بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی فردهلم مرتبه بالا

مؤلف :

محمد حسین اخلاصی

استاد راهنما :

دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور :

دکتر عظیم ریواز

شهریورماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : محمد حسین اخلاصی

استاد راهنما : دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور : دکتر عظیم ریواز

داور ۱ : دکتر محمد علی ولی

داور ۲ : دکتر محمد علی یعقوبی

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده : دکتر علی جباری شاهزاده محمد

تقدیم به:

پدر دلسوز

و

مادر فداکارم

که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و عاشقانه یاریم کردند تا من آسوده باشم.

و

همسر بسیار مهربانم

که مایه آرامش و فراغ خاطرم بوده و هست.

تشکر و قدردانی:

سپاس یزدان پاک را که بی لطف و عنایتش پیمودن راه ممکن نبود. باشد که توفیق خدمت به بندگانش را از من دریغ ننماید.

از اساتید ارجمندم آقایان دکتر محمود محسنی مقدم و دکتر عظیم ریواز که راهنمایی و مشاوره پایان نامه‌ام را به عهده داشتند صمیمانه تشکر می کنم.

همچنین از آقایان دکتر محمد علی ولی و دکتر محمد علی یعقوبی که داوری پایان نامه را پذیرفتند و با صبر و حوصله آن را مطالعه نمودند نیز کمال تشکر و قدردانی را دارم.

جناب آقای دکتر علی جباری نیز به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور یافتند. از ایشان نیز سپاسگزارم.

بر خود لازم می‌دانم از حمایت و تشویق خواهران عزیز و برادران مهربانم در طول این دوره تحصیلی تقدیر و تشکر کنم.

و در پایان جا دارد از دوستان عزیزم سهیل و سینا امینی زاده تشکر ویژه داشته باشم. از صمیم قلب برایشان آرزوی شادکامی و سربلندی می کنم.

چکیده:

این پایان نامه شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول مفاهیم معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل را معرفی خواهیم کرد. فصل دوم به ارائه برخی روش‌های حل معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل اختصاص داده شده است. چندجمله‌ای های لژاندر در فصل سوم برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل تفاضلی خطی فردهلم مرتبه بالا مورد استفاده قرار گرفته است. سرانجام در فصل چهارم، یک روش ماتریسی عملی برای پیدا کردن جواب‌های تقریبی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی فردهلم مرتبه بالا با ضرایب ثابت تحت شرایط اولیه-مرزی به وسیله چندجمله‌ای های تیلور ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات انتگرال-دیفرانسیل تفاضلی خطی فردهلم مرتبه بالا، چندجمله‌ای های لژاندر، چندجمله‌ای های تیلور.

فهرست مطالب:

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به تعریف معادله انتگرال می‌پردازیم و سپس دسته بندی معادلات انتگرال را همراه با ارائه مثال‌هایی بیان می‌کنیم. در بخش‌های بعدی به روش تبدیل معادلات انتگرال ولترا به معادلات دیفرانسیل معمولی، مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا و مسایل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم می‌پردازیم. در نهایت تاریخچه ای از معادلات انتگرال و یک مثال کاربردی از مسائلی که به معادلات انتگرال منتهی می‌شوند را ارائه می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف کلی و دسته بندی معادلات انتگرال[1]

تعریف ۱.۲.۱. یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار دارد. شکل کلی این معادلات به فرم زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)F\big(u(t)\big)dt. \tag{1.1}$$

در معادله فوق $k(x,t)$ به عنوان هسته[2] معادله، $\lambda \neq 0$ پارامتری که می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال‌گیری، $f(x)$ و $\phi(x)$ و F همگی معلوم هستند و $u(x)$ مجهول می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱. معادله (1.1) خطی نامیده می‌شود هرگاه $F(u(t))$ بر حسب $u(t)$ خطی باشد (توان یک داشته باشد). در غیر این صورت غیر خطی خوانده می‌شود.

به عنوان مثال معادله $u(x) = x + 2\int_0^1 xtu(t)dt$ یک معادله انتگرال خطی و معادله $u(x) = sin\, x + \int_0^x (x-t)e^{u(t)}dt$ یک معادله انتگرال غیر خطی است.

