بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

پایان نامه

براي اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشتهی رياضي محض

عنوان:

بررسی خواص ایدهآلهای پلیمترویدال کوهن-مکالی و موضعیسازیهای منومیال

استاد راهنما:

دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور:

دکتر سید محمود شیخ الاسلامی

پژوهشگر:

الهام احمدی

شهریور /۱۳۹۲

تبریز/ ایران

تقدیم به

همسرم

به پاس محبت‌های بی‌دریغش

سپاس گزاری

بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر رضاپور که با صبر فراوان و صرف وقت زیاد، همواره راهنما و راه گشای بنده در تکمیل این پایان نامه بوده است تشکر نمایم.

در پایان از پدر، مادر، همسر عزیزم و همه فرشتگانی که بالهای محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواری ها، سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاسگزارم.

آل عمران

شهریور ۱۳۹۱

تبریز / ایران

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید $R=\mathbf{k}[x_1,\cdots,x_n]$ حلقه چندجمله‌ایها با n متغیر روی میدان $\mathbf{k}$ بوده و I ایده‌آل منومیالی از R باشد که همه مولدهای I دارای درجه یکسانی هستند . ایده آل منومیال I با مجموعه مولد $G(I)=\{x^{u_1},\cdots,x^{u_s}\}$ را یک ایده آل پلی‌مترویدال می‌نامند هرگاه به ازای هردو منومیال $x^{u_r}=x^{a_1}\cdots x^{a_n}$ و $x^{u_t}=x^{b_1}\cdots x^{b_n}$ از $G(I)$ که درآن به ازای i ای $a_i>b_i$ ، j ای موجود باشد به طوری که $a_j<b_j$ و $x_j\left(\dfrac{x^{u_r}}{x_i}\right)\in G(I)$.

در این پایان نامه ضمن مطالعه موضعی‌سازی‌های ایده‌آلهای منومیال ، به بررسی حدس اینکه یک ایده‌آل منومیال ، پلی‌مترویدال است اگر و فقط اگر موضعی شده آن دارای تحلیل‌خطی باشد ، خواهیم پرداخت . با استفاده از نتایج بدست آمده توسط هرزق و هیبی [۸] و [۱۱] حدس فوق را برای برخی از ایده‌آلهای منومیال آزاد از مربع و برای رده جدیدی از ایده‌آلهای پلی‌مترویدال ثابت نموده و راه کارهایی برای گسترش برخی نتایج در مورد ایده‌آلهای پلی‌مترویدال ارائه خواهیم کرد . برای مشاهده مطالب تکمیلی به [۱۲] ،[۷] و[۱۶] مراجعه شود.

واژه های کلیدی: پلی‌متروئید، پلی‌متروئید گسسته ، مترویدال ، ایده‌آل پلی‌مترویدال ، ایده‌آل‌های منومیال با خارج قسمت خطی ، ایده‌آل منومیال آزاد از مربع ، تحلیل خطی .

پیشگفتار

تئوری چند وجهی پلی‌ماترویدال‌ها اولین بار در سال ۱۹۷۶ توسط ولش[۲۰] [1] و ادموند[2] [۴] معرفی شد. به جهت جالب بودن و اهمیت موضوع مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفت. ایده‌آل متروئید توسط وایت[۲۱] [3] بر اساس حلقه ی پایه‌ای پلی‌متروئید گسسته معرفی گردید و بر همین اساس هرزق تعریف ارائه شده توسط وایت و ادموند را به ایده‌ال‌های-پلی‌مترویدال با خارج قسمت‌های خطی تعمیم داده و در ادامه این مفاهیم را در مورد ایده‌آلهای منومیال مورد استفاده قرار داد.

در این پایان‌نامه ، ضمن معرفی ایده‌آلهای پلی‌مترویدال به بررسی موضعی‌سازی‌های ایده‌آلهای منومیال با استفاده از ایده‌آلهای منومیال و دسته بندی ایده‌آلهای کوهن-مکالی پلی‌مترویدال و بیان شرط لازم و کافی برای کوهن-مکالی بودن این ایده‌آل خواهیم پرداخت.

