ توجه داشته باشیم که

$$C^{\infty}[a,b] \subset \cdots \subset C^{2}[a,b] \subset C^{1}[a,b] \subset \mathrm{C}[a,b] \qquad (1-6)$$

در (۶–۱) روابط زیر مجموعه ای به طور محض برقرارند زیرا برای هر عدد طبیعی n ، همواره تابعی موجود است که متعلق به $C^{n-1}[a,b]$ باشد در حالیکه به $C^{n}[a,b]$ تعلق نداشته باشد.

تعریف ۱.۳: [۳]**اسپلاین:**

در گذشته انسانها در طول شبانه روز زمان را با استفاده از ساعت های خورشیدی ،آبی ،شنی تقریب می زدند که چندان دقیق نبوده و بعد ها با اختراع چرخ دنده ساعت های کوکی اختراع شدند که اینها نیز از دقت قابل قبولی برخوردار نبودند و همراه با خطا بودند.

بعدها با پیشرفت علم و ساخت ساعت های باطری دار اتمی این مشکل تا حد زیادی برطرف گردید به نحوی که این ساعت ها بیشترین دقت و کمترین خطا را دارا باشند یعنی در هر هزار سال یک ثانیه خطا دارند.

ریاضی دانان نیز تلاش می کنند برای حل مسائل راه حلی ارائه دهند که دقت را افزایش داده و خطا را کاهش می دهند یعنی برای حل مسائلی که جواب واقعی ندارند یک جواب تقریبی با بیشترین دقت و کمترین خطا را بدست آورند. اغلب پدیده های علمی و مهندسی با انتقال از یک محیط به یک محیط دیگر اندازه گیری می شوند.

داده های بدست آمده از این اندازه گیری را با یک تابع تکه ای پیوسته بهتر می توان نشان داد.

یکی از مشکلات درونیابی با استفاده از چند جمله ای با درجه بالا نوسان آن هاست. این نوسان ممکن است باعث دور شدن چند جمله ای درونیاب در بازه درونیابی شود.

یکی از راه های حل این مشکل عبارت است از تقسیم بازه درونیابی به چند زیر بازه و تشکیل چند جمله ای های تقریب با درجه پایین روی هر یک از زیر بازه ها، این نوع تقریب را درونیابی تکه ای چند جمله ای می گویند.

تعریف ۱.٤: [۳] :یک تابع اسپلاین درجه n با نقاط گره ای $x_۰, x_۱, \dots x_n$ یک تابع نظیر $S(x)$ با مشخصات زیر است.

در هر زیر بازه ی $[x_i, x_{i-۱}]$ ، $۰ < i < x$ ، $S(x)$ یک چند جمله ای از درجه nام است.

$S(x)$ و مشتقات مرتبه اول تا مرتبه $(n-۱)$ آن در بازه ی $[a, b]$ پیوسته هستند.

توجه داریم که برعکس یک چند جمله ای درونیاب ،درجه یک اسپلاین با افزایش تعداد نقاط زیاد نمی شوند. در این حالت درجه ثابت می ماند در عوض تعداد تکه ها را افزایش می دهیم.

تعریف ۱.۵: [۳]: تابع اسپلاین درجه ۳ $S_i(x)$ از دسته $C^{۲}[a,b]$، تابع $u(x)$ در $[a,b]$ را درونیابی می کند بطوریکه :

- در هر بازه ی $[x_j, x_{j-۱}]$ ، $S_i(x)$ یک جند جمله ای درجه ۳ است.
- مشتقات اول و دوم $S_i(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته هستند.

تعریف ۱.٦: [۲۵,۳] :تابع کوانتیک اسپلاین $S_i(x)$ تابع U(x) را در $[a,b]$ درونیابی می کند به طوریکه

- ۱–در هر بازه $[x_i, x_{i-۱}]$، $S_i(x)$ یک جند جمله ای در جه ۵ باشد.
- ۲–مشتقات اول ،دوم ، سوم و چهارم $S_i(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشند.

تعریف ۱.۷:**[۲۵,۳]**:تابع اسپلاین $S_i(x,\tau)$ از دسته ی $C^{۲}[a,b]$، تابع U(x) را در نقاط شبکه ای $\{x_j\}$ درونیابی می کند که وابسته می شوند به یک پارامتر τ

و اسپلاین درجه ۳ که
$S_i(x)$ را در بازه ی $[a,b]$ تقلیل می دهند وقتی که:

$$\tau \rightarrow ۰$$

که این تابع اسپلاین مکعبی پارامتری نامیده می شود.

