بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پيام نور

دانشكده علوم پايه و كشاورزي

گروه علمي9 علوم پايه

پايان نامه

براي دريافت درجه كارشناسي ارشد

رشته رياضي كار بردي گرايش آناليز عددي

عنوان پايان نامه9

روش تجزيه ادوميان براي حل معادله غير خطي با ضرايب متغير موج بلند

استاد راهنما9

آقاي دكتر سهرابعلي يوسفي

استاد مشاور9

خانم دكتر فهيمه سلطانيان

نگارش9

ليلا منصوري

آذر 0278

تقدیر تشکر :

از استاد گرامی جناب آقای دکتر سهرابعلی یوسفی به خاطر راهنمایی های ارزنده اش در تهیه پایان نامه تشکر می کنم و قدر دان زحمت هایش می باشم.

خانم دکتر فهیمه سلطانیان از شما به خاطر قبول زحمت مشاوره و کمک های بی دریغتان در تدوین پایان نامه بسیار سپاسگذارم.

از داوران محترم به خاطر مطالعه و داوری این پایان نامه کمال تشکر را دارم.

وهمچنین صمیمانه از دوست گرامی ام خانم لیلا محمدی به خاطر کمک هایش قدر دانی می کنم.

تقدیم به :

همسر دلسوزم که همواره یار و همراه من بوده است،

وبه دخترانم

صدف و ستایش.

فهرست مطالب

فصل چهارم: حل معادله موج- بلند با روش تجزیه ادومیان ۶۸-۸۹

چكيده

بسياري از پديده هاي فيزيكي براي تبين بهتر، با استفاده از معادلات ديفرانسيل معمولي و جزئي به فرمهاي رياضي مدل بندي مي شوند. حل تحليلي اينگونه معادلات بجز در موارد ساده كاري بسيار دشوار وسخت است. لذا هدف عمده ما يافتن روشهاي عددي با خطاي مطلق پائين وپايداري بالا نسبت به روشهاي موجود براي حل DGRLW معادله غير خطي موج- بلند با ضرايب متغير مي باشد.يكي از روشهايي كه بسيار مورد توجه محققان قرار گرفته، روش تجزيه ادوميان است. الگوريتم ساده، خطاي محاسباتي پائين و نگاه ويژه آن به معادلات غير خطي، برتري خاصي را نسبت به ديگر روشها در آن متبلور ساخته است.در اين روش u را به صورت سري $u=\sum_{uuu}^{u} u_u$ در نظر مي گيريم. همچنين تركيب غير خطي $\mathrm{N(u)}$ را به صورت $\mathrm{N(u)}=\sum_{uuu}^{u} \mathrm{A}_u\ (\mathrm{u}_u, \mathrm{u}_u, \dots, \mathrm{u}_u)$ نمايش مي دهيم، كه A_u چند جمله اي هاي ادوميان مي باشند. هدف به دست آوردن تر كيبات u_u ها ودر نهايت بدست آوردن تقريب مناسب براي سري جواب مي باشد.

واژه هاي كليدي9 روش تجزيه ادوميان [0] **-** موج بلند [۱]

---

۱ - Adomian decomposition method

۲ - Long-wave

پيشگفتار9

وجود معادلات ديفرانسيل معمولي و جزئي در بسياري از علوم و مهندسي و ... ارائه راه حل هاي عددي معتبر كه داراي دقت لازم در جواب هستند، را ضروري ساخته است. در اين تحقيق سعي شده است كه روش تجزيه ادوميان را براي حل معادله ديفرانسيل غير خطي موج بلند با ضرايب متغير مورد استفاده قرار دهيم، اين روش بدون گسسته سازي و خطي سازي وايجاد محدوديتهاي اضافي معادلات ديفرانسيل جزئي و معادلات انتگرال خطي و غير خطي را به سادگي و با سرعت همگرا يي خوب حل مي كند. در فصل اول اين پژوهش تعاريف مقدماتي مورد نياز فصل هاي بعدي آورده مي شود. در فصل دوم، روش تجزيه ادوميان همراه با تاريخچه اين روش به طور كامل معرفي مي گردد، وسپس كاربرد هايي از روش تجزيه ادوميان براي حل معادله برگر[0] و بنجامين اثو[1] و... مورد بحث و بررسي قرار گرفته است. سپس روش ديگري براي بدست آوردن چندجمله اي هاي ادوميان معرفي گرديده ومثالهاي قسمت قبل با اين روش جديد حل مي شوند.

