بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شیخ بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

بررسی وجود اثر اهرمی در مدل های تلاطم تصادفی

پژوهشگر

الهه سجادی نیا

استاد راهنما

دکترعلی زینل همدانی

استاد مشاور

دکتر علی رجالی

خرداد ۱۳۹۰

تقديم به :

همه ی اساتید وبزرگوارانی که در طول دوره ی تحصیل

جرئت اندیشیدن را به من آموختند و پاره ای از علم خود را

دراختیار من نهادند تا به این طریق به مسیر درست راه یابم.

سپاسگزاری

از دست و زبان که برآید **کز عهده شکرش بدر آید**

اکنون که این رساله به پایان رسیده است پس از سپاسگزاری از درگاه پروردگار متعال که هستی ام از اوست بر خود لازم می دانم که از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر همدانی به عنوان استاد راهنما و همچنین از جناب آقای دکتر رجالی استاد مشاور بنده به خاطر زحمات بسیار و مشاوره های ارزنده ای که در طول تحصیل و نگارش این پایان نامه ارزانی داشته اند تشکر وقدر دانی نمایم .

اینجانب به عنوان اولین فرد فارغ التحصیل در رشته ریاضی مالی در استان اصفهان لازم است از کلیه افرادی که در طی این مسیر همواره به من دلگرمی داده اند تشکر نمایم و برای ایشان آرزوی موفقیت در تمام مراحل زندگی را از خداوند منان خواستارم .

در پایان از همه ی اعضای خانواده ام که همواره تلاش می کنند تا مسیر دشوار زندگی را بر من هموار سازند تشکر وقدر دانی می نمایم .

توفیق همه ی این عزیزان را از خداوند متعال مسأ لت دارم .

چکیده :

ارتباط تجربی بین بازدهی یک دارایی و تلاطم آن به خوبی در ادبیات مالی ملاک قرار داده می شود . همبستگی منفی بین بازدهی و تلاطم ، اثر اهرمی نامیده می شود و چون این اثر، یکی از ویژگی های مهم تلاطم در بازارهای مالی است ، بررسی آن درمدل های تلاطمی حائز اهمیت است که موضوع اصلی این پایان نامه را تشکیل می دهد. علاوه بر آن ویژگی های پارامترهای موجود در مدل که ظهور اثر اهرمی را تضمین می کنند، نیزمورد بررسی قرار می گیرند .

به طور مثال، با تجزیه و تحلیل دو مدل کلی از مدل های تلاطم تصادفی سهام و قابلیت این مدل ها در تولید اثر اهرمی، شرایط لازم برای ظهور اثر اهرمی مطرح می شوند . در پایان با بیان مثال های مختلف، وجود این اثر بررسی می شود .

کلمات کلیدی : **تلاطم تصادفی ، اثر اهرمی ، لم ایتو**

فهرست مطالب

فصل ۱ : کلیات

فصل ۲ : تعاریف مالی و اقتصادی

فصل ۳: تلاطم ومفاهیم وابسته به آن

فصل ٤ : مدل های تلاطم وتلاطم تصادفی

فصل ۵: بررسی اثر اهرمی در مدل های تلاطم تصادفی

فصل ٦ :جمع بندی ونتیجه گیری کلی

فهرست شکل ها

فهرست جداول

فصل ۱: کلیات

۱-۱- مقدمه:

ارتباط تجربی بین بازدهی یک دارایی[۱] (که در فصل ۲بخش ۱ معرفی می شود.) وتلاطم دارایی موضوع مهمی در ادبیات مالی است.این موضوع منجر به معرفی واژه ای به نام اثر اهرمی[۲] شده است که به صورت زیر بیان می شود: "کاهش یا افزایش بازدهی دارایی، موجب افزایش یا کاهش تلاطم خواهدشد . این ارتباط در داده های واقعی را اثراهرمی می نامند". این نکته که هر مدلی برای ارزش[۳] دارایی، در عمل، قابلیت تولید اثر اهرمی را دارد به آن اندازه حائز اهمیت است که در فصل پنجم درباره این واژه ومفاهیم وابسته به آن صحبت خواهد شد . چون اثر اهرمی یکی از مفاهیم وابسته به تلاطم است، پس باید با مفهوم تلاطم آشنا شد که در فصل سوم به آن پرداخته خواهد شد و پس از آشنایی با مفهوم تلاطم ، در فصل چهارم درباره ی مدل ها ی تلاطم و تلاطم تصادفی[٤] بحث خواهد شد.

