بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی محض

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

پایداری قاب‌های تعمیم‌یافته

مؤلف:

نسیم سلطانی‌نژاد

استاد راهنما:

دکتر اکبر نظری

بهمن ۱۳۹۳

این پایان‌نامه تحصیلی به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی محض

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو: نسیم سلطانی‌نژاد

استاد راهنما: دکتر اکبر نظری

داور ۱:

داور ۲:

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده در جلسه دفاع:

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده:

تقدیم به مقدس‌ترین واژه‌ها در لغت‌نامه دلم

پدر و مادر عزیزم

مهربان فرشتگانی که مهر آسمانی‌شان آرام‌بخش آلام‌زمینی است.
آن دو بزرگواری که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

باشد که حاصل تلاشم نسیم‌گونه غبار خستگیتان را بزداید.

قدردانی

ستایش برای خداست، آن نخستین بی‌آغاز و آن واپسین بی‌انجام. ای هستی بخش، وجود من را بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست. ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

در ابتدا صیمانه‌ترین تقدیرها، تقدیم به خانواده عزیزم که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبایی زندگی‌ام مدیون حضور سبز آنهاست.

از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر اکبر نظری که با سعه صدر مرا راهنمایی نموده و با ارائه نظرات سازنده و رهنمودهای خویش در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند، کمال تشکر را دارم.

از اساتید فرزانه جناب آقای دکتر محمد علی ولی و دکتر علی جباری شاهزاده محمدی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم. و در پایان از تمامی اساتیدی که طی این سالیان اندیشیدن را به من آموختند و سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشتند سپاسگزارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

نسیم سلطانی‌نژاد

بهمن ۱۳۹۳

چکیده

قاب‌های تعمیم‌یافته، تعمیم طبیعی قاب‌ها هستند که شامل بسیاری دیگر از تعمیم‌های اخیر از قاب می‌باشند. برای مثال، شبه‌تصویرهای کراندار، قاب‌های زیرفضایی، قاب‌های خارجی، قاب‌های مایل، شبه قاب‌ها و ... قاب‌های تعمیم‌یافته می‌باشند. علاوه براین قاب‌های تعمیم‌یافته هم‌ارز با فضاهای پایدار شکافنده شناخته شده است. در این پایان‌نامه پایداری قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته را مطالعه می‌کنیم. در ابتدا برخی از خواص قاب‌های تعمیم‌یافته و دنباله‌های بسل تعمیم‌یافته را ارائه می‌دهیم، پس از آن ثابت می‌کنیم که قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته تحت آشفتگی‌های کوچک پایدارند. همچنین پایداری دوگان قاب‌های تعمیم‌یافته را نیز مطالعه می‌کنیم.

واژگان کلیدی: قاب‌ها؛ قاب‌های تعمیم‌یافته؛ دنباله‌های بسل ؛ دنباله‌های بسل تعمیم‌یافته؛ دوگان؛ پایداری؛ آشفتگی.

مقدمه

نظریه قاب‌ها در فضای هیلبرت توسط دافین و شیفر[۱] در سال ۱۹۵۲ با مطالعه برخی مسائل عمیق در سری‌های فوریه غیرهارمونیک معرفی شدند. بعد از مقاله اساسی(بنیادی) توسط دوبشی و گراسمن و میر [۲] نظریه قاب‌ها به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفتند. یک قاب مجموعه‌ای از بردارهای دارای حشو است که در شرط پایه صدق می‌کند ولی یکتایی نمایش را برقرار نمی‌سازد، چون شرط پایه متعامدیکه خیلی قوی است ممکن است پیدا کردن پایه‌ای که در شرط اضافی صدق می‌کند که یک کاربرد معین دارد مشکل باشد، شرط قاب ضعیفتر است بنابراین می‌توان یک قاب شامل خواص ویژه پیدا کرد که برای پایه غیر ممکن است. قاب‌ها خصوصیات جالبی دارند که باعث می‌شوند آنها در پردازش تصویر، پردازش سیگنال‌ها، شبکه‌های عصبی و در بسیاری از زمینه‌های دیگر مفید باشند. برای مطالعه بیشتر خوانندگان علاقمند می‌توانند به [۳، ۵، ۹] مراجعه کنند. بعدها مفهوم قاب تعمیم‌یافته توسط سان[۳] ارائه شد، که در آن قاب‌های تعمیم‌یافته، تعمیم طبیعی قاب‌ها هستند و شامل بسیاری دیگر از تعمیم‌های اخیر از قاب می‌باشند. برای مطالعه‌ی بیشتر به مراجع [۱۴، ۱۵] مراجعه کنید. ما مطالب این پایان‌نامه را در سه فصل تنظیم می‌کنیم. فصل اول شامل دو بخش است که در بخش اول به مختصری از مباحث آنالیز تابعی، می‌پردازیم. در بخش دوم مباحثی از قاب‌ها به همراه چند مثال را گرد هم می‌آوریم. در فصل دوم به بررسی ویژگی‌های قاب تعمیم‌یافته و برخی خواص دنباله‌های بسل تعمیم‌یافته می‌پردازیم. در فصل سوم پایداری قاب‌ها و قاب‌های تعمیم‌یافته، تحت آشفتگی‌های کوچک را مورد بررسی قرار می‌دهیم، همچنین پایداری دوگان قاب‌های تعمیم‌یافته را نیز بررسی می‌کنیم.