در فصل اول مقدمات لازم از جبر جابجایی ، بویژه حلقه و مدولهای مدرج ، منومیالها ، گراف و پلی‌تاپ‌های محدب را ارائه می‌دهیم .

در فصل دوم به بیان تعاریف و قضایایی در مورد پلی‌متروئیدها ، انواع آنها ، نحوه تولید و همچنین روابطی که با یکدیگر دارند ، می‌پردازیم . در واقع هدف اصلی این فصل ذکر پیش زمینه‌های لازم برای بیان و اثبات گزاره ۳۹.۲ می‌باشد .

[1] D.J.A , Welsh

[2] J. Edmonds

[3] N. White

در فصل سوم با استفاده از مفاهیم و قضایای پایه‌ای که در فصلهای قبلی بخصوص فصل دوم بیان شده است ، به تولید ایده‌آلهای پلی‌ماترویدال می‌پردازیم . همچنین اساسی‌ترین خواص آنها را ذکر کرده ،علاوه بر این شرط لازم و کافی برای کوهن-مکالی بودن ایده‌آل پلی‌ماترویدال را بیان می‌نماییم .

نهایتا در فصل چهارم ضمن ارائه ویژگی‌های جبری ایده‌آلهای پلی‌ماترویدال و موضعی‌سازی‌های منومیال ایده‌آلهای ماترویدال ، به بیان چندین قضیه در مورد شرایطی که تحت آنها ایده‌آلهای منومیال ، پلی‌ماترویدال هستند می‌پردازیم . بعلاوه به این سوال که آیا شرایطی وجود دارد که تحت آن شرایط ، ایده آل های پلی ماترویدال کاملا مشخص شوند پاسخ می‌دهیم .

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌های [۱] ، [۸] و [۱۰] تنظیم شده است .

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم و تعاریف اساسی مورد استفاده در فصل‌های آتی را بیان می‌کنیم . در سراسر این پایان نامه تمام حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار در نظر گرفته شده است .

۱.۱ تعاریف مقدماتی

در این بخش به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی از جبر جابجایی و حلقه‌ها و مدول‌های مدرج می‌پردازیم . نمادهای استفاده شده در این بخش مطابق با نمادهای [۱۷] می‌باشد .

تعریف ۱.۱. در حلقه R عنصر ناصفر x را یک مقسوم‌علیه صفر گوییم هرگاه عضو ناصفری مانند y موجود باشد بطوریکه $xy = 0$. هر عضو R که مقسوم‌علیه صفر نباشد نامقسوم‌علیه صفر نامیده می‌شود . مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R را بانماد $\mathrm{Zdv}\,(R)$ نمایش می‌دهیم .

تعریف ۲.۱. فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند . ایده‌آل $\{a \in R \ : \ aJ \subseteq I\}$ را ایده‌آل خارج قسمتی[۱] دو ایده‌آل I, J ، $I :_R J$ ، می‌نامیم .

درحالت خاص $I = 0$ ،ایده‌آل فوق پوچساز J ، $\mathrm{Ann}_R\,(J)$ ، نامیده می‌شود .

[۱] Quotient

لم ۳.۱. *فرض کنید I ، J و K ایده‌آلهایی از حلقه R باشد ، دراین صورت :*

$$((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$$

برهان. رجوع شود به ۳۳.۲ از [۱۷] . □

لم وتعریف ۴.۱. فرض کنید R و S دو حلقه و $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای باشد .

۱. هرگاه J ایده‌آل S باشد ، آن‌گاه $f^{-1}(J) := \{r \in R \mid f(r) \in J\}$ ایده‌آلی از R است که آن‌را حاصل تحدید J نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ نامیده و با نماد J^c نمایش می‌دهیم .

۲. به ازای هر ایده‌آل I از R ایده‌آل $f(I)S$ ، در S را حاصل توسیع I نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ نامیده و آن‌را با I^e نمایش می‌دهیم .