در فصل سوم مختصري در مورد تاريخچه معادلات انتگرال آورده شده است، سپس انواع مختلف معادلات انتگرال معرفي و با روش تجزيه حل مي گر دنند، در انتها ي اين بخش معادلات ديفرانسيل جزئي سهموي، بيضوي وهذلولوي نيز با اين روش حل مي شوند.

در فصل چهارم ضمن معرفي معادله موج بلند كاربرد روش تجزيه براي حل معادله Kdv وRLW وآناليز همگرايي اين روش براي اين معادله و همچنين كاربرد روش تجزيه ادميان براي حل معادله يك بعدي Klein-Gordon و سپس كاربرد روش تجزيه ادوميان براي حل معادله KdVB ودر نهايت كاربرد روش تجزيه ادوميان براي حل معادله موج- بلند با ضرايب متغير مورد بحث وبررسي قرار مي گيرد. كه در اين قسمت به تحليل روش ADM [2] پرداخته مي شود. سپس روش تجزيه اصلاح شده معرفي مي شودو كاربرد هاي عددي با چند مثال ارائه مي گردد.

---

۱ - Burger
۲- Benjamin ono
۳ – Adomian Decompostion Method

فصل اول (مفاهیم مقدماتی)

مقدمه : گونه های زیادی از پدیده های طبیعی به مدل های ریاضی منجر می شوند که شامل میزان تغییرا ت هستند. این مدلها را معادلات دیفرانسیل می نامند. اگر آهنگ تغییر تابع فقط با یک متغیر مستقل بیان شود، آن را معادله دیفرانسیل معمولی(ODE) می نامیم و اگر آهنگ تغییر تابع توسط بیشتر از یک متغیر مستقل بیان شود آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی (PDE) می نامیم. این نوع معادلات غالبا" در ریا ضیات، علوم طبیعی و مهندسی به کار می روند. [1]

۱-۱معادلات دیفرانسیل جزیی

معادلات دیفرانسیل جزیی را می توان به معادلات خطی و غیر خطی دسته بندی کرد، در زیر شکل کلی معادله دیفرانسیل جزیی آمده است :

$$F\left(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots\right) = 0 \qquad (1.1)$$

که شامل چندین متغیر مستقل $x, y, \dots$و یک تابع مجهولu که تابعی از متغیر های مستقل است.[2]
در یک معادله دیفرانسیل خطی متغیر های وابسته و مشتقات آنها به صورت خطی در معادله ظاهر می شوند.

مر تبه یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزیی، مرتبه بالا ترین مشتق جزیی است که در معادله ظاهر می شود.

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم به صورت زیر است :

$$a\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2} + d\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + e\frac{\partial \emptyset}{\partial y} + f\emptyset + g = 0 \qquad (2.1)$$

که در آن a, b, c, d, e, f, g توابعی از متغیر های x, y ویا متغیر وابسته $\emptyset$ می باشد. بر حسب این که مقدار $b^2 - 4ac$ منفی، صفر ویا مثبت باشد، معا دله(2.1) را بیضوی، سهموی ویا هذلولوی می نامند.

مهمترین معادله دیفرانسیل بیضوی که به معادله پواسن معروف است، به صورت زیر است :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

که برای معادلات مستقل از زمان، نظیر حالت یکنواخت توزیع گرما در یک نا حیه مسطح، یا انرژی پتا نسیل یک نقطه در صفحه که نیرو هایی بر آن اثر کنند، کاربرد دارد.

از مهمترین معادلات دیفرانسیل سهموی، به معادله گرما یا انتشار می توان اشاره کرد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,o) = f(x) \quad 0 \le x \le L$$

معادله موج که یک معادله دیفرانسیل جزیی هذلولوی است، به صورت زیر می با شد.

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \ , \ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) = 0 \ , \qquad 0 \le x \le l$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le l$$

.