تعریف ۱.۸: **[۲۵,۳]** : تابع $S_i(x,\tau)$ از دسته $C^{٤}[a,b]$ تابع U(x) را در نقاط شبکه ای

$\{xj\}$ ، $j = ۱,۲,۳ \dots n$ درونیابی می کند که وابسته می شوند به یک پارامتر τ و اسپلاین درجه ۵ معمولی که:

$S_i(x)$ را در بازه ی $[a,b]$ تقلیل می دهند.

وقتی که $\tau \rightarrow ۰$ که این یک تابع اسپلاین درجه ۵ پارامتری نامیده می شود.

تعریف ۱.۹ [۳]اسپلاین درجه ۳ طبیعی:

فرض کنیم f یک تابع حقیقی تعریف شده بر بازه ی $[a,b]$ باشد .

نقاط داده جدول ۱–۱ را درنظر می گیریم.

x	a=$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_\alpha}$	…	$\boldsymbol{x_n}$
y	F(x)	F($\boldsymbol{x_\alpha}$)	…	F($\boldsymbol{x_n}$)

توابع اسپلاین درجه ۳ مشهورترین توابع اسپلاین هستند ،زیرا آنها ابزار توانمندی برای درونیابی هموارو مشتق گیری عددی می باشند وهم چنین اگر یک تابع هموار عددی برای درونیابی داشته باشیم آنگاه استفاده از اسپلاین های درجه ۳ هم مناسب تر است و هم درونیابی حاصل دقیق تر می باشند.

اکنون اسپلاین درجه ۳ S_i (x) رابا توجه به شرایط داده شده در تعریف ۲ برای نقاط جدول می سازیم.

برای این منظور در هر بازه ی $[x_i,x_{i+۱}]$ اسپلاین $S(x)$ به صورت
:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^۲ + d_i(x - x_i)^۳, (۱-۱)$$

در نظر می گیریم که ظرایب آن مجهول هستند ،برای راحتی قرار می دهیم:

$h_i = x_{i+۱} - x_i$، چون $S(x)$ باید داده ها را درونیابی کند پس $S(x_i) = f(x_i)$

$$a_i = f(x_i) = I = ۱,۲, \dots n$$

از پیوستگی $S(x)$ در گره ها داریم:

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

پس

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \qquad , \quad i = 1,2,\dots n-1 \qquad (1-2)$$

با مشتق گیری از عبارت (۱-۱) خواهیم داشت:

$$S_i^{(1)}(x) = b_i + 2c_i(x-x_i) + 3d_i(x-x_i)^2$$

$$S_i^{(2)}(x) = 2c_i + 6d_i(x-x_i)^2 \qquad (1-3)$$

از پیوستگی $S^{(1)}(x)$ داریم:

$$S_i^{(1)}(x_i) = S_{i-1}^{(1)}(x)$$

از آنجا (۳-۱):

$$b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2$$

به طور مشابه از پیوستگی $S^2(x)$ در گره ها داریم:

$$S_i^{(2)}(x_i) = S_{i-1}^{(2)}(x_i)$$

لذا

$$c_i = c_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}$$

(۱-٤)

رابطه فوق با $i+1$ به جای i به صورت :

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \qquad (1-5)$$

با حل(۱-۵) برای d_i و جایگذاری در (۱-۲) داریم:

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} - 2c_{i-1}) \quad (1-6)$$

$$b_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(c_i + 2c_{i-1}) \qquad (1-7)$$

به طور مشابه با حل (۱-٤) و جایگذاری در (۱-۳) داریم:

$$b_i = b_{i-۱} + h_{i-۱}(c_i + c_{i+۱}) \quad , \qquad i = ۱,۲, \dots n-۱ \qquad (۱-۸)$$

در نهایت با ترکیب (۱-۸) و (۱-۷) و (۱-٤) داریم:

$$h_{i-۱}c_{i-۱} + U_i c_i + h_i c_{i+۱} = U_i \quad , \qquad i = ۱,۲, \dots n-۱ \qquad (۱-۹)$$

که در آن

$$U_i = ۲(h_{i-۱} + h_i)$$

$$V_i = ۳(w_i - w_{i-۱}) \qquad \mathrm{W_i} = \frac{۱}{h_i}(a_{i+۱} - a_i)$$

رابطه (۱-٤) یک دستگاه خطی با n متغییر و $n-۲$ معادله هستند پس دو شرط دیگر لازم است.

