دانشکده ی علوم

پایان نامه ی کارشناسی ارشد در رشته ی ریاضی محض (گرایش هندسه)

جبروارهای لی پواسن

توسط:

محسن رزمی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا فرهنگ دوست

مردادماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

اظهار نامه

اینجانب محسن رزمی دانشجوی رشته ریاضی گرایش هندسه دانشگاه شیراز اظهار می‌کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده‌ام نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته‌ام. هم‌چنین اظهار می‌کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه‌ام تکراری نیست و تعهد می‌نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق آیین نامه مالکیت فردی و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: محسن رزمی

تاریخ و امضاء:

به نام خدا

جبروارهای لی پواسن

به وسیله‌ی:

محسن رزمی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض – هندسه

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه‌ی:

دکتر محمدرضا فرهنگ دوست، استادیار بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر سید محمد مهدی ذکاوت ، استادیار بخش ریاضی ....

دکتر بهمن طباطبائی شوریجه، دانشیار بخش ریاضی ....

مردادماه۹۲

تقدیم به

همسر و فرزندم....

سپاسگزاری

اکنون که این رساله به پایان رسیده است بر خود فرض می‌دانم که از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمدرضا فرهنگ دوست که استاد راهنمای بنده در تهیه و تدوین این پایان نامه بوده‌اند صمیمانه قدردانی و تشکر نمایم و از خداوند منان برای ایشان سلامتی و موفقیت روز افزون خواستارم. هم‌چنین از جناب آقای دکتر بهمن طباطبائی و دکتر سید محمد مهدی ذکاوت که قبول زحمت فرمودند و مسئولیت استاد مشاوری بنده در تهیه این پایان نامه را بر عهده گرفته‌اند نیز قدردانی و سپاسگزاری به عمل می‌آورم و برای این دو استاد عزیز و مهربانم آرزوی توفیق و شادی و سلامتی روز افزون دارم. از همه اساتید بخش ریاضی که دوره کارشناسی ارشد بنده به عنوان شاگرد در محضر ایشان از معلومات و راهنمایی هایشان بهره برده ام، قدردانی و سپاسگزاری به عمل می آورم.

از پدر و مادر فداکارم و همسر مهربانم که دلسوزانه ، من را در تمامی مراحل زندگیم همراهی کرده‌اند و در مدت تهیه این پایان نامه نیز نهایت همکاری را با بنده داشته‌اند بسیار سپاسگزارم. از دوست عزیز و بزرگوارم جناب آقای عباس معارف پرور نیز که با زحمات و محبت های بی دریغشان بنده را در تهیه این رساله همراهی و راهنمایی کردند صمیمانه سپاسگزارم و برای ایشان آرزوی سلامتی و موفقیت دارم.

چکیده

جبروارهای لی پواسن

به وسیله‌ی:

محسن رزمی

در این پایان‌نامه، ابتدا جبروارهای لی را معرفی و مثال‌هایی از آن بیان می‌نمائیم. سپس ساختارهای پواسن روی فضاهای برداری، کلاف‌های برداری و منیفلدهای هموار را معرفی می‌کنیم و نگاهی اجمالی به همولوژی، کوهمولوژی و گروه‌های لی پواسن خواهیم داشت. بعد از معرفی ساختار همتافت روی منیفلدهای هموار، مفهوم براکت نیجن-هویس روی میدان‌های چندبرداری را که در واقع تعمیم براکت لی روی میدان‌های برداری و تعمیم این براکت روی چندمقطع ها می باشد، را بیان می‌نمائیم. در پایان به معرفی ساختارهای پواسن روی جبروارهای لی می پردازیم.

فهرست

فصل اول

مقدمه

مفهوم ساختارهای پواسن و کاربردهای آن یکی از مفاهیم مهم و جدید در هندسه است.

عملگر کلاسیک براکت پواسن[1] روی توابع $\mathbb{R}^n$ به صورت

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i})$$

تعریف شده است. در قرن نوزدهم پواسن متوجه این مطلب شد که صفر شدن $\{f, g\}$ و $\{f, h\}$ نتیجه می دهد که $\{f, \{g, h\}\}$ نیز صفر می شود. سی سال بعد ژاکوبی[2] رابطه‌ی

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$$

را کشف کرد که همان قضیه پواسن است.