۱-۴ معا دلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن، تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن تابع $u(x)$ مجهول است، وباید معلوم شود به صورت زیر است.[3]

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\, F\big(u(t)\big) dt \qquad (3.1)$$

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود و$\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرالگیری هستند. اگر

$$F(u) = u$$

معادله انتگرال خطی و در غیر این صورت غیر خطی نامیده می شود.

معادلات انتگرال در خیلی از مباحث فیزیک، شیمی، مهندسی و بیولوژی ظاهر می شوند.

۱.۴.۱تقسیم بندی معادلات انتگرال

متداولترین معادلات انتگرال را می توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود.

۱- معادلات انتگرال فردهلم : در این نوع معادلات حد پائین و حد بالای انتگرال گیری اعداد ثابت هستند، شکل استاندارد این نوع معادلات به صورت زیر است :

$$\emptyset(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt \qquad a \leq x,t \leq b$$

که در آن هسته معادله انتگرال وتابع f از قبل معلوم هستند وλ هم یک پارامتر معلوم است.

۲- معادلات انتگرال ولترا : شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، که در این نوع معادلات حد بالا وپائین انتگرال گیری به صورت تابعی از x است، به شکل زیر است :

$$\emptyset(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(u(t))dt$$

۳- معادلات انتگرال – دیفرانسیل : در این گونه معادلات تابع مجهول$u(x)$ و مشتق آن در معادله ظاهر می شود، در زیر یک نمونه معادله انتگرال دیفرانسیل آورده شده است :

$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)\,u(t)dt \quad u(0) = 0 \quad u'(0) = 1$$

۴- معادلات انتگرال منفرد : معادلات انتگرالی که حد بالا یا حد پائین یا هردو نامتناهی هستند. یا هسته معادله انتگرال در یک نقطه یا بیشتر از یک نقطه از دامنه انتگرال گیری نامتناهی است. مانند :

$$u(x) = 2x + 6\int_0^{\infty} \sin(x-t)\,u(t)dt$$

$$u(x) = 1 - 2\sqrt{x} - \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt$$

تعریف فضای هیلبرت: یک فضای متری تام که در آن هر دنباله کشی همگرا باشد را یک فضای هیلبرت می نامند.

فصل دوم

روش تجزیه ادومیان

مقدمه :

جرج ادومیان در سال ۱۹۲۲ در نیویورک متولد شد، در سال ۱۹۴۴ در رشته مهندسی برق از دانشگاه میشیگان فارغ التحصیل گردید. به عنوان افسر نیروی هوایی، در رسته مخابرات ارتش ایالات متحده خدمت کرد. پس از پایان جنگ جهانی، در حین تکمیل تحصیلاتش، در سمت یک فیزیکدان ارشد در هیو جز اید کرافت به کار مشغول شد. با دریافت بورس تحصیلی از محل کارش در سال ۱۹۶۳ از دانشگاه UCLA در رشته فیزیک دکترا گرفت. پس از آن به دانشگاه پنسیلوا نیا [۱] پیوست ودر سال ۱۹۶۴ به درجه استادی نائل گردید. در سال ۱۹۶۶ با همکاری دوستانش مرکزی را برای توسعه رياضيات كاربردي در دانشگاه جورجيا بنيان نهاد وبه هدايت آن، تا زمان باز نشستگي اش در سال /088 پرداخت. او بنیانگذار جایزه بلمن[1] در رياضيات و مشاور مؤسسات دولتي وصنعتي و عضو اكادمي علوم بود. او در اوايل دهه /085 در پژوهش هاي خود به روش جديدي براي حل معادلات تابعي رسيد. به تدريج اين روش را توسعه داد و در اوايل دهه /7 اين روش كه به نام خودش نيز منسوب است را به طور رسمي ارائه كرد. ودر جامعه رياضي خيلي مورد توجه قرار گرفت وعده اي از پژوهشگران به تحقيق در اين زمينه پرداختند وبا اين روش خيلي از مسائل غير خطي معادلات ديفرانسيل حل گرديد. ادوميان در سال 0871 اين روش را براي حل معادلات ديفرانسيل تصادفي از مرتبه بالا به كار برد و در سال 0872 مباحث مطرح شده در باره فرآيند هاي تصادفي كاربردي را به همين نام به چاپ رساند.