[۱] Duffin, Schaeffer

[۲] Daubechies, Grossmann, Meyer

[۳] Sun

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

این فصل شامل دو بخش می‌باشد، در بخش اول به طور خلاصه مفاهیم و نتایج مختلفی که برای مطالعه در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه ضروری هستند را مطرح می‌کنیم. در بخش دوم از این فصل به اختصار در مورد قاب‌ها بحث خواهیم کرد که در فصل‌های بعدی به آنها نیازمندیم. بنابراین اگر خواننده‌ای از قبل با این مفاهیم آشنایی ندارد، می‌تواند برای مطالعه بیشتر بخش اول به مراجع [۱، ۲، ۵] رجوع کند.

۱ـ۱ فضاهای هیلبرت و عملگرهای روی فضاهای هیلبرت

در سراسر این پایان‌نامه نمادهای $\mathbb{C}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$و $\mathbb{N}$ به ترتیب بیانگر اعداد مختلط،اعداد حقیقی،اعداد صحیح و اعداد طبیعی می‌باشند. همچنین X یک فضای برداری و F میدان مختلط $\mathbb{C}$ است. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم، $F^n = F \times F \times ... \times F$(حاصل‌ضرب دکارتی n نسخه از F). عناصر F^n به صورت $x = (x_۱, x_۲, ..., x_n)$، $x_i \in F$ و $i = ۱, ۲, ۳..., n$ نوشته می‌شوند. همچنین مزدوج مختلط z را با $\overline{z}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱ـ۱ـ۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F باشد. یک نرم روی X عبارت است از تابعی مانند $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ به طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in F$.

۱) $\|x\| \geq ۰,$

۲) $x = ۰ \Longleftrightarrow \|x\| = ۰,$

۳) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$

۴) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی).

اگر روی فضای برداری X یک نرم وجود داشته باشد، X یک فضای نرم‌دار نامیده می‌شود.

مثال ۱ـ۱ـ۲. تابع $\|.\| : F^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $\|(x_۱, x_۲, ..., x_n)\| = (\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود، یک نرم روی F^n است و نرم استاندارد روی F^n نامیده می‌شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۳. فرض کنید U و V دو فضای نرم‌دار باشند. تابع $T : U \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی (عملگر خطی) نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\alpha, \beta \in F$ و $x, y \in U$،

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

و همچنین T کراندار نامیده می‌شود هرگاه یک عدد حقیقی و مثبت k موجود باشد به طوری‌که برای هر $x \in U$، داشته باشیم:

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|.$$

لم ۱ـ۱ـ۴. *اگر U و V دو فضای نرم‌دار و $T : U \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه T کراندار است اگر و تنها اگر T پیوسته باشد.*

تعریف ۱ـ۱ـ۵. فرض کنید U و V دو فضای نرم‌دار باشند، اگر $T : U \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد در این صورت نرم T به صورت

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \qquad \|x\| \leq 1, \quad x \in U\}$$

تعریف می‌شود. اگر $\|T\| < \infty$ آنگاه عملگر T کراندار و در غیر این صورت عملگر T بی‌کران نامیده می‌شود.

لم ۱ـ۱ـ۶. *فرض کنید X یک فضای نرم‌دار روی F با نرم $\|\cdot\|$ باشد آنگاه*

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$$

تعریف ۱ـ۱ـ۷. هر فضای نرم‌دار کامل، یک فضای باناخ نامیده می‌شود.

نمادگذاری. فرض کنید U و V دو فضای نرم‌دار باشند، مجموعه تمام تبدیل‌های خطی کراندار از U به V را با $\mathcal{L}(U,V)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱ـ۱ـ۸. فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد. ضرب‌داخلی روی X عبارت است از تابع $\langle \cdot\,,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ به طوری‌که برای هر $x, y, z \in X$، و $\alpha, \beta \in F$،

۱) $\langle x, x\rangle \geq 0,$

۲) $x = 0 \Longleftrightarrow \langle x, x\rangle = 0,$

۳) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle,$

۴) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$

فضای برداری X با ضرب‌داخلی $\langle \cdot , \cdot \rangle$ یک فضای ضرب‌داخلی نامیده می‌شود.