برهان. رجوع شود به ۴۱.۲ از [۱۷] . □

لم وتعریف ۵.۱. فرض کنید R حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد . دراین صورت ایده‌آل

$$\{r \in R \mid r^n \in I : n \in \mathbb{N}\}$$

را رادیکال I ، $\sqrt{I}$ ، می‌نامند .

برهان. رجوع شودبه لم وتعریف ۴۶.۳ از [۱۷] . □

تعریف و نمادگذاری ۶.۱. *فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد . واریته I* [۲] ، $\mathrm{Var}(I)$ ، *به صورت*

$$\{\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathrm{P}\}$$

[۲] Variety

تعریف می‌کنیم که در آن $\text{Spec}\,(R)$ *مجموعه ایده‌آلهای اول* R *می‌باشد . در این صورت :*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\text{P}\in\text{Var}(I)} \text{P} = \bigcap_{\substack{\text{P}\in\text{spec}(R)\\ I\subseteq \text{P}}} \text{P}.$$

برهان. رجوع شود به لم و تعریف ۴۸.۳ از [۱۷] . $\square$

تعریف ۷.۱. فرض کنید R یک حلقه و Q ایده‌آل سرهٔ R باشد. ایده‌آل Q را ایده‌آل اولیه حلقه R می‌نامند ، هرگاه به ازای عناصر $a,b\in R$ اگر $ab\in Q$ آنگاه $a\in Q$ یا عدد $n\in\mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوریکه $b^n\in Q$. همچنین اگر به ازای ایده‌آل اولی از R مانند P ، $\sqrt{Q}=\text{P}$ ، آنگاه Q را ایده‌آل P ـ اولیه R می‌نامند .

تعریف ۸.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از R باشد . ایده‌آل اول P از حلقه R را ایده‌آل اول مینیمال ایده‌آل I می‌نامند هرگاه $I\subseteq \text{P}$ و ایده‌آل اولی مانند P' از R موجود نباشد بطوریکه $I\subseteq P'\subset \text{P}$. اگر R ناصفر باشد ایده‌آلهای اول مینیمال ایده‌آل صفر حلقه R را ایده‌آلهای اول مینیمال حلقه R می‌نامند . مجموعه تمام ایده‌آلهای اول مینیمال ایده‌آل I را با نماد $\text{Min}(I)$ نشان می‌دهند .

تعریف ۹.۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل واقعی حلقهٔ R باشد . ایده‌آل I از حلقهٔ R، دارای تجزیهٔ اولیه است هرگاه آن را بتوان به‌صورت اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آلهای P ـ اولیه مانند $I=Q_۱\cap\ldots\cap Q_n$ نوشت . این تجزیه را مینیمال گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد .

۱. $\sqrt{Q_۱},\ldots,\sqrt{Q_n}$ ایده‌آلهای اول متمایز در R باشند؛

۲. به ازای هر $j=۱,\ldots,n$، $Q_j\nsupseteq \bigcap_{\substack{i=۱\\ j\neq i}}^{n} Q_i$.

قضیه ۱۰.۱. *فرض کنید I ایده‌آل تجزیه پذیری از حلقه R بوده و $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ تجزیهٔ اولیه مینیمال I باشد . فرض کنید $(1 \leq i \leq n)$ $\mathrm{P}_i = \sqrt{Q_i}$ و $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(R)$ در این‌صورت عبارات زیر معادلند :*

۱ . *i ای موجود است بطوریکه $\mathrm{P} = \mathrm{P_i}$ ؛*

۲ . *عضوی مانند $a \in R$ وجود دارد بطوریکه $\mathrm{P} = (I :_R a)$ یک ایده‌آل P – اولیه است ؛*

۳ . *عضوی مانند $a \in R$ وجود دارد بطوریکه $\mathrm{P} = \sqrt{(I :_R a)}$.*

برهان. رجوع شود به قضیهٔ ۱۷.۴ از [۱۷] . □

ملاحظه ۱۱.۱. *مجموعهٔ n عضوی $\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P_n}\}$ متشکل از ایده‌آلهای اول به‌دست آمده از تجزیهٔ مینیمال ایده‌آل I مستقل از تجزیه I است .*