پواسن در مطالعات خود دریافت قوانین ترکیب کلی در اتحاد ژاکوبی صدق می کند. لی[3] در مختصات موضعی شکلی که امروزه به ساختار پواسن معروف است را تعریف کرد.

[1] Poisson
[2] Jacobi
[3] Lie

پواسن، براکت خود را به عنوان ابزاری برای دینامیک کلاسیک ابداع کرد و ژاکوبی اهمیت این براکت را فهمید و خواص جبری آن را توضیح داد و لی شروع به مطالعه خواص هندسی آن کرد و پس از مدتی طولانی هندسه پواسن به عنوان یک رشته تحقیقاتی، فعال شد.

منیفلدهای پواسن به وسیله لیشن رویز [۴] معرفی شد و خواص آن بعدها به وسیله وینستن[۵] مورد مطالعه قرار گرفت. منیفلدهای پواسن، منیفلدهای هموار همراه با یک براکت پواسن روی حلقه این توابع می باشند. یک جبروار لی یک کلاف برداری با یک براکت لی روی فضای مقاطعی است که خواص آن شبیه به کلاف مماس است.

این پایان نامه شامل ۳ فصل است. در فصل اول مفاهیم و تعاریف مقدماتی برای درک و فهم بهتر مطالب اصلی دو فصل دیگر آورده شده است. در فصل دوم جبروارهای لی را معرفی می کنیم و در ادامه ی آن مثال ها وگزاره هایی از جبروارهای لی را می آوریم. در فصل سوم ابتدا ساختار های پواسن روی فضای برداری، روی کلاف برداری و روی منیفلدهای هموار را معرفی می کنیم و ساختار پواسن خطی روی فضاهای برداری را بیان می نماییم. نشان می دهیم یک تناظر یک به یک بین جبرهای لی و ساختارهای پواسن خطی روی فضاهای برداری برقرار است. پس از آن براکت اسشوتن – نیجن هویس[۶] روی میدان‌های چندبرداری و هم چنین براکت اسشوتن – نیجن هویس تعمیم یافته روی میدان های چند مقطع از جبروارهای لی را معرفی می کنیم. در آخر پس از معرفی اجمالی کوهمولوژی و گروهای لی پواسن، جبروارهای لی پواسن را معرفی می کنیم.

---

[4] Lichnerowicz
[5] Weinstein
[6] Schoten-Nijenhuis

۱-۱ توابع چندخطی روی فضاهای برداری

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم V یک فضای برداری و k یک عدد صحیح نامنفی باشد. تابع $f: V^k \to \mathbb{R}$ را k–خطی می گوییم هرگاه f روی هر مولفه این تابع خطی باشد،یعنی

$$f(\dots, av + b\omega, \dots) = af(\dots, v, \dots) + bf(\dots, \omega, \dots)$$

$$a, b \in \mathbb{R}, v, \omega \in V$$

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنیم k یک عدد طبیعی باشد، یک جایگشت از مجموعه $\{1, \dots, k\}$ یک تابع دوسویی $\sigma: A \to A$ می باشد.

گروه تمام جایگشت های مجموعه $\{1, \dots, k\}$ را با S_k نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۱-۳. تابع k –خطی $f: V^k \to \mathbb{R}$ را متقارن می گوییم هرگاه

$$f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\right) = f(v_1, \dots, v_k) \qquad \forall \sigma \in S_k$$

و این تابع را متناوب می گوییم هرگاه

$$f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\right) = sgn\sigma \;\; f(v_1, \dots, v_k) \qquad \forall \sigma \in S_k$$

فضای برداری شامل تمام توابع k – خطی متناوب V برای هر k را با $A_k(V)$ نمایش می دهیم. هر عضو $A_k(V)$ را یک k–تنسور یا یک k–هم بردارمی گوییم.

تعریف ۱-۱-۴. اگر f یک تابع k –خطی روی فضای برداری V و σ یک جایگشت متعلق به S_k باشد، تابع k -خطی σf را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(\sigma f)(v_1, \dots, v_k) = f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\right)$$

توجه. فرض کنید V فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. برای $k = 0$، $A_0(V) = \mathbb{R}$.

