دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش تجزیه آدومیان برای محاسبه مقادیر ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل مقدار مرزی

استاد راهنما

دکتر حسین خیری استیار

استاد مشاور

دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام

پژوهشگر

نفیسه علی پور اصل

۱۳۸۷

جهان آکنده از زیبایی است
از زمین زیر پای تا آسمان بالای سر
و از ابر و موج تا کاغذ ابر و ماه
از افسون نظم تا نظام بی‌نظمی
از ریاضیات که شانهٔ زلف پریشان عالم است
تا نسیم شعر که بید مجنونِ دل را پریشان می‌کند
همه جا نشانی از آن زیباست که نامش اوست
که نامش هوست.

دکتر حسین الهی قمشه‌ای

تقدیم به:

پدر بزرگوار

و

مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

پروردگار بزرگ را شاکرم که مرا در تهیه این پایاننامه یاری نمود، از خانواده عزیزم و همه اساتیدی که در طول دوران تحصیل از راهنمایی‌های آنها بهره‌های فراوان برده‌ام، بسیار سپاسگذارم.

از آقای دکتر خیری که زحمت راهنمایی این پایاننامه را پذیرفتند کمال تشکر را دارم، می‌دانم که هرگز نخواهم توانست ذره‌ای از محبت های ایشان را جبران کنم.

از زحمات جناب آقای دکتر جدیری که استاد مشاور و آقای دکتر عبادی استاد داور جلسه دفاعیه نهایت تشکر را دارم.

همچنین از اساتید دیگرم از جمله جناب آقای دکتر جبارزاده، دکتر رحیمی، دکتر شهمراد و تمامی اساتید و دوستانی که مشوق من بوده‌اند، متشکرم.

در پایان از زحمات مسؤولین کتابخانه دانشکده ریاضی خانمها ایزان و زحمتی و مسؤول امور دانشجویان دانشکده ریاضی خانم فروغی بسیار تشکر می‌نمایم.

نفیسه علی پور اصل

مهر ۸۷

نام خانوادگی دانشجو: علی پور اصل نام: نفیسه

عنوان: روش تجزیه آدومیان برای محاسبه مقادیر ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل مقدار مرزی

استاد راهنما : دکتر حسین خیری استیار

استاد مشاور: دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۷ تعداد صفحه: ۱۲۷

کلید واژه‌ها: مسأله اشتورم ـ لیوویل، روش تجزیه آدومیان، مقادیر ویژه

چکیده

در این پایاننامه، ابتدا روش تجزیه آدومیان را برای حل مسائل دیفرانسیل و معادلات انتگرال بکار برده، n امین مقدار ویژه مسأله اشتورم ـ لیوویل با شرایط مرزی منظم، خودالحاق و جداشده تقریب زده می‌شود.
با استفاده از روش آدومیان جواب بصورت سری بدست می‌آید. همچنین در این پایاننامه روش آدومیان با روش‌های دیگر مقایسه شده است؛ مثال‌های عددی نشان می‌دهد که روش فوق علاوه بر اینکه در عمل آسان است، نتایج دقیقی را ارائه می‌دهد.

فهرست مطالب

مقدمه

روش تجزیه آدومیان که در حل مسائل دیفرانسیل و معادلات انتگرال خطی و غیر خطی بکار می‌رود، در سال‌های اخیر در ریاضیات کاربردی و علوم مهندسی توجه بسیاری را به خود جلب کرده است.

این روش در سال ۱۹۸۴ توسط آدومیان معرفی شد [۸]، در سال ۱۹۹۹ روش آدومیان اصلاح یافته و در سال ۲۰۰۱ روش آدومیان اصلاح یافته جدید به وسیله وازواز [1] ارائه شد.

در روش آدومیان جواب بصورت سری است که اغلب این سری بسط تیلور یک تابع تحلیلی است. ثابت می‌شود این روش همواره همگرا می‌باشد [۴، ۱۴].

در سال ۲۰۰۵ برای اولین بار روش تجزیه آدومیان در بدست آوردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل مقدار مرزی مرتبه دوم مورد استفاده قرار گرفت [۱۲]، در سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ این روش در مورد یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مسائل مرتبه چهارم [۱۱] و مرتبه ششم [۱۳]، بکار رفت. مقایسه بین مقادیر ویژه محاسبه شده با روش آدومیان در چند مثال آزمون با جواب اصلی مسأله یا جوابی که با روش های دیگر مثل روش تفاضلات مرکزی [۲۶]، نیومرو [۹] و تبدیلات دیفرانسیل [۲۵] بدست آمده، نشان می‌دهد که این روش دارای سرعت و دقت بالایی است.