با توجه به این که متداول ترین مدل های تلاطم تصادفی بر اساس فرآیند حرکت براونی ساخته شده اند [۳۸] و هدف این پایان نامه بررسی وجود اثر اهرمی در چنین مدل ها یی است، بنابراین دراین فصل به معرفی مفهوم حرکت براونی پرداخته خواهد شد. از طرف دیگر، فرآیند حرکت براونی یکی از ابزارهای نیرومند در تئوری و کاربردهای مدلسازی های تصادفی است ونقش مهمی را در ریاضیات مالی ایفا می کند.

لوییس بشلیر[٥] ریاضیدان فرانسوی اولین کسی بود که مدعی شد قیمت سهام از فرآیندی تصادفی تبعیت می کند [۲] . وی اظهار کرد که حرکت قیمت های سهام، شباهت بسیاری با حرکت ذرات در سیالات دارد که با حرکت براونی قابل تفسیر است.

---

[۱] Return of the asset

[۲] Leverage effect

[۳] وقتی راجع به ارزش چیزی سوال شود دنبال پاسخ کمی مثلا واحد دلار، ین، مارک، تومان یا دیگر واحدهای پولی هستند. خواه از نوع تجهیزات تولیدی مثل ماشین الات، یک دارایی درآمدزای نامشهود مثل ثبت اختراع یا امتیاز یک دارو با ارزش درمانی زیاد باشد و یا یک قطعه هنری زیبا بدون منافع تجاری، مثل یک نقاشی شگرف باشد. ارزش همه ی این ها می تواند با یک واحد پولی تعیین شود .

[٤] Stochastic Volatility

[٥] Louis Bachelier

برای مطالعه ی رفتار پدیده های فیزیکی معمولاً آن ها را توسط معادلات دیفرانسیل مدلسازی می کنند. در بسیاری از این پدیده ها عواملی تصادفی دخالت دارند که باعث می شوند تا این مدلسازی توسط معادلات دیفرانسیل تصادفی صورت گیرد. این عوامل تصادفی اغلب به شکل نوفه ی سفید[1] ظاهر می گردد. برای بررسی این معادلات معمولاً آن ها را به صورت انتگرالی بیان می کنند، اما جمله ی انتگرالی مربوط به نوفه سفید با انتگرال های ریمان و لبگ قابل محاسبه نیست. برای رفع این مشکل نیاز به استفاده از مفهوم انتگرال ایتو[2] است واز آن جایی که در بسیاری از روابط موجود در این پایان نامه انتگرال تصادفی ایتو و معادلات دیفرانسیل تصادفی به کار می روند، بنابراین به معرفی این انتگرال ها و فرمول های وابسته به آن ها پرداخته می شود.

۱-۲- تعاریف و مفاهیم پایه

در این فصل ابتدا مفاهیم پایه و برخی از تعریف ها مطرح می شوند . مفاهیم ضریب همبستگی، حرکت براونی، انتگرال تصادفی ایتو و فرمول های ایتوکه از مهمترین مفاهیم مقدماتی این پایان نامه هستند، در این فصل بیان شده اند. برای آشنایی با مفهوم ضریب همبستگی ابتدا باید مفاهیم امید ریاضی، واریانس و کواریانس معرفی شوند که آشنایی با این مفاهیم ، خود مستلزم فراهم شدن مقدماتی از نظریه ی احتمال است که در تعاریف زیر به آن ها پرداخته می شود و چون فرآیند حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است، پس از آشنایی مختصر با مقدمات اولیه ، قبل از معرفی این فرآیند، مفهوم کلی فرآیند تصادفی ارائه می شود و بعد از آن به تعریف فرآیند حرکت براونی پرداخته خواهد شد .