چند انتخاب ممکن برای این دو شرط اضافی وجود دارد که مبتنی بر مقدار مشتق دوم در نقاط انتهایی می باشد ساده ترین انتخاب

$$S^{(۲)}(x_۱) = S^{(۲)}(x_n) \qquad (۱-۱۰)$$

که به یک اسپلاین درجه سه طبیعی منجر می شود.

از (۱-۱۰) دو معادله جدید را بدست می آوریم:

$$c_۱ = ۰ \quad , \qquad c_n = ۰ \qquad (۱-۱۱)$$

معادلات (۹-۱) و(۱۱-۱) با هم یک دستگاه معادلات سه قطری $AX = b$ تشکیل می دهند که در آن:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & h_۲ & \vdots & \vdots \\ h_۱ & ۲u^۲ & \vdots & ۲u_{n-۱} & h_{n-۱} \\ \vdots & \vdots & h_{n-۲} & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$,b=\begin{bmatrix} ۰ \\ v_۲ \\ \vdots \\ v_{n-۱} \end{bmatrix} \qquad , \qquad X=\begin{bmatrix} c_۱ \\ \vdots \\ c_{n-۱} \\ c_n \end{bmatrix}$$

A اکیدا غالب قطری است پس دستگاه فوق از یک روش حذفی بدون هیچ محور گیری حل می گردد پس از حل دستگاه به دست آمدن c_iها ، ضرایب اسپلاین :

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^۲ + d_i(x - x_i)^۳$$

می توان با استفاده از روبط زیر محاسبه کرد.

$$a_i = f(x_i)$$

$$b_i=\frac{۱}{h_i}(a_{i+۱} - a_i)_{-} - \frac{h_i}{۳}(c_{i+۱} + ۲c_i)$$

$$d_i=\frac{c_{i+۱}-c_i}{۳h_i}$$

تعریف ۱.۱۰:[۳] : تابع حقیقی $y(x)$ جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام $F(x, y(x), \dots y^n(x)) = ۰$ با n پارامتر $c_۱, c_۲, \dots c_n$ است.

در مسائل مقدار اولیه این پارامترها به وسیله ی مقدارهای $y^{m}(x) = AX$ ، $m = ۰,۱, \dots n - ۱$ در یک نقطه ثابت $x = a$ معین هستند .اگر این شرایط در بیش از یک نقطه x برقرار باشد آن مسئله را مسئله مقدار مرزی می نامند.

تعریف ۱.۱۱ : [۲۵,۳] :اسپلاین مرتبه ۵:

تعریف:فرض کنیم که در بازه $[A\ ,\ B]$ رابه n زیر بازه با گام مساوی h افراز کنیم و نقاط گره ای x_i را به صورت زیر داشته باشیم .

$$\Delta = \{a = x_۰ < x_۱ < x_۲ \dots < x_{n-۱} < x_n = b\} \qquad xi = a + ih\,, \quad i = ۰\ (۱)n$$

که در آن $h = x_i - x_{i-۱}$ هر برای $i = ۱\ (۱)x$

تابع اسپلاین درجه ۵ $s_\Delta(x)$ تابعی است که تابع $f(x)$ را در بازه $[a, b]$ درونیابی نموده ودر شرایط زیر صدق می کند.

در هر یک از زیر بازه های $s_\Delta(x_۱)[x_{i-۱}, x_i]$ یک چند جمله ای از درجه ۵ است .

مشتق اول و دوم و سوم ، چهارم $s_\Delta(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته هستند.