دو سال بعد يعني 0874 دومين كتاب ادوميان با همكاري ريچارد بلمن[2] درمورد معادلات ديفرانسيل جزيي و ارائه روش هاي جديد براي حل آنها به چاپ رسيد. در سال 0878 نيز سومين اثر وي منتشر شد. در بخش اول اين كتاب روش تجزيه ادوميان به طور كامل شرح داده شده است. ودر بخش دوم يك سري از معادلات خاص در فيزيك مورد بحث قرار گرفته است.

۱-Pencilvania
۲-Bell man
۳-Rechard Bell man

۲-۱ساختار کلی روش تجزیه ادومیان

معادله تابعي

$$F\big(u(x)\big) = g(x) \qquad (1.2)$$

را در حالت كلي در نظر مي گيريم، كه درآن F يك عملگر از فضاي باناخ V است. هدف پيدا كردن $u(x)\epsilon$ U كه در معادله صدق كند، مي باشد.

فرض كنيم معادله براي هر $g(x)\epsilon V$ داراي جواب يكتا باشد.همچنين فرض مي كنيم عملگر F داراي بخش هاي خطي و غير خطي باشد ، اگر قسمت خطي را با B وغير خطي را با N نمايش دهيم،خواهيم داشت:

$$F = B + N \qquad (2.2)$$

در ضمن Bرا مي توان به صورت $I + R$ تجزيه كرد، كه I يك عملگر معكوس پذير و R قسمت با قيمانده عملگراست. بنابراين داريم:

$$F = I + R + N \qquad (3.2)$$

بنابراين فرضيات معادله (1.2) را مي توان به صورت زير نوشت:

$$I(u) + R(u) + N(u) = g \qquad (4.2)$$

$$I(u) = g - R(u) - N(u) \qquad (5.2)$$

فرض مي كنيم عملگر I معكوس پذير باشد، يعني I^{-1} وجود داشته باشد ، لذا داريم:

$$u = I^{-1}g - I^{-1}R(u) - I^{-1}N(u) \qquad (6.2)$$

قرار مي دهيم $L = I^{-1}R$ كه L يك عملگر خطي است، پس داريم:

$$u = I^{-1}g - L(u) - I^{-1}N(u) \qquad (7.2)$$

كه معادله (7.2) را شكل كانوني معادله مي گوئيم. در نتيجه جواب u از معادله بدست مي آيد.
در روش تجزيه ادوميان u را به شكل مجموع سري $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ تجزيه وعملگر غير خطي

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

که $\mathrm{A_n}$ ها را چند جمله اي هاي ادوميان بر حسب $\mathrm{u_0}, \mathrm{u_1}, \ldots, u_n$ هستند، مي نويسيم که شکل کلي چند جمله اي هاي ادوميان به صورت زير است.

$$\mathrm{A_n} = \frac{1}{\mathrm{n!}}\frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{d\lambda^n}}\left[N\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\lambda^i\right)\right]_{\lambda=0} \tag{8.2}$$

فرض کنيد صورت صريحي براي تعيين چند جمله اي هاي ادوميان وجود داشته باشد و با توجه به صورت عملگر غير خطي N ، $\mathrm{A_n}$ ها به صورت توابعي از $\mathrm{u_0}, \mathrm{u_1}, \ldots, u_n$ بدست آمده باشد، در نتيجه معادله (7.2) را مي توان به شکل زير نوشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \mathrm{I^{-1}g} - \mathrm{L}\left(\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{u_n}\right) - \mathrm{I^{-1}}\left(\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{A_n}\right) \tag{9.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \mathrm{I^{-1}g} - \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} L(u_n) - \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{I^{-1}(A_n)} \tag{10.2}$$

که $u_0 = \mathrm{I^{-1}g}$ مي باشد.

در اين صورت بقيه جملات سري $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ با استفاده از الگو ريتم زير بدست مي آيند.

$$u_n = \mathrm{L(u_{n-1})} - \mathrm{I^{-1}(u_{n-1})} \quad , \quad n \geq 1 \tag{11.2}$$

لذا تا وقتي که بتوان $\mathrm{A_n}$ را براي $n = 0,1,2,\ldots$ محاسبه نمود ، تما مي جملات u_n قابل محاسبه هستند ، به دليل زياد بودن تعداد جملات u_n، u را مي توان به صورت مجموع m جمله از سري $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ تقريب زد.