در این پایاننامه برای بررسی دقت روش آدومیان از روش $matslise$ [۲۸] استفاده شده، این روش بصورت برنامه‌ای در نرم افزار مطلب است و توسط ورل لیدوکس [2] ارائه شده است.

روش $matslise$ مقادیر ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل را در مدت زمان کوتاهی، با دقت خیلی خوب محاسبه می‌کند.

روش تجزیه آدومیان در حل معادلات مختلف و ارائه جواب به صورت یک سری همگرا،

[1] Wazwaz

[2] Veerle Ledoux

نیز خیلی سریع و با دقت قابل قبولی عمل می‌کند [۳۶].

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی با آنها روبرو می‌شویم، می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱ معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

هدف از حل معادله دیفرانسیل، یافتن تابعی است که به ازای هر x در معادله صدق کند.

معادله دیفرانسیل معمولی

تعریف ۲.۱ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام بصورت

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

یا

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

است.

نکته: در معادله دیفرانسیل معمولی تنها یک متغیر مستقل وجود دارد.

تعریف ۳.۱ مرتبه بالاترین مشتق موجود در یک معادله را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌نامند.

تعریف ۴.۱ معادله دیفرانسیل به فرم

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

را خطی می‌گویند.

تعریف ۵.۱ منظور از $C^m[a, b]$ مجموعه توابع تعریف شده روی $[a, b]$ هستند که دارای مشتق mام پیوسته است.

قضیه ۶.۱ (قضیه تیلور): اگر $f(x)$ تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه x_0 دارای مشتقات متوالی تا مرتبه $(n+1)$ ام باشد، در اینصورت تابع $f(x)$ را در هر نقطه x متعلق به این همسایگی، می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{h!}f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

که در آن:

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k f}{dx^k}|_{x=x_0}$$

$$h = x - x_0$$

و ξ نقطه ای بین x_0 و x است.

برهان. رجوع کنید به [۲]. □

معرفی نمادهای o و O

تعریف ۷.۱ اگر f و g دو تابع با متغیرهای مختلط با دامنه مشترک D باشند، در اینصورت گوییم $f(z) = O(g(z))$ ، هرگاه یک ثابت مثبت k و $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوری که برای z های به اندازه کافی نزدیک به z_0، رابطه

$$\forall z : |z - z_0| < \delta \implies |f(x)| \leq k|g(x)|$$

یا

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = k$$

برقرار باشد.

تعریف ۸.۱ گوییم $f(z)=o(g(z))$ هر گاه رابطه

$$\forall z \quad \forall \epsilon \quad \exists \delta>0 \ \ s.t: \ |z-z_0|<\delta \implies |f(x)|<\epsilon|g|$$

و یا $\lim\limits_{z\longrightarrow z_0}\dfrac{|f(z)|}{|g(z)|}=0$ برقرار باشد.

مسأله مقدار مرزی

تعریف ۹.۱ اگر معادله مرتبه دوم در حالت خاص دارای شرایطی در دو نقطه جداگانه $x_0=a$ و $x_0=b$ باشد، آنگاه مسأله مقدار مرزی را خواهیم داشت.

به عنوان مثال مسأله زیر یک مسأله مقدار مرزی است:

$$y''=f(x,y), \qquad y(a)=A, \qquad y(b)=B. \tag{۱.۱}$$

روش k گامی خطی

در این روش [۲۷]، بازه $[a,b]$ را به N قسمت مساوی تقسیم می کنیم:

$$a=x_0<\ x_1<\ x_2<\ x_3\ <\ \cdots<\ x_N=b$$

که

$$h=\ \frac{b-a}{N}, \qquad\qquad x_i=a+ih$$

است.

روش k گامی خطی برای مسأله مقدار مرزی (۱.۱) در بازه $[x_0,x_N]$، بصورت زیر است:

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}, \qquad\qquad n=0,1,\cdots,N-k.$$

که در آن (α_j) ها و (β_j) ها ضرایب ثابت و $y_{n+j}=y(x_{n+j})$ و $f_{n+j}=f(x_{n+j})$ می‌باشد.

از طرفی $y_0=y(x_0)$ و $f_0=f(x_0,y_0)$ و y_N و f_N معلوم هستند.