مشتق مرتبه چهارم تابع $s_\Delta(x)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم و در بازه $[x_{i-۱}, x_i]$ داریم :

$$s_{\Delta}^{٤}(x) = \frac{x_i - x}{\lambda} f_{i-١} + \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{i}-١}}{\lambda} \mathrm{f}_i = \bar{\mathrm{z}} f_{i-١} + z f_i$$

که در آن

$$\bar{\mathrm{z}} = \frac{\mathrm{x_i} - \mathrm{x}}{\lambda}, \qquad \mathrm{z} = \frac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{i}-١}}{\lambda} \quad , \mathrm{f_i} = \mathrm{s}_{\Delta}^{٤}(\mathrm{x_i}) \quad , \mathrm{f}_{\mathrm{i}-١} = \mathrm{s}_{\Delta}^{٤}(\mathrm{x}_{\mathrm{i}-١})$$

با انتگرال گیری از این رابطه می توان تابع اسپلاین $s_{\Delta}(X)$ را بدست آورد .

$$\mathrm{s}_{\Delta}^{٣}(\mathrm{x}) = \frac{-(\mathrm{x_i} - \mathrm{x})^{٢}}{٢\lambda} \mathrm{f}_{\mathrm{i}-١} + \frac{(\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{i}-١})^{٢}}{٢\lambda} \mathrm{F_i} + \mathrm{A_i}$$

$$s_{\Delta}^{٣}(x) = \frac{-h}{٢} \bar{z}\, f_{i-١} + \frac{h}{٢} z^{٣} F_i + A_i$$

$$s_{\Delta}^{(٢)}(x) = \frac{h^{٢}}{٦} - \bar{z}^{٣} f_{i-١} + \frac{h^{٢}}{٦} z^{٣} f_i + A_i z + B_i$$

$$\acute{s}_{\Delta}(x) = \frac{-h^{٣}}{٢٤} \bar{z}^{٤} F_{i-١} + \frac{h^{٣}}{٢٤} z^{٤} F_i + \frac{A_i}{٢} z^{٢} + B_i z + C_i$$

$$s_{\Delta}(x) = \frac{h^{٤}}{١٢٠} \bar{z}^{٥} F_{i-١} + \frac{h^{٤}}{١٢٠} z^{٥} F_i + \frac{A_i}{٦} z^{٣} + \frac{B_i}{٢} z^{٢} + C_i z + Di$$

برای محاسبه ثابت های انتگرال گیری Ai , Bi , Ci , Di می توان از ٤ شرط زیر استفاده نمود .

$s_\Delta(x_i) = u(x_i) = u_i$ $\acute{s}_\Delta(x_i) = \acute{u}(x_i) = \acute{u}_i = M_i$

$s_\Delta(x_{i-١}) = u(x_{i-١}) = u_{i-١}$ $\acute{s}_\Delta(x_{i-١}) = \acute{u}(x_{i-١})$

$= \acute{u}_{i-١} = M_{i-}$

اگر $x = x_i \Rightarrow z = ١ , \bar{z} = ٠$

اگر $x = x_{i-١} \Rightarrow z = ٠ , \bar{z} = ١$

$$s_\Delta(x_{i-١}) = \frac{\lambda^٤}{١٢٠} F_{i-١} + D_i = U_{i-١} \Rightarrow D_i = U_{i-١} = \frac{-\lambda^٤}{١٢٠} F_{i-١}$$

$$s_\Delta(x_i) = \frac{\lambda^٤}{١٢٠} F_i + A_i \frac{A^٣}{٦} + B_i \frac{\lambda^٢}{٢} + C_i h + D_i = U_i$$

$$\acute{s}_\Delta(x_{i-١}) = \frac{\lambda^٢}{٦} F_{i-١} + B_i = M_{i-١} \Rightarrow B_i = M_{i-١} - \frac{\lambda^٢}{٦} F_{i-١}$$

$$\acute{s}_\Delta(x_i) = \frac{\lambda^٢}{٦} F_i + A_i h + B_i = M_i \Rightarrow A_i = \frac{x_i - x_{i-١}}{\lambda} + \frac{\lambda^٢}{٦} F_{i-١}$$

$$\acute{s}_\Delta(x_i) = \frac{\lambda^٢}{٦} F_i + A_i h + B_i = M_i \Rightarrow A_i = \frac{x_i - x_{i-١}}{\lambda} + \frac{\lambda^٢}{٦} F_{i-١}$$

$$s_\Delta(x_i) = \frac{\lambda^٤}{١٢٠} F_i + A_i \frac{\lambda^٣}{٦} + Bi \frac{\lambda^٢}{٢} + c_i h + D_i = u_i$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^٤}{١٢٠} F_i + \frac{\lambda^٣}{٦} \left[\frac{M_i - M_{i-١}}{\lambda} + \frac{\lambda^٢}{٦}(f_{i-١} - f_i)\right] + \frac{\lambda^٢}{٢}[M_{i-١}$$