تقريب m جمله اي φ_m را براي جواب معادله به صورت زير تعريف مي کنيم.

$$\varphi_m = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{m-1}} \mathrm{u_n} \qquad \text{به طوري که} \qquad \lim_{\mathrm{m}\to\infty} \mathrm{\varphi_m} = \mathrm{u}$$

مثال1-0- معادله $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{u^2} = 0$ با شرط اوليه $u(x,0) = \frac{1}{2x}$ و $u(0,t) = \frac{-1}{t}$ را با روش تجزيه ادوميان حل کنيد.

حل: قرار مي دهيم: $\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{L_t}$ و $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} = L_{\mathrm{x}}$

$$L_t\mathrm{u} + \mathrm{L_x u} + \mathrm{u^2} = 0$$

$$L_t u = -L_x u - u^2$$

$$L_x u = -L_t u - u^2$$

با در نظر گرفتن عملگر معکو س L_t^{-1} و تاثير آن در طرفين معادله داريم9

$$L_t^{-1} L_t u = -L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1} u^2 \qquad L_t^{-1} = \int_0^t (.)\, dt$$

$$L_t^{-1} L_t u = u(x,t) - u(x,0)$$

$$u(x,t) = u(x,0) - L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1} u^2$$

طبق الگوريتم روش تجزيه به صورت زير محاسبه مي كنيم.

$$u(x,0) = u_0 = \frac{1}{2x}$$

$$u_{n+1} = -L_t^{-1} L_x u_n - L_t^{-1} A_n$$

$$A_0 = f(u_0) = u_0$$

$$u_1 = -L_t^{-1} L_x u_0 - L_t^{-1} A_0 = -\int_0^t (L_x u_0) dt - \int_0^t u_0^2 dt = \frac{t}{4x^2}$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0) = \left(\frac{t}{4x^2}\right)(2)\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{t}{4x^3}$$

$$u_2 = -L_t^{-1} L_t u_1 - L_t^{-1} A_1 = -\int_0^t L_x \left(\frac{t}{4x^2}\right) dt - \int_0^t \left(\frac{t}{4x^3}\right) dt = \frac{t^2}{8x^3}$$

در نتيجه داريم9

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = \frac{1}{2x} + \frac{t}{4x^2} + \frac{t^2}{8x^3} + \frac{t^3}{16x^4} + \ldots$$

حال اگر فرض كنيم، φ_m تقريب m - جمله اي از u باشد، آنگاه

$$\varphi_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{t^n}{(2x)^{n+1}} \quad , \frac{t}{2x} < 1$$

$$u = \lim_{m\to\infty} \varphi_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{t^n}{(2x)^{n+1}} = \frac{1/2x}{1 - t/2x}$$

حالا معادله را با توجه به عملگر معکوس که به صورت زیر تعریف مي شود، حل مي کنيم.

$$L_x^{-1} = \int_0^x (.)\,dx$$

$$L_x^{-1} L_x(u) = -L_x^{-1} L_t u - L_x^{-1} u^2$$

پس9

$$u(x,t) = u(0,t) - L_x^{-1} L_t u - L_x^{-1} u^2$$

سپس با جايگذاري $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و $u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ در معادله داريم9

$$u_0 = \frac{-1}{t}$$

$$u_{n+1} = -L_x^{-1} L_t u_n - L_x^{-1} A_n$$

$$u_1 = -L_x^{-1} L_t u_0 - L_x^{-1} A_0 = -\int_0^x L_t u_0\,dx - \int_0^x A_0\,dx$$

$$= -\int_0^x \frac{\partial}{\partial t}\left(-1/_t\right) dx - \int_0^x (-1/_t)^2\,dx = \frac{-2x}{t^2}$$

$$u_2 = -L_x^{-1} L_t u_n - L_x^{-1} A_1 = -\int_0^x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-2x}{t^2}\right) dx - \int_0^x \frac{t}{4x^3}\,dx = \frac{-4x^2}{t^3}$$

در نتيجه جواب معادله به صورت زير بدست مي آيد9

$$u = -\frac{1}{t} - \frac{2x}{t^2} - \frac{4x}{t^3} - \cdots$$

حالا تقريبي از φ_m را به صورت زير بدست مي آوريم.