تعریف ۱-۱-۵. اگر f یک تابع k – خطی روی فضای برداری V باشد، تابع k – خطی متقارن Sf و تابع k –خطی متناوب Af را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Sf(v_1, \dots, v_k) := \sum_{\sigma \in S_k} f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\right)$$

$$Af(v_1, \dots, v_k) := \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\sigma)\, f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\right)$$

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم f یک تابع k – خطی و g یک تابع l–خطی باشد ضرب تنسوری g, f را با نماد $f \otimes g$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k) g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

تعریف ۱-۱-۷. اگر $g \in A_l(V), f \in A_k(V)$ باشد ضرب گوه ای g, f را با نماد $f \wedge g$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (sgn\sigma) f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}\right) g\left(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}\right)$$

فرض کنیم $e_1, \dots, e_n$ یک پایه برای فضای برداری V و $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ یک پایه برای فضای دوگان V یعنی V^* باشد. اگر $I = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ آنگاه نمادهای e_I و α^I را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$e_I = \left(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\right)$$

$$\alpha^I = \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}$$

گزاره ۱-۱-۸ . توابع k–خطی α^I تشکیل پایه برای $A_k(V)$ می دهد.

اثبات. رجوع کنید به فصل سوم مرجع [14]

۲-۱ منیفلدهای هموار

تعریف ۱-۲-۱ . یک فضای توپولوژیکی را "شمارای نوع دوم" می‌نامند، هرگاه دارای یک پایه توپولوژی شمارا باشد.

تعریف ۱-۲-۲. یک فضای توپولوژی X را "هاسدورف"می‌نامند، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، همسایگی‌های U از x و V از y در X موجود باشند بقسمی که $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۱-۲-۳. یک فضای توپولوژیکی M را "موضعاً اقلیدسی از بعد n" می‌نامند، هرگاه برای هر $p \in M$ یک همسایگی U از p در M و یک همسانریختی φ از U به زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ موجود باشد که

$$\varphi: U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

دوتایی (U, φ) را یک "چارت" و U را یک "همسایگی مختصات" یا یک "مجموعه باز مختصات"و φ را یک "نگاشت مختصات" و یا یک "دستگاه مختصات"روی U می‌نامند. یک چارت (U, φ) حول p یعنی (U, φ) یک چارت است و $p \in U$.

تعریف ۱-۲-۴. "منیفلد توپولوژیکی از بعد n"، یک فضای توپولوژیکی هاسدورف، شمارای نوع دوم و موضعاً اقلیدسی از بعد n است.

تعریف ۱-۲-۵. فرض‌کنیدکه مختصات روی $\mathbb{R}^n$ به صورت $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ، U زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ ، $f: U \to \mathbb{R}$ یک تابع و k عددی صحیح و نامنفی باشد. تابع f در $p \in U$، تابع C^k می گوییم هرگاه مشتقات جزیی f یعنی $\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}}$ برای هر $j \leq k$؛ در p موجود و پیوسته باشند. تابع f در p، C^∞ است هرگاه برای هر $k \geq 0$، f در p تابع C^k باشد، به عبارت دیگر مشتقات جزیی f از همه مراتب در p موجود و پیوسته باشند. تابع f روی U ، C^k می گوییم هرگاه برای هر $p \in U$ ، f در p، C^k باشد. به طور مشابه تابع f روی U، C^∞ است هرگاه برای هر $p \in U$، f در p، C^∞ باشد.

تعریف ۱-۲-۶. فرض کنید که U زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ و $f: U \to \mathbb{R}^m$ یک تابع به صورت $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ، k عددی صحیح و نامنفی باشد و $p \in U$. تابع f در p، C^k است هرگاه برای هر $i = 1,2,, \dots, m$ ، f_i در p، C^k باشد؛ تابع f در p، C^∞ است هرگاه هر f_i در p، C^∞ باشد. هم چنین گوییم f روی U، C^k است هرگاه f در هر نقطه از U، C^k باشد. به طور مشابه گوییم f روی U، C^∞ است هرگاه f در هر نقطه از U، C^∞ باشد. (توجه کنید که f_i ها توابعی به صورت $f_i: U \to \mathbb{R}$ هستند.) اگر $f: U \to \mathbb{R}^m$ تابعی C^∞ باشد، گوییم f تابعی "هموار" است.

تعریف ۱-۲-۷. دو چارت $(U, \varphi: U \to \mathbb{R}^n)$ و $(V, \psi: V \to \mathbb{R}^n)$ از یک منیفلد توپولوژیکی "C^∞-سازگار" می گوییم ، هرگاه نگاشت‌های

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

و

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

نگاشت‌هایی C^∞ باشند. نگاشت‌های $\varphi \circ \psi^{-1}$ و $\psi \circ \varphi^{-1}$ را "توابع انتقال" بین دو چارت بالا می‌نامند. اگر $U \cap V$ تهی باشد، آنگاه دو چارت خود به خود C^∞-سازگار هستند.