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید I ایده‌آل تجزیه پذیری از حلقه R بوده و به ازای $i = 1, \ldots, n$ ، $\mathrm{P}_i = \sqrt{Q_i}$ ، $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ تجزیهٔ اولیه مینیمال I باشد . در این‌صورت مجموعه n عضوی $\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ را مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته به I می‌نامند و با نماد $\mathrm{ass}\ I$ یا $\mathrm{ass_R}\ I$ نشان می‌دهند . عضوهای $\mathrm{ass}\ I$ را ایده‌آلهای اول وابسته به I می‌نامند .

قضیه ۱۳.۱. *فرض کنید I ایده‌آل تجزیه پذیری از حلقه R بوده و $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec(R)}$. در این‌صورت P ایده‌آل اول مینیمال I است اگر و تنها اگر P عضوی مینیمال در مجموعهٔ $\mathrm{ass}\ I$ باشد . بنابراین تمام ایده‌آلهای اول مینیمال I به مجموعهٔ $\mathrm{ass}\ I$ تعلق دارد . لذا تعداد ایده‌آلهای اول مینیمال I متناهی بوده و $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{ass}\ I$.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۲۴.۴ از [۱۷] . □

ملاحظه ۱.۱۴. *فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از حلقهٔ R باشد. اگر I ایده‌آل تجزیه پذیری از حلقه R و $P \in \mathrm{Spec(R)}$، آنگاه بنابر قضیهٔ ۱.۱۳ مجموعهٔ $\mathrm{ass}\ I$ دارای دو نوع ایده‌آل اول است. یک نوع از این ایده‌آل‌ها، عضوهای مینیمال مجموعهٔ $\mathrm{ass}\ I$ هستند. این نوع از ایده‌آل‌ها دقیقاً همان ایده‌آلهای اول مینیمال I می‌باشند و آن‌ها را ایده‌آلهای اول منفرد ایده‌آل [۳] I می‌نامند. سایر ایده‌آلهای مجموعهٔ $\mathrm{ass}\ I$ را ایده‌آلهای اول محاطی [۴] I می‌نامند.*

تعریف ۱.۱۵. فرض کنید $\{I_i\}_{i\geq 1}$ خانواده‌ای از ایده‌آلهای حلقه R باشد. حلقه R را نوتری گویند هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R مانند $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$ ایستا باشد.

قضیه ۱.۱۶. *فرض کنید R یک حلقه باشد. در این‌صورت عبارات زیر معادلند:*

۱. *R حلقه‌ای نوتری است؛*

۲. *هر مجموعه ناتهی از ایده‌آلهای R دارای عضو ماگزیمال است؛*

۳. *هر زنجیر صعودی از ایده‌آلهای R مانند $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$ ایستا است. یعنی به ازای عدد طبیعی n، $I_n = I_{n+1}$؛*

۴. *هر ایده‌آل R با تولید متناهی است.*

برهان. رجوع شود به گزاره‌های ۱.۶ و ۲.۶ از [۱۷]. □

تعریف ۱.۱۷. ایده‌آل I را تحویل ناپذیر [۵] گویند، اگر نتوان I را به‌صورت اشتراک دو ایده‌آل واقعی متمایز نوشت.

---

[۳] Isolated prime ideal

[۴] Embeded prime ideal

[۵] Irreducible

قضیه ۱۸.۱. *در حلقه‌های نوتری همهٔ ایده‌آلهای واقعی تجزیه پذیر هستند .*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۳.۷ از [۱۷] . □

گزاره ۱۹.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آل سره از R باشد . در این‌صورت هر ایده‌آل اول وابسته به I مانند P را می‌توان به‌صورت $\mathrm{P} = (I :_R a)$ نوشت که در آن $a \in R - \{0\}$.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۱۷.۷ از [۱۷] . □