روش دوگامی **نیومرو** [۲۷]، در بازه $[x_0, x_N]$ بصورت زیر است:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h^2}{12}(f_{n+2} + 10f_{n+1} + f_n), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-2. \quad (۲.۱)$$

قضیه ۱۰.۱ (قضیه منحصر به فردی): فرض کنید مسأله مقدار مرزی

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

بر مجموعه

$$D = \{(x, y, y')| \, a \leq x \leq b, \, -\infty < y < \infty, \, -\infty < y' < \infty\}$$

پیوسته بوده و $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ بر D پیوسته باشند. هر گاه

۱) به ازای هر $(x, y, y') \in D$ داشته باشیم $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0$ و

۲) یک ثابت M وجود داشته باشد که به ازای هر $(x, y, y') \in D$ ،

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')| \leq M$$

آنگاه مسأله مقدار مرزی فوق جواب منحصر به فرد دارد.

برهان. رجوع کنید به [۱]. □

معادله خود الحاق

معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

که روی بازه I تعریف شده است. با انتگرالگیری جز به جز $zL[y]$ از a به x داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^x zL[y]dx &= [(za_0)y' - (za_0)'y + (za_1)y]_a^x \\ &\quad + \int_a^x [(za_0)'' - (za_1)' + (za_2)]ydx \end{aligned}$$

حال، اپراتور مرتبه دوم $L^\star$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L^\star[z] &= (za_0)'' - (za_1)' + (za_2) \\ &= a_0 z'' + (2a_0' - a_1)z' + (a_0'' - a_1' + a_2)z \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\int_a^x (zL[y] - yL^\star[z])dx = [a_0(y'z - yz') + (a_1 - a_0')yz]_a^x$$

اپراتور $L^\star$، اپراتور الحاق متناظر با اپراتور L نامیده می‌شود. همچنین الحاق اپراتور $L^\star$، L است.

اگر L و $L^\star$ یکسان باشند، L **خود الحاق** [۳۰] نامیده می‌شود.

شرط لازم و کافی برای اینکه L خود الحاق باشد، این است که:

$$a_1 = 2a_0' - a_1,$$

$$a_2 = a_0'' - a_1' + a_2$$

یعنی:

$$a_1 = a_0'$$

بنابراین، اگر L خود الحاق باشد، داریم:

$$\begin{aligned} L[y] &= a_0 y'' + a_0' y' + a_2 y \\ &= (a_0 y')' + a_2 y \end{aligned}$$

در حالت کلی $L[y]$ خود الحاق نیست. اما اگر داشته باشیم:

$$h(x) = \frac{1}{a_0} exp \int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt$$

بنابراین $h(x)L[y]$ خود الحاق می‌شود. چون:

$$\begin{aligned} h(x)(a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y) &= e^{\int^x \frac{a_1}{a_0} dt} y'' + \frac{a_1}{a_0}\, e^{\int^x \frac{a_1}{a_0} dt} y' + \frac{a_2}{a_0}\, e^{\int^x \frac{a_1}{a_0} dt} y \\ &= (e^{\int^x \frac{a_1}{a_0} dt} y')' + \frac{a_2}{a_0}\, e^{\int^x \frac{a_1}{a_0} dt} y \end{aligned}$$

بنابراین در صورتی که $a_0 > 0$ یا $a_0 < 0$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را می توان به فرم خود الحاق نوشت:

$$\frac{d}{dx}[p\,(x)\frac{dy}{dx}] + q(x)y = 0$$

که در آن:

$$p\,(x) = exp\int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt$$
$$q(x) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)}\,exp\int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt$$

که با ضرب $h(x)$ در $L[y]$ بدست می آید.

معادله دیفرانسیل جزیی

تعریف ۱.۱۱ اگر در معادله دیفرانسیل بیش از یک متغیر مستقل وجود داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل جزئی [۳۰] می‌نامند.

به عنوان مثال یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با دو متغیر مستقل x و y بصورت

$$L[u] = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \qquad (۱.۳)$$

نوشته می شود، که شامل متغیر های مستقل x ، y و تابع مجهول u از این متغیر ها و مشتقات جزئی u_x، u_y، u_{xx}، u_{xy} و u_{yy} از تابع u است. در این معادله، دامنه مناسب D را فضای 2 بعدی $\mathbb{R}^2$ برای متغیر های مستقل x و y در نظر می گیریم.

ما در جستجوی یافتن تابع $u = u(x, y)$ هستیم که در رابطه (۱.۳) در دامنه D صدق کند. چنین توابعی اگر موجود باشند، جواب‌های معادله (۱.۳) نامیده می‌شوند. برای داشتن یک جواب خاص باید شرط های مناسبی را به معادله اضافه کنیم. در این حالت معادله به مسأله دیفرانسیل جزئی تبدیل می‌شود.