[1] Integral equations
[2] kernel

تعریف ۳.۲.۱. هسته $k(x,t)$ را جدایی پذیر گویند هرگاه توابعی مانند $g_i(x)$ و $h_i(t)$ برای $1 \leq i \leq n$ موجود باشند به طوری که $k(x,t)$ را بتوان به فرم زیر نوشت:

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(t).$$

به عنوان مثال هسته $k(x,t) = xt + x^2t^2$ یک هسته جدایی پذیر است. چون می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^{2} g_i(x) h_i(t),$$

که در آن

$$g_1(x) = x, g_2(x) = x^2 \ \ , h_1(t) = t, h_2(t) = t^2.$$

معادلات انتگرال شامل هسته های جدایی پذیر را می‌توان توسط یک دستگاه متناهی از معادلات انتگرال حل نمود.

تعریف ۴.۲.۱. هسته حقیقی $k(x,t)$ را متقارن گویند هر گاه $k(x,t) = k(t,x)$.

تعریف ۵.۲.۱. اگر هسته $k(x,t)$ به صورت تابعی از $x - t$ باشد آن گاه هسته را یک هسته پیچشی یا تفاضلی می‌گویند.

تعریف ۶.۲.۱. هسته $k(x,t)$ را هرمیتی گویند هر گاه $k(x,t) = k^*(x,t)$ که در آن $(*)$ نشان دهنده مزدوج مختلط است.

تعریف ۷.۲.۱. هسته $k(x,t)$ را یک هسته نرمال گویند هرگاه $kk^*=k^*k$.

۳.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال

متداول‌ترین معادلات انتگرال به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم[1] و معادلات انتگرال ولترا[2] تقسیم می‌شوند. اما غالباً هر جا سخن از تقسیم بندی معادلات انتگرال به میان آمده از معادلات انتگرال-دیفرانسیل[3] و معادلات انتگرال منفرد[4] نیز نام برده شده است. لذا یک تقسیم بندی از معادلات انتگرال به صورت زیر خواهیم داشت:

_ معادلات انتگرال فردهلم

_ معادلات انتگرال ولترا

_ معادلات انتگرال-دیفرانسیل

_ معادلات انتگرال منفرد

در ادامه به معرفی و ذکر مثال‌هایی از دسته بندی فوق پرداخته می‌شود.

۱.۳.۱. معادلات انتگرال فردهلم

شکل کلی این معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F\big(u(t)\big)dt, \quad a \le x,t \le b. \qquad (2.1)$$

این نام‌گذاری با توجه به حدود پایین و بالای انتگرال که به ترتیب اعداد ثابت a و b می‌باشند انجام می‌شود. یعنی در معادلات انتگرال فردهلم حدود انتگرال گیری اعداد ثابتی هستند.

بر حسب این که $\phi(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

[1] Fredholm integral equations
[2] Volterra integral equations
[3] Integro-differential equations
[4] Singular integral equations

۱- $\phi(x) = 0$ در این صورت با توجه به معادله(2.1) معادله زیر را خواهیم داشت که معادله فردهلم نوع اول نامیده می‌شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F\big(u(t)\big)dt = 0. \qquad (3.1)$$

۲- $\phi(x) = 1$ در این صورت از معادله (2.1) معادله زیر حاصل می‌شود که معادله فردهلم نوع دوم نامیده می‌شود.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F\big(u(t)\big)dt. \qquad (4.1)$$

در یک تقسیم بندی دیگر معادلات انتگرال فردهلم اگر $f(x) \neq 0$ آن گاه معادله غیر همگن و اگر $f(x) = 0$ آن گاه معادله همگن نامیده می‌شود.

توجه:معادله انتگرال (4.1) را می‌توان از معادله (2.1) با تقسیم طرفین معادله بر $\phi(x)$با شرط این که $\phi(x) \neq 0$ به دست آورد.

به عنوان مثال معادله انتگرال $u(x) = \frac{2}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt$ یک معادله انتگرال فردهلم نوع دوم غیر همگن خطی می‌باشد.

۲.۳.۱. معادلات انتگرال ولترا

شکل کلی معادلات انتگرال ولترا یعنی معادلاتی که در آن‌ها حد پایین و بالای انتگرال گیری به جای این که اعداد ثابتی باشند به صورت تابعی از xظاهر می‌شود به فرم زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F\big(u(t)\big)dt. \qquad (5.1)$$

سایر تقسیم بندی‌ها اعم از نوع اول و دوم، خطی و غیر خطی، همگن و غیر همگن مشابه معادلات انتگرال فردهلم می‌باشد.

به عنوان مثال معادله انتگرال

$$u(x) = 1 + \int_0^x (x-t)^2 u^2(t) dt.$$

یک معادله انتگرال ولترا نوع دوم غیر خطی غیر همگن می‌باشد.