تعریف ۱-۲-۸. یک "C^∞-اطلس" یا به طور ساده یک "اطلس" روی یک فضای موضعاً اقلیدسی M، یک گردایه $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ از چارت‌های C^∞-سازگار است به طوری که M را می‌پوشانند. یعنی $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. یک چارت (V, ψ) سازگار با اطلس $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ است هرگاه چارت (V, ψ) با همه‌ی چارت‌های $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ از این اطلس سازگار باشد.

تعریف ۱-۲-۹. یک اطلس $\mathfrak{A}$ روی یک فضای موضعاً اقلیدسی M "ماکسیمال" می گوییم ، هرگاه این اطلس در یک اطلس بزرگ‌تر قرار نگیرد؛ به‌بیان دیگر اگر $\mathfrak{M}$ اطلس دیگری روی M باشدکه شامل $\mathfrak{A}$ است آنگاه $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$.

تعریف ۱-۲-۱۰. یک "منیفلد هموار n-بعدی" یا یک "C^∞-منیفلد n-بعدی"، یک منیفلد توپولوژیکی n-بعدی M است همراه با یک اطلس ماکسیمال روی M. این اطلس ماکسیمال را "ساختار دیفرانسیل پذیر روی M" می نامند.

گزاره ۱-۲-۱۱. هر اطلس $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ روی یک فضای موضعاً اقلیدسی درون یک اطلس ماکسیمال منحصر به فرد قرار می‌گیرد.

اثبات. رجوع کنید به فصل پنجم مرجع [14].

با توجه به گزاره‌ی فوق، برای این که نشان دهیم یک فضای موضعاً اقلیدسی M یک منیفلد هموار است، کافی است نشان دهیم که M هاسدورف، شمارای نوع دوم و دارای یک C^∞-اطلس است.

۱-۳ مثال هایی از منیفلد های هموار

مثال۱-۳-۱. فرض کنید که n عدد طبیعی و $r^1, r^2, \dots, r^n$ مختصات استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ باشند، فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ همراه با چارت $(\mathbb{R}^n, r^1, r^2, \dots, r^n)$، یک منیفلد هموار است.

مثال ۱-۳-۲. فرض کنید که M یک منیفلد n-بعدی باشد و V زیر مجموعه بازی از M باشد، در این‌صورت V نیز یک منیفلد هموار با همان بعد n است؛ اگر $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ یک اطلس برای M باشد، آنگاه گردایه $\{(U_\alpha \cap V, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap V})\}_\alpha$ یک اطلس برای V است، جایی که $\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap V}: U_\alpha \cap V \to \mathbb{R}^n$ تحدید φ_α به زیر مجموعه $U_\alpha \cap V$ است.

مثال ۱-۳-۳. فرض کنید که U زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ و $f: U \to \mathbb{R}^m$ تابعی هموار باشد، نمودار f به صورت زیر تعریف می شود

$$graph\ (f) = \Gamma f = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}^m\}.$$

حال توجه کنید که نگاشت

$$\varphi: \Gamma f \to U$$
$$(x, f(x)) \mapsto x$$

و نگاشت

$$1 \times f: U \to \Gamma f$$
$$x \mapsto (x, f(x))$$

نگاشت‌هایی پیوسته و معکوس یکدیگر هستند. لذا این نگاشت ها همسانریختی هستند. نمودار f دارای یک اطلس با تنها چارت $(\Gamma f, \varphi)$ است، بنابر این نمودار f یک منیفلد هموار است.

مثال ۱-۳-۴. فرض کنید که m و n دو عدد صحیح مثبت و $M_{m\times n}(\mathbb{R}^n)$ فضای برداری همه ماتریس های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. از آنجایی که $M_{m\times n}(\mathbb{R}^n)$ با $\mathbb{R}^{mn}$ یکریخت است (به عنوان فضای برداری)، توپولوژی روی $\mathbb{R}^{mn}$ را به $M_{m\times n}(\mathbb{R}^n)$ انتقال می‌دهیم. حال "گروه خطی عمومی" $Gl(n, \mathbb{R})$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Gl(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \det A \neq 0\} = det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

از آنجا که تابع دترمینان $det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است، لذا $Gl(n, \mathbb{R})$ یک زیر مجموعه باز از $M_{n\times n}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ و بنابراین یک منیفلد است.