۱-۲-۱- $\boldsymbol{\sigma}$-جبر : اگر Ω یک مجموعه ی غیر تهی باشد ، σ - جبر $\mathcal{F}$ روی Ω ، خانواده ای اززیرمجموعه های Ω است به طوری که

۱) مجموعه ی تهی ،$\emptyset$ ، متعلق به $\mathcal{F}$ باشد($\emptyset \in \mathcal{F}$) .

۲) اگر $A \in \mathcal{F}$ ، آن گاه $A^c \in \mathcal{F}$

۳)اگر $A_1 , A_2, \dots$ دنباله ای از مجموعه ها در $\mathcal{F}$ باشد، آن گاه اجتماعشان یعنی $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ نیز متعلق به $\mathcal{F}$ باشد ($A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$). [۱۱]

[1] White Noise
[2] Ito integral

۱-۲-۲- σ - جبر تولیدشده : اگر $\mathcal{A}$ یک کلاس از زیر مجموعه های Ω باشد، $\sigma(\mathcal{A})$ به صورت

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F}\in\mathcal{L}(\mathcal{A})} \mathcal{F}$$

تعریف می شود که $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ مجموعه ای ازهمه ی σ -جبرهای شامل کلاس $\mathcal{A}$ است. در این صورت $\sigma(\mathcal{A})$ یک σ-جبر است که σ - جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$ نامیده می شود و کوچکترین σ - جبر شامل $\mathcal{A}$ است [٤١] .

۱-۲-۳- مجموعه ی بورل : کوچکترین σ - جبر تولید شده توسط فامیل مجموعه های باز داخل $\mathbb{R}$ را مجموعه های بورل حقیقی می نامند . (به طور کلی اگر τ یک توپولوژی باشد، آن گاه عناصر $\sigma(\tau)$ را مجموعه های بورل می نامند.) [٤١] .

قبل از تعریف متغیر تصادفی باید با مفهوم اندازه پذیری آشنا شد.

۱-۲-٤- فضای اندازه پذیر: یک زوج مرتب $(\Omega,\mathcal{F})$، که Ω یک مجموعه است و $\mathcal{F}$ یک σ - جبر در سرتاسرΩ می باشد، یک فضای اندازه پذیر نامیده می شود [٤١].

۱-۲-۵- تابع اندازه پذیر: اگر f یک تابع از یک فضای اندازه پذیر $(\Omega,\mathcal{F})$ در اعداد حقیقی باشد، آن گاه تابع f اندازه پذیر است اگر برای هرمجموعه بورل $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$:

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{\omega : \mathrm{f}(\omega) \in \mathrm{B}\} \in \mathcal{F} \qquad [٤١]$$

۱-۲-٦- متغیر تصادفی : یک متغیر تصادفی روی فضای $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ تابعی است مثل $X : \Omega \to \mathbb{R}$ با این خاصیت که برای هر زیرمجموعه ی بورل مثل$\mathcal{B}$ از $\mathbb{R}$:

$$X^{-1}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Omega : \mathrm{X}(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{F} \qquad [٤١]$$

(یعنی توابع حقیقی اندازه پذیر)

متغیرهای تصادفی ، می توانند به صورت گسسته و یا پیوسته مطرح گردند.

یک متغیر تصادفی گسسته، متغیر تصادفی است که فقط می تواند تعداد متناهی و یا نامتناهی شمارایی را اختیار کند. مثال هایی از متغیرهای تصادفی گسسته شامل تعداد فرزندان یک خانواده ، تعداد دانشجویان کلاس و... است.

علاوه بر متغیرهای تصادفی گسسته، متغیرهای تصادفی دیگری هم وجود دارند که مقادیر ممکن آن ها غیر قابل شمارش هستند. برای مثال، زمان ورود یک قطار به یک ایستگاه مشخص و طول عمر یک ترانزیستور می توانند دو نمونه از متغیرهای مزبور باشند. X یک متغیر تصادفی پیوسته[۱] است ، اگر یک تابع غیر منفی f ، که برای همه مقادیر حقیقی x تعریف شده است، با خاصیت زیر برای هر زیر مجموعه B از اعداد حقیقی وجود داشته باشد :

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)dx \qquad (۱)$$

آن گاه تابع f را تابع چگالی احتمال یا به طور خلاصه تابع چگالی متغیر تصادفی X می نامند [۵۲].