قضیه ۲۰.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری ، I ایده‌آل سره از R و $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec(R)}$ باشد . در این‌صورت $\mathrm{P} \in \mathrm{ass\ I}$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $a \in R$ بطوریکه $\mathrm{P} = (I :_R a)$ و این یعنی اگر و فقط اگر عضوی مانند $b \in \dfrac{R}{I}$ موجود باشد بطوریکه $\mathrm{P} = (0 :_R b)$.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۲۲.۸ از [۱۷] . □

تعریف و نمادگذاری ۲۱.۱. *فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ نوتری R بوده و $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(R)$. ایده‌آل اول P را ایده‌آل اول وابسته به M گویند هرگاه عنصر غیر صفری مانند m از M موجود باشد بطوریکه $\mathrm{P} = (0 :_R m)$. مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته به M را با $\mathrm{Ass}_R(M)$ نشان می‌دهند .*

لم ۲۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری ، M یک R-مدول و N زیر مدولی از آن باشند . در این‌صورت $\mathrm{Ass}_R(N) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M)$.*

برهان. فرض کنید $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_R(N)$ در این‌صورت عضو ناصفری مانند n از Nموجود است بطوریکه $\mathrm{P} = (0 :_R n)$. از طرفی چون $N \subseteq M$ پس $n \in M$ و $\mathrm{P} = (0 :_R n)$. درنتیجه $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. □

ملاحظه ۲۳.۱. *فرض کنید I ایده‌آل سره از حلقهٔ نوتری R باشد . در این‌صورت طبق قضیه ۲۰.۱ ، $\mathrm{P} \in \mathrm{ass}\ I$ اگر و فقط اگر $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}(\frac{R}{I})$. همچنین به ازای عدد صحیح مثبت n اگر $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}(\frac{R}{I^n})$ آنگاه به ازای عنصر ناصفری مانند a از R داریم $\mathrm{P} = (I^n :_R a)$ ، که در آن $a \notin I^n$.*

لم ۲۴.۱. *فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ نوتری R و S زیر مجموعهٔ بسته ضربی از R باشد . در این‌صورت*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{\mathrm{P}S^{-1}R \mid \mathrm{P} \cap S = \emptyset, \mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_R(M)\}$$

($S^{-1}R$ نشان دهندهٔ حلقهٔ کسرهای R نسبت به S است).

برهان. رجوع شود به گزاره ۳۸.۹ از [۱۷] . □

تعریف و نمادگذاری ۲۵.۱. *فرض کنید R یک حلقه، $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(R)$ و $S = R - \mathrm{P}$ زیر مجموعهٔ بسته ضربی از حلقهٔ R باشد . حلقهٔ کسرهای $S^{-1}R$ را با R_P نشان می‌دهند و آن را موضعی سازی حلقهٔ R نسبت به ایده‌آل اول P می‌نامند . R_P یک حلقهٔ موضعی است و PR_P تنها ایده‌آل ماگزیمال آن است .*

گزاره ۲۶.۱. *فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ نوتری R و P ایده‌آل اول از حلقهٔ R باشد . در این‌صورت $\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ اگر و فقط اگر $\mathrm{P}R_\mathrm{P} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathrm{P}}(M_\mathrm{P})$.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۶.۲ از [۱۷] . □

قضیه ۲۷.۱. *فرض کنید I ایده‌آل تجزیه‌پذیر از حلقه R باشد . دراین صورت :*

$$\mathrm{Zdv}_R\left(\frac{R}{I}\right) = \bigcup_{\mathrm{P}\in \mathrm{assI}} \mathrm{P}.$$

برهان. رجوع شود به گزاره ۱۹.۸ از [۱۷] . □

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید P ایده‌آل اولی از حلقه R باشد. سوپریمم طول زنجیرهایی از ایده‌آلهای اول R مانند $\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{P}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{P}_n = \mathrm{P}$ را ارتفاع P تعریف می‌کنیم و با نماد $\mathrm{ht}\,(\mathrm{P})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آل واقعی از آن باشد. ارتفاع I را با نماد $\mathrm{ht}\,(I)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}\,(I) = \min\left\{\mathrm{ht}\,(\mathrm{P}) \ \mid I \subseteq \mathrm{P}\right\} = \min\left\{\mathrm{ht}\,(\mathrm{P}) \ \mid \mathrm{P} \in \mathrm{Min}\,(I)\right\}.$$