مثال ۱-۳-۵. فرض کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد، در این صورت n-کره واحد S^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1 \}$$

می توان نشان داد که S^n یک منیفلد هموار n-بعدی است.

۴-۱ نگاشت های هموار روی منیفلدها

تعریف ۱-۴-۱. فرض کنید که M و N منیفلدهای هموار باشند، در این صورت $M \times N$ با توپولوژی حاصلضربی یک فضای هاسدورف و شمارای نوع دوم است. با استفاده از گزاره زیر نتیجه می‌گیریم که $M \times N$ نیز یک منیفلد هموار است. این منیفلد را "منیفلد حاصل‌ضربی" می نامند.

گزاره ۱-۴-۲. فرض کنید که $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ یک اطلس برای M و $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_\beta$ یک اطلس برای N باشد، در این صورت گردایه‌ی

$$\left\{\left(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^{m+n}\right)\right\}_{\alpha,\beta}$$

یک اطلس برای $M \times N$ است. (رجوع کنید به فصل پنجم مرجع [14].)

نتیجه ۱-۴-۳. اگر M یک منیفلد هموار از بعد m و N یک منیفلد هموار از بعد n باشد، آنگاه منیفلد حاصلضربی $M \times N$ از بعد $m + n$ است.

مثال ۱-۴-۴. با استفاده از گزاره‌ی فوق نتیجه می شود که فضاهای $S^1 \times \mathbb{R}$ (استوانه) و $S^1 \times S^1$ (چنبره) منیفلد هستند.

تعریف ۱-۴-۵. فرض کنید که M یک منیفلد n-بعدی باشد، تابع $f: M \to \mathbb{R}$ در $p \in M$، C^∞ یا هموار می گوییم، هرگاه یک چارت (U, φ) حول p از اطلس M موجود باشد به طوری که نگاشت $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $\varphi(p)$، C^∞ باشد.

توجه کنید که این تعریف، مستقل از انتخاب چارت (U, φ) برای p است؛ زیرا اگر (V, ψ) چارت دیگری از اطلس M حول p باشد، در این‌صورت روی $\psi(U \cap V)$ داریم

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

که در $\psi(p)$، C^∞ است. تابع f روی M را C^∞ یا هموار است هرگاه f در هر نقطه از M، C^∞ باشد. گردایه‌ی همه‌ی توابع حقیقی مقدار و هموار روی M را با $C^\infty(M)$ نمایش

می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید که $C^{\infty}(M)$ همراه با عمل جمع توابع و ضرب اسکالر اعداد حقیقی یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است.

تعریف ۱-۴-۶ . فرض کنید که N منیفلدی از بعد n، M منیفلدی از بعد m و $F: N \to M$ یک تابع باشد. تابع F در $p \in N$، C^{∞} است هرگاه یک چارت (V, ψ) در M حول $F(p)$ و یک چارت (U, φ) در N حول p وجود داشته باشد به طوری که تابع $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $\varphi(p)$، C^{∞} باشد. از آنجایی که اطلس‌های روی M و N، C^{∞} هستند بنابراین تعریف C^{∞} بودن F در نقطه p مستقل از انتخاب چارت های (V, ψ) و (U, φ) است. تابع F را C^{∞} یا هموار است هرگاه F در هر نقطه از N، C^{∞} باشد. F را "دیفیومورفیسم"می‌نامند هرگاه F تابعی دوسویی و هموارباشد و F^{-1} نیز تابعی هموار باشد.

گزاره ۱-۴-۷. فرض کنید که M، N و P منیفلدهایی هموار و $F: N \to M$ و $G: M \to P$ نگاشت‌هایی C^{∞} باشند، آنگاه ترکیب این دو نگاشت یعنی $G \circ F: N \to P$، نگاشتی C^{∞} است.

اثبات. رجوع کنید به فصل ششم مرجع [14]

۱-۵ مشتق جهتی

فرض کنید $p \in \mathbb{R}^n$. معادله پارامتری خطی‌که از نقطه $p = (p^1, \dots, p^n)$ می‌گذرد و بردار موازی آن، بردار $v = (v_1, \dots, v_n)$ می‌باشد به صورت زیر است

$$c(t) = (p^1 + tv_1, \dots, p^n + tv_n)$$

$$c(t) = p^i + tv_i$$