تعریف ۱۲.۱ یک اپراتور دیفرانسیل جزیی، خطی نامیده می‌شود اگر در حالت کلی داشته باشیم:

$$\forall u_1, u_2 \qquad L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2],$$

که c_1 و c_2 ثابت هستند.

این حالت را می‌توانیم به تعداد متناهی اپراتور تعمیم دهیم.

اگر u_1 و u_2 و ... u_k تابع و c_1 و c_2 و ... c_k ثابت باشد، آنگاه:

$$L[\sum_{j=1}^{k} c_ju_j] = \sum_{j=1}^{k} c_jL[u_j].$$

معادله انتگرالی

تعریف ۱۳.۱ یک معادله انتگرال [۳] معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.

به عنوان مثال معادله زیر معادله انتگرالی است که تابع $u(x)$ تابع مجهول و $F(x,t)$ هسته معادله است:

$$u(x) = f(x) + \int_a^b F(x,t)u(t)\, dt$$

متداول ترین معادلات انتگرال را می‌توان به دو گروه معادلات انتگرال **فردهلم** و معادلات انتگرال **ولترا** دسته‌بندی کرد:

معادله انتگرال فردهلم نوع اول:

$$f(x) = \int_a^b F(x,t,u(t))dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

معادله انتگرال فردهلم نوع دوم:

$$u(x) = \int_a^b F(x,t,u(t))dt + f(x), \qquad a \leq x \leq b.$$

معادله انتگرال ولترای نوع اول:

$$f(x) = \int_a^x F(x,t,u(t))dt$$

معادله انتگرال ولترای نوع دوم:

$$u(x) = \int_a^x F(x,t,u(t))dt + f(x) \tag{۴.۱}$$

در معادلات انتگرال فوق در صورتی که هسته F نسبت به مؤلفه سوم، خطی باشد معادله را خطی و در غیر این صورت معادله را غیرخطی می گوییم.

تعریف ۱۴.۱ مجموعه توابع انتگرال پذیر را با $L(I)$ نشان می‌دهیم:

$$L(I) = \{\, f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_I |f(x)|\, dx < \infty \,\}$$

تعریف ۱۵.۱ معادله انتگرالی زیر معادله انتگرالی **فردهلم ـ ولترا** [۳۳] نامیده می‌شود:

$$u(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \int_\Omega F(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{۵.۱}$$
$$(x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

که در آن $u(x,t)$ تابع مجهول، $f(x,t)$ و $F(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau))$ توابع تحلیلی روی $D = \Omega \times [0,T]$ و Ω زیر مجموعه بسته‌ای از $\mathbb{R}^n$، $n = 1,2,3$ می‌باشد.

قضیه ۱۶.۱ فرض کنیم F و f در معادله انتگرالی (۴.۱)، دارای شرایط زیر باشند:

۱) F انتگرالپذیر و کراندار است و در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند:

$$|F(x,t,z) - F(x,t,z')| \leq\, L\,|z - z'|,$$

که $L \in (0,1)$ ثابت لیپ شیتز می‌باشد.

۲) f انتگرالپذیر و کراندار در $x \in [a,b]$ است.

در این صورت معادله (۴.۱) جواب منحصر بفرد دارد.

برهان. رجوع کنید به [۱۰]. □

قضیه ۱۷.۱ (تقریب های متوالی): فرض کنیم D یک ناحیه باز، همبند و غیرتهی از $\mathbb{R}^2$ باشد. مستطیل S در ناحیه D را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$S = \{\, (t,x) : \quad |t-\tau| \leq a,\ |x-\zeta| \leq b\}$$

تابع $f(t,x)$ در ناحیه D پیوسته است و در S در شرط لیپ شیتز صدق می کند.

بازه زیر را در نظر می گیریم:

$$|\, t-\tau| \leq c,$$

که در آن:

$$c = \min\{a, b/M\}, \qquad M = \max_{(t,x)\in S} |f(t,x)|$$

در این صورت تقریب های متوالی

$$y_{n+1}(t) = y_0(t) + \int_\tau^t f(s, y_n(s))ds \qquad n = 0, 1, \cdots$$

در بازه فوق وجود داشته و پیوسته است و به تنها جواب مسأله همگرای یکنواخت می‌باشد.

برهان. رجوع کنید به [۲۹]. □

گزاره ۱۸.۱ فرمول زیر انتگرال‌های چندگانه را به یک انتگرال یگانه تبدیل می کند:

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n \cdots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt.$$

اثبات این فرمول در اکثر کتاب های ریاضی عمومی وجود دارد.