۱-۲-۷- بردار تصادفی : اگر $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ یک فضای احتمال ، $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{B}^n$ ، σ- جبرمجموعه های بورل در $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ باشد، در این صورت هر تابع اندازه پذیر $X: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathcal{B}^{\mathrm{n}})$ یک بردار تصادفی نامیده می شود [۴۵].

۱-۲-۸- امید ریاضی:

یکی از مهم ترین مفاهیم در نظریه احتمال ، مفهوم امید ریاضی یک متغیر تصادفی است .

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $P(x)$ باشد، در این صورت امید ریاضی یا مقدار امید آن را با $\mathbb{E}[X]$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می شود :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x:P(x)>0} xP(x)$$

به عبارتی، امید ریاضی X یک میانگین وزنی از مقادیر ممکن است که X می تواند اختیار کند و وزن هر مقدار ، احتمالی است که X می تواند آن مقدار را اختیار کند.

حال اگر تابعی از X مانند $\mathrm{g}(X)$ داده شود برای محاسبه $\mathbb{E}[\mathrm{g}(X)]$ یک راه این است که چون $\mathrm{g}(X)$ خود یک متغیر تصادفی گسسته است ، یک تابع احتمالی دارد که می توان آن را از تابع احتمال X به دست آورد، پس وقتی که تابع احتمال $\mathrm{g}(X)$ به دست آورده شد ، آن گاه $\mathbb{E}[\mathrm{g}(X)]$ با تعریف امید ریاضی محاسبه می شود. اگرچه با روش فوق همیشه می توان امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی X را محاسبه کرد، اما راه دیگری نیز وجود دارد که به صورت زیر بیان می شود :

[۱] بعضاً مطلقاً پیوسته نامیده می شود.

اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد که مقادیر x_i $(i \geq 1)$ را با احتمال $P(x_i)$ انتخاب می کند آن گاه برای هر تابع حقیقی g ،

$$\mathbb{E}[\mathrm{g}(X)] = \sum_i \mathrm{g}(x_i) P(x_i)$$

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ باشد، آن گاه :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

و بالاخره در این حالت برای هر تابع حقیقی g ،

$$\mathbb{E}[\mathrm{g}(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{g}(x)\, f(x)\, dx \qquad [۵۲]$$

امید یک متغیرتصادفی در حالت کلی خواص زیر را دارد:

الف) خطی بودن: اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، آن گاه :

$$\mathbb{E}[\alpha \mathrm{X} + \beta \mathrm{Y}] = \alpha \mathbb{E}[\mathrm{X}] + \beta \mathbb{E}[\mathrm{Y}].$$

ب)مقایسه : اگر $X \leq Y$ ، در این صورت

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}] \leq \mathbb{E}[\mathrm{Y}].$$

ج) اگر X و Y مستقل از هم باشند، آن گاه :

$$\mathbb{E}[X\mathrm{Y}] = \mathbb{E}[X].\, \mathbb{E}[\mathrm{Y}]$$

د)امید ریاضی هر عدد ثابت برابر خود آن عدد خواهد بود.

ه) نامساوی جنسن[۱] :اگر φ یک تابع با مقادیر حقیقی محدب باشد(یعنی $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ وهر $\lambda \in [0, 1]$: $\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \varphi \lambda(x) + (1-\lambda)\, \varphi(y)$) ، در این صورت :

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}\big[\varphi(X)\big] \qquad [۱۱]$$

اگرچه $\mathbb{E}[X]$ متوسط وزنی مقادیر ممکن متغیر تصادفی X را نشان می دهد، اما نمی تواند هیچ اطلاعی در مورد تغییرات یا پراکندگی مقادیر ارائه دهد. از این رو واریانس نیز مورد استفاده قرار می گیرد.

---

[۱] Jensen's Inequality

۱-۲-۹- واریانس : واریانس X عبارت است از:

$$\sigma_X^2 = Var[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$

و $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ را انحراف معیار X می نامند .