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. بعد R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim\,(R) = \sup\left\{\mathrm{ht}\,(\mathrm{P}) \mid \mathrm{P} \in \mathrm{spec}\,(\mathrm{R})\right\} = \sup\left\{\mathrm{ht}\,(\underline{\mathrm{m}}) \mid \underline{\mathrm{m}} \in \mathrm{Max}\,(\mathrm{R})\right\}.$$

نکته ۳۱.۱. *با توجه به تعریف ۳۰.۱ اگر R حلقه شبه‌موضعی باشد(یعنی تنها یک ایده‌آل ماگزیمال منحصر به فرد داشته باشد) و ایده‌آل ماگزیمال آن $\underline{\mathrm{m}}$ باشد، آنگاه $\dim R = \mathrm{ht}\underline{\mathrm{m}}$ و بنابراین به ازای هر $\mathrm{P} \in \mathrm{spec}\,(R)$ داریم :*

$$\mathrm{ht}\,(\mathrm{P}) = \mathrm{ht}_{R_P} P R_P = \dim R_P.$$

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید $(R, \underline{\mathrm{m}})$ یک حلقه موضعی باشد . دراین صورت R را منظم گویند هرگاه :

$$\dim\,(R) = \mathrm{vdim}_{\frac{R}{\underline{\mathrm{m}}}} \frac{\underline{\mathrm{m}}}{\underline{\mathrm{m}}^2}.$$

قضیه ۳۳.۱. *فرض کنید $R = \mathrm{k}\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان k و I ایده‌آل واقعی R باشد . دراین صورت :*

$$\dim (R) = \dim \left(\frac{R}{I}\right) + \mathrm{ht}\,(I) .$$

برهان. رجوع شود به نتیجه ۲.۱.۷ از [۱۸] . □

تعریف ۳۴.۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول روی حلقه R باشد . یک پایه برای M خانواده $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از اعضای M است که :

۱. $\{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ یک مجموعه مولد برای M باشد.

۲. هر عضو $m \in M$ بطور منحصر به فردی به شکل $m = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ نوشته می‌شود بطوریکه به ازای‌هر $\lambda \in \Lambda$ ، $r_\lambda \in R$ و فقط تعداد متناهی از r_λ ها مخالف صفر باشند. $R-$ مدول F را یک $R-$ مدول آزاد گوییم هرگاه حداقل دارای یک پایه باشد .

قضیه و تعریف ۳۵.۱. *فرض کنید R یک حلقه غیر بدیهی و F ، $R-$ مدول آزاد با پایه متناهی باشد . دراین صورت هر پایه F متناهی بوده و همه پایه‌های F همعددند . تعداد اعضای پایه F را رتبه F نامیده و با $rankF$ نشان می‌دهند .*

برهان. رجوع شود به قضیه ۵۸.۶ از [۱۷] . □

تعریف ۳۶.۱. فرض کنید M یک مدول روی حلقه R باشد . عنصر غیر صفر r از R را یک مقسوم‌علیه صفر روی M گوییم هرگاه $m \in M$ چنان موجود باشد که $m \neq 0$ و $rm = 0$. مجموعه تمام مقسوم‌علیه‌های صفر روی M را با $\mathrm{Zd}_R\,(M)$ نشان می‌دهند .

تعریف ۳۷.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول غیر صفر متناهی مولد باشد . عناصر $a_1, a_2, \cdots, a_n$ از R را یک $M-$ رشته ($M-$ رشته منظم) به طول n گوییم ، هرگاه :

۱. $M \neq (a_1, a_2, \cdots, a_n)\, M$

۲. به ازای هر $i = 1, 2, \cdots, n$ ، $a_i \notin \mathrm{Zd}_R\left(\frac{M}{(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1})M}\right)$.