$$- \frac{\lambda^٢}{٦} F_{i-١}] + c_i h + u_{i-١} - \frac{\lambda^٤}{١٢٠} F_{i-١} = u_i$$

$$c_i = \frac{-\lambda^3}{120} Fi - \frac{\lambda^2}{6}\left[\frac{m_i - m_{i-1}}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{6}(F_{i-1} - F_i)\right] - \lambda/2$$

$$\left[M_{i-1} - \lambda^2/6 \ F_{i-1}\right] + \frac{u_i - u_{i-1}}{\lambda} + \lambda^3/120 \ F_{i-1}$$

$$c_i = \frac{(u_i - u_{i-1})}{\lambda} - \frac{\lambda^3}{120}(F_i - F_{i-1}) - \lambda^2/6 \left[\frac{m_i - m_{i-1}}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{6}\right.$$

$$\left.(f_{i-1} - f_i)\right] - \lambda/2 \left(m_i - \lambda^2/2 \ F_{i-1}\right]$$

با جایگزین کردن ثابت های انتگرال گیری Ai , Bi , Ci , Di

اسپلاین درجه ۵ در بازه $[x_{i-1} , x_i]$

به صورت زیر می یابیم :

$$s_\Delta(x) = \frac{\lambda^4}{120} z^{-5} F_{i-1} + \frac{\lambda^4}{120} z^5 F_i + A_i \frac{z^3}{6} + B_i \frac{z^2}{2} + c_i Z + D_i$$

$$s_\Delta(x) = \frac{\lambda_4}{360}[q_3(z) f_i + q_3(\bar{z}) F_{i-1}] + \frac{\lambda^2}{6}[q_0(z) M_i + q_0(\bar{z}) m_{i-1}] + z u_i + \bar{z} u_i - 1$$

آن در که

$$q_3(z) = 3z^5 - 10 z + 7z$$

$$q_0(z) = z^3 - z$$

به همین ترتیب می توان تابع اسپلاین را در بازه $[x_i , x_{i+1}]$ محاسبه کرد .

$$s_\Delta(u) = \frac{\lambda^4}{360}[q_3(z)F_{i+1} + q_3(\bar{z})F_i] + \frac{\lambda^2}{6}[q_0(z)m_{i+1} + q_0(\bar{z})m_i] + zu_{i+1} - \bar{z}u_i$$

$$z = \frac{x - x_i}{\lambda} \ , \quad \bar{z} = \frac{x_{i+1} - x}{\lambda}$$

برای بدست آوردن مجهولات x_i و f_i

از پیوستگی مشتقات مراتب اول و سوم تابع اسپلاین استفاده می کنیم .

بنابراین با توجه به پیوسته بودن مشتقات مرتبه kام (k=۱,۳) تابع $s_\Delta(x)$ داریم:

$$s_\Delta^k(x_i^-) = s_\Delta^k(x_i^+) \qquad i = 1\,(1)\,n - 1$$

$$\acute{s}_\Delta(x) = \frac{\lambda^3}{360}[(15z^4 - 30z^2 + 7)F_i - (15z^{-4} - 30z^{-2} + 7)F_{i-1}] + \lambda/3$$

$$[(3z^2 - 1)m_i - ((3z^2 - 1)m_{i-1} + \frac{1}{\lambda}(u_i - u_{i-1})]$$

$$\acute{s}_\Delta(\bar{x}_i) = \frac{-8}{360}\lambda^3F_i + \frac{2\lambda}{6}m_i + \frac{1}{\lambda}u_i - \frac{1}{\lambda}u_{i-1} + \frac{7}{360}F_{i-1} + \lambda/6\ m_{i-1}$$

$$\acute{s}_\Delta(x_i^-) = \frac{8}{360}\lambda^3F_i + \frac{2\lambda}{6}m_i + \frac{1}{\lambda}u_i - \frac{1}{\lambda}u_{i-1} + \frac{7}{360}F_{i-1} + \lambda/6\ m_{i-1} \qquad (1\text{-}12)$$

به همین ترتیب :

$$\acute{s}_\Delta(x_i^+) = \frac{8}{360}\lambda^3F_i + \frac{2\lambda}{6}m_i + \frac{1}{\lambda}u_i - \frac{1}{\lambda}u_{i+1} - \frac{7}{360}f_{i-1} + \frac{\lambda}{6}m_{i-1} \qquad (1\text{-}13)$$