چند نکته:

- در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم نوع اول تابع مجهول $u(x)$ تنها زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود در حالی که در معادلات نوع دوم تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج آن ظاهر می‌شود.
- در معادلات انتگرال فردهلم انتگرال گیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود اما در معادلات انتگرال ولترا حد اقل یکی از حدود فاصله انتگرال گیری متغیر است.
- معادلات انتگرال در خیلی از مسایل فیزیک و شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند. در بعضی موارد اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسئله مقدار مرزی باشد آن گاه متناظر با آن معادله انتگرالی ظاهر می‌شود که از نوع فردهلم است و اگر معادله دیفرانسیل در قالب یک مسئله مقدار اولیه باشد آن گاه متناظر با آن معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

۱.۳.۳. معادلات انتگرال- دیفرانسیل

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال- دیفرانسیل مواجه شد. در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود. در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی نمایان می‌شود. شکل کلی این معادلات به فرم زیر می‌باشد:

$$Du(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t) F\left(u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)\right) dt, \quad (6.1)$$

با شرایط اولیه

$$\sum_{k=1}^{\nu} \left[c_{jk}^{(1)} u^{(k-1)}(a) + c_{jk}^{(2)} u^{(k-1)}(b)\right] = d_j, \qquad j = 1,2, \dots, \nu.$$

در این معادله تابع $f(x)$، تابع دو متغیره $k(x,t)$ به عنوان هسته معادله، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ به عنوان حدود انتگرال‌گیری توابعی معلوم هستند. d_j، $c_{jk}^{(1)}$، $c_{jk}^{(2)}$، λ نیز پارامترهای معلوم هستند. $F(u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t))$ تابعی بر حسب $u(t)$ و مشتقاتش است و D عملگر دیفرانسیل خطی است که به صورت زیر می باشد.

$$D = \sum_{i=0}^{\nu} p_i(x) \frac{d^i}{dx^i},$$

که در آن $p_i(x)$ یک چند جمله ای از درجه α_i به صورت زیر می‌باشد. در ضمن عدد ν مرتبه عملگر دیفرانسیل D است.

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_{ij} x^j.$$

تقسیم بندی‌های خطی و غیر خطی، همگن و غیر همگن، فردهلم و ولترا در مورد این معادلات نیز به کار می‌رود. به عنوان مثال معادله انتگرال

$$u''(x) = x + \int_0^x (x-t) u(t) dt, \quad u(0) = 0, u'(0) = 1,$$

یک معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای خطی غیر همگن می‌باشد.

توجه:در معادله (6.1) هرگاه D عملگر همانی در نظر گرفته شود و نیز زیر علامت انتگرال مشتقی از تابع $u(t)$ موجود نباشد آن گاه معادله انتگرال–دیفرانسیل به یک معادله انتگرال تبدیل خواهد شد.

۴.۳.۱. معادلات انتگرال منفرد

معادلات انتگرال منفرد معادلات انتگرالی هستند که در آن‌ها حد پایین یا حد بالا یا هر دو حد انتگرال گیری نامتناهی باشد به عنوان مثال معادله زیر یک معادله انتگرال منفرد می‌باشد.

$$u(x) = 1 + x^2 + \int_0^{\infty} (x+t)u(t)dt. \qquad (7.1)$$

البته علاوه بر نامتناهی بودن حدود انتگرال گیری اگر هسته نیز زمانی که $t \to x$ نامتناهی شود باز هم یک معادله انتگرال منفرد خواهیم داشت. مثلاً معادله زیر که معادله انتگرال ولترا نوع دوم منفرد به طور ضعیف خوانده می‌شود.

$$u(x) = 1 - 2x - \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt. \qquad (8.1)$$

این دسته از معادلات انتگرال برای اولین بار توسط آبل[1] ریاضیدان نروژی در سال ۱۸۲۳ معرفی شدند. فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر بر $[0,1]$ باشد. در این صورت معادلات انتگرال به فرم

$$f(x) = \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt \qquad (9.1)$$

و یا

$$f(x) = \int_0^{x} \frac{1}{(x-t)^{\alpha}} u(t)dt \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad (10.1)$$

به ترتیب معادله انتگرال آبل و معادله انتگرال آبل تعمیم یافته خوانده می‌شوند.

[1] Abel

معادلات انتگرال منفرد در کاربردهای مهندسی و فیزیک نظیر انتقال گرما، رشد کریستال‌ها و مکانیک سیالات ظاهر می‌شوند.