واریانس متغیر تصادفی X همواره مقداری نامنفی است. به علاوه هرقدر که مقدار آن بزرگتر باشد نشان می دهد که مربع انحرافات مقادیر متغیراز μ_X ، $(X-\mu_X)^2$ ، بزرگترند ودر نتیجه پراکندگی مقادیر X بیشتراست.

به همین ترتیب هرقدر که واریانس کوچکتر باشد، نشان دهنده ی پراکندگی کمتر مقادیر X حول μ_X است.

اگر X یک متغیر تصادفی با $Var[X]$ باشد، آن گاه

الف) برای هر عدد حقیقی a, b ،

$$Var[aX+b] = a^2 Var[X]$$

ب) با فرض $a = ۰$ ، $Var[b] =۰$، یعنی واریانس مقدار ثابت صفر است. [٦٦]

۱-۲-۱۰- کواریانس : اگر Y, X دو متغیر تصادفی با توزیع توأم و با میانگین های به ترتیب μ_X , μ_Y باشند، کواریانس این دو متغیر را با $Cov(X,Y)$ یا σ_{XY} نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

۱-۲-۱۰- ۱- ویژگیهای کواریانس:

الف) ویژگی تقارن: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.

این ویژگی نشان می دهد که جابجایی X, Y مقدار کواریانس را تغییر نمی دهد یعنی کواریانس نسبت به X, Y متقارن است.

ب) برای مقدار ثابت k : $Cov(X,k) =۰$.

ج) برای هر دومقدار ثابت b و d : $Cov(X+b, Y+d) = Cov(X,Y)$.

این ویژگی نشان می دهد که هرگاه مبدأ اندازه گیری X, Y تغییر کند، کواریانس تغییر نمی کند.

د) برای دو متغیر تصادفی مستقل X,Y : $Cov(X,Y) = ۰$.

این ویژگی با توجه به این نکته که اگر دو متغیر تصادفی X,Y مستقل باشند: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ واز فرمول محاسبه کواریانس نتیجه می شود. اما باید توجه کرد که صفر بودن کواریانس، مستلزم مستقل بودن X و Y نیست. اگر $Cov(X,Y) = ۰$ ، آن گاه متغیرهای تصادفی X و Y را غیرهمبسته یا ناهمبسته می نامند.

ه) برای هر دو مقدار ثابت a و c : $Cov(aX, cY) = ac\, Cov(X,Y)$.

این ویژگی نشان می دهد که هر گاه واحد اندازه گیری تغییر کند، کواریانس تغییر می کند. برای مثال اگر متغیرهای X,Y بر حسب متر باشند و آن ها به سانتی متر تبدیل شوند یعنی در عدد ۱۰۰ ضرب شوند، آن گاه کواریانس میان X,Y، ۱۰۰۰۰ برابر خواهد شد.

و) $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$.

این ویژگی نشان می دهدکه کواریانس نسبت به X و Yجمع پذیر است.

ز) $Cov(X,X) = Var(X)$.

این ویژگی نشان می دهد که واریانس را می توان بر حسب کواریانس بیان داشت. [٦٦]

۱-۲-۱۱- مفهوم ضریب همبستگی:

ویژگی های الف تا د برای $Cov(X,Y)$ ، به عنوان معیاری برای سنجش تغییرات X,Y نسبت به هم، ویژگی های خوبی هستند. اما ویژگی ه مطلوب نیست زیرا مقدار کواریانس به واحد اندازه گیری متکی است، حال اگر به جای $Y,\ X$ ، $\frac{X}{\sigma_X}$ و $\frac{Y}{\sigma_Y}$ به کار رود، ملاحظه می شود که دیگر $Cov\left(\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$ به واحد اندازه گیری متکی نخواهد شد. این انگیزه ای برای تعریف ضریب همبستگی است.

۱-۲-۱۱-۱- تعریف ضریب همبستگی : اگر Y, X دو متغیر تصادفی با توزیع توأم با واریا نس های به ترتیب σ_X^2 و σ_Y^2 باشند، آن گاه ضریب همبستگی این دو متغیر با $\rho(X,Y)$ یا ρ یا $Corr(X,Y)$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$