تعریف ۳۸.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول غیر صفر متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد که $M \neq IM$. $(a_i)_{i=1}^{n}$ را $M-$ رشته ماگزیمال در I گویند هرگاه $(a_i)_{i=1}^{n}$ یک $M-$ رشته در I بوده و $I \subseteq \mathrm{Zd}_R\left(\frac{M}{(a_1, a_2, \cdots, a_n)M}\right)$.

لم وتعریف ۳۹.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول غیرصفر متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد که $M \neq IM$. دراین صورت طول همه $M-$ رشته‌های ماگزیمال واقع در ایده‌آل I با هم برابرند . این عدد را درجه I روی M مینامند و با $\mathrm{grade}_M(I)$ نشان می‌دهند . هرگاه $M = R$ ، آن‌گاه درجه I روی M را با $\mathrm{grade}(I)$ نشان می‌دهند .

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۶.۱۳ از [۱۷] . □

تعریف ۴۰.۱. فرض کنید $(R, \underline{m})$ یک حلقه موضعی و M یک مدول $R-$ باشد . دراین صورت درجه $\underline{m}$ روی M را با $\mathrm{depth}_R(M)$ نشان می‌دهند و آن‌را عمق مدول M روی R می‌نامند .

تعریف ۴۱.۱. حلقه نوتری R را کوهن-مکالی گویند هرگاه به‌ازای هر ایده‌آل I از R ،

$$\mathrm{ht}(I) = \mathrm{grade}(I)$$

به ویژه اگر $(R, \underline{m})$ یک حلقه موضعی باشد ، آن‌گاه R کوهن-مکالی است هرگاه

$$\dim(R) = \mathrm{depth}(R) .$$

لم ۴۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و J ایده‌آلی از آن باشد که توسط یک $R-$ رشته به طول n تولید می‌شود . دراین صورت* $\mathrm{ht}(J) = n$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۱۶.۱۹ از [۱۷] . □

تعریف ۴۳.۱. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد . I را ناآمیخته [۶] گویند ، هرگاه به ازای هر ایده‌آل اول P از $\operatorname{Ass}_R\left(\frac{R}{I}\right)$ ، $\operatorname{ht}(I)=\operatorname{ht}(\mathrm{P})$.

تعریف ۴۴.۱. فرض کنید $(R,\underline{\mathrm{m}})$ حلقه موضعی و M یک $R-$ مدول متناهی‌مولد باشد . مدول M را کوهن-مکالی گویند اگر $M=\langle ۰\rangle$ یا $\dim(M)=\operatorname{depth}(M)$.

قضیه ۴۵.۱. *فرض کنید* $(R,\underline{\mathrm{m}})$ *حلقه موضعی و* $M\neq\langle ۰\rangle$ *یک* $R-$ *مدول کوهن - مکالی باشد . همچنین فرض کنید* $\mathrm{P}\in\operatorname{Ass}_{\mathrm{M}}(M)$ *. دراین صورت* $\operatorname{depth}(M)=\dim\left(\frac{R}{\mathrm{P}}\right)$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۱.۳.۱۱ از [۱۸] . □

تعریف ۴۶.۱. حلقهٔ R را یک حلقهٔ مدرج گویند هرگاه به ازای خانواده‌ای از زیر گروه‌های آبلی R مانند $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ داشته باشیم :

۱. $R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}R_n$؛

۲. به ازای اعداد صحیح دلخواه n,m : $R_nR_m\subseteq R_{n+m}$.

حلقهٔ R را حلقهٔ مدرج غیر منفی گویند اگر به ازای $n<۰$، $R_n=۰$.

تعریف و نمادگذاری ۴۷.۱. *فرض کنید* $R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}R_n$ *یک حلقه مدرج باشد.دراین صورت هر عضو* $r\in R$ *دارای نمایش منحصربه‌فردی به صورت* $r=\sum_{m\in\mathbb{Z}}r_m$ *است که در آن به جز تعداد متناهی از* r_m *ها، بقیه صفر هستند . اعضای* R_m *را همگن از درجه* m *و* r_m *ها را مولفه‌های همگن* r *،از درجه* m *می‌گویند .*

---

[۶] Unmixed