۱.٤. جواب یک معادله انتگرال

به طور کلی یک جواب معادله انتگرال یا معادله انتگرال-دیفرانسیل روی فاصله انتگرال گیری، یک تابع مانند $u(x)$ است به طوری که در معادله داده شده صدق کند. به عنوان مثال در معادله $u(x)=1+\int_0^x u(t)dt$ جواب معادله $u(x)=e^x$ می‌باشد زیرا که

$$RHS=1+\int_0^x e^t dt=e^x=LHS.$$

در مورد جواب معادلات انتگرال سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا یک جواب وجود دارد؟ و اگر جواب وجود دارد آیا این جواب یکتاست یا خیر؟ در این رابطه به بیان چند قضیه می‌پردازیم.

قضیه ۱. ([۱۴]) (قضیه متناوب فردهلم) معادله انتگرال فردهلم غیر همگن خطی

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt,\qquad a\le x\le b \tag{11.1}$$

فقط و فقط یک جواب دارد اگر که تنها جواب معادله فردهلم همگن

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

جواب بدیهی $u(x)=0$ باشد.

قضیه ۲. ([۹]) اگر هسته معادله (11.1) حقیقی و پیوسته و روی مربع $a\le x,t\le b$ کران دار باشد یعنی اگر داشته باشیم

$$|k(x,t)|\le M,\ \ a\le x\le b,\qquad a\le t\le b,$$

و همچنین $u(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ پیوسته و غیر صفر باشد آن گاه شرط کافی برای آن که معادله جواب منحصر به فرد داشته باشد آن است که: $|\lambda| M(b-a) < 1$.

البته باید به این نکته مهم توجه کرد که یک جواب پیوسته برای معادله انتگرال فردهلم حتی اگر شرط فوق برقرار نباشد می‌تواند وجود داشته باشد. مثلاً در معادله

$$u(x) = -4 + \int_0^1 (2x+3t)u(t)dt,$$

داریم:

$|\lambda| M(b-a) = 5 > 1$ که نشان می‌دهد شرط فوق برقرار نیست اما معادله دارای جواب $u(x) = 4x$ است.

تعریف ۱.۴.۱. تابع $F(x,t,u(t))$ نسبت به متغیر $u(t)$ در شرط لیپ شیتس[1] صدق می‌کند هر گاه عددی ثابت مانند L (ثابت لیپ شیتس) موجود باشد به طوری که

$$\forall \big(x,t,u_1(t)\big), \big(x,t,u_2(t)\big) \in D_F:$$

$$|F\big(x,t,u_1(t)\big) - F(x,t,u_2(t))| \le L|u_1(t) - u_2(t)|$$

که در آن

$$D_F = \{\big(x,t,u(t)\big): x,t \in [a,b], u(t) \in [c,d]\}$$

تعریف ۲.۴.۱. اگر $T: X \to X$ یک عملگر باشد نقطه $x_0 \in \mathrm{X}$ را نقطه ثابت عملگر T گویند هر گاه $T(x_0) = x_0$.

[1] Lipschitz

تعریف ۳.٤.۱. نگاشت $T: X \to X$ را نگاشت انقباضی گویند هر گاه عددی حقیقی و نا منفی مانند αکه $0 \leq \alpha < 1$ موجود باشد به طوری که برای هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم:

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|.$$

قضیه ۳ . ([۱۴]) اگر $T: X \to X$ نگاشت انقباضی باشد و X فضای باناخ[1] (فضای خطی نرم دار کامل) باشد آن گاه T فقط یک نقطه ثابت دارد.

برهان:

وجود: f_0 دلخواه انتخاب می‌کنیم و دنباله $\{f_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$f_{n+1} = Tf_n \ , n = 0,1,2, \dots,$$

ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله $\{f_n\}$ یک دنباله کشی[2] است. سپس نشان می‌دهیم حد دنباله $\{f_n\}$ جواب معادله $Tf = f$ است. (با استفاده از این واقعیت که یک دنباله کشی در فضای هیلبرت حد یکتا دارد) این حد مستقل از انتخاب اولیه f_0 است. داریم:

$$\begin{aligned}\|f_{n+1} - f_n\| &= \|Tf_n - Tf_{n-1}\| \leq \alpha \|f_n - f_{n-1}\| \leq \alpha^2 \|f_{n-1} - f_{n-2}\| \\ &\leq \cdots \leq \alpha^n \|f_1 - f_0\|\end{aligned}$$

به طور کلی اگر $n > m$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| &= \|(f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + \cdots (f_{m+1} - f_m)\| \\ &\leq \|f_n - f_{n-1}\| + \|f_{n-1} - f_{n-2}\| + \cdots + \|f_{m+1} - f_m\| \\ &\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha^m)\|f_1 - f_0\| \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+2} + \cdots)\|f_1 - f_0\| = \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|f_1 - f_0\|\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

---
[1] Banach space
[2] Cauchy