مثال ۱ـ۱ـ۹. تابع $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ که به صورت $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ تعریف می‌شود یک ضرب‌داخلی روی $\mathbb{C}^n$ است.

لم ۱ـ۱ـ۱۰. *اگر X یک فضای ضرب‌داخلی باشد، تابع $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود، یک نرم روی X است و آن را نرم القا شده توسط ضرب‌داخلی می‌نامند.*

تعریف ۱ـ۱ـ۱۱. یک فضای ضرب‌داخلی که نسبت به متر متناظر با نرم القا شده توسط ضرب‌داخلی کامل باشد، یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۲. اگر x برداری در فضای ضرب‌داخلی Xباشد، آنگاه

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| \quad : \|y\| = 1, y \in X\}.$$

لم ۱ـ۱ـ۱۳. *فرض کنید X یک فضای ضرب‌داخلی باشد و $x, y \in X$ در این صورت نامساوی کشی‌ـ شوارتز[1] به صورت زیر برقرار است:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

تعریف ۱ـ۱ـ۱۴. فرض کنید X یک فضای ضرب‌داخلی باشد. بردارهای $x, y \in X$ متعامد نامیده می‌شوند هرگاه $\langle x, y \rangle = 0$ در این صورت می‌نویسیم، $x \perp y$.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۵. اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $E \subset H$، آنگاه متمم متعامد E که با نماد $E^{\perp}$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^{\perp} = \{x : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in E\}.$$

نکته ۱ـ۱ـ۱۶. *همواره $E^{\perp}$ یک زیر فضای بسته از H است.*

[1] Cauchy-Schwarz inequality

گزاره ۱ـ۱ـ۱۷. *اگر H یک فضای هیلبرت باشد و E زیر فضای بسته‌ای از H باشد، در این صورت*

$$H = E \oplus E^{\perp},$$

که در آن $\oplus$ جمع مستقیم روی دو فضا می‌باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۱۸. دنباله $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را در فضای هیلبرت H متعامدیکه می‌نامند هرگاه:

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} ۱ & m = n \\ ۰ & m \neq n \end{cases}.$$

تعریف ۱ـ۱ـ۱۹. فرض کنید $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت H باشد به طوری‌که

$$\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=۱}^{\infty} = H,$$

در این صورت دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را کامل نامند.

لم ۱ـ۱ـ۲۰ (نامساوی بسل)**.** *فرض کنید X یک فضای ضرب‌داخلی و $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله متعامدیکه در X باشد. در این صورت برای هر $x \in X$،*

$$\sum_{n=۱}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^{۲} \leq \|x\|^{۲}.$$

قضیه ۱ـ۱ـ۲۱. *فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله متعامدیکه در H باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

۱) $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{۰\},$

۲) $\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = H,$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^{۲} = \|x\|^{۲}, \qquad (x \in X),$

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x, \qquad (x \in X).$

تساوی سوم اتحاد پارسوال نامیده می‌شود.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متعامدیکه در H باشد. در این صورت $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه متعامدیکه نامیده می‌شود، هرگاه یکی از شرایط معادل قضیه ۱ـ۱ـ۲۱ برقرار باشد.

مثال ۱ـ۱ـ۲۳. فرض کنید که $H = L^2[-\pi, \pi]$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n(x) = e^{inx}$ در این صورت دنباله $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه متعامدیکه در فضای هیلبرت H است.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۴. فضای هیلبرت H را جدایی پذیر گویند، هرگاه بردارهای $x_1, x_2, x_3, \dots$ در H وجود داشته باشند که یک زیر فضای چگال در H تولید کنند.

قضیه ۱ـ۱ـ۲۵. *هر فضای نرم‌دار با بعد متناهی، جدایی‌پذیر است.*

مثال ۱ـ۱ـ۲۶. فضای $\mathbb{R}$ جدایی‌پذیر است.

تعریف ۱ـ۱ـ۲۷. هر تبدیل خطی $f : H \longrightarrow F$، یک تابعک خطی نامیده می‌شود.

حال قضیه ای را که به هر تابعک خطی و پیوسته روی فضای هیلبرت H یک ضرب‌داخلی نسبت می‌دهد، بیان می‌کنیم. این قضیه به قضیه نمایش ریس[۲] مشهور است.

قضیه ۱ـ۱ـ۲۸ (نمایش ریس). *اگر f یک تابعک خطی کراندار روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه y منحصربه فرد در H وجود دارد که برای هر $x \in H$، $f(x) = \langle x, y \rangle$ و $\|f\| = \|y\|$.*

فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند و $T \in \mathcal{L}(H, K)$. در این صورت عملگر یکتای $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $x \in H$ و $y \in K$ در خاصیت

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle,$$

صدق کند، T^* عملگر الحاقی T نامیده می‌شود.

قضیه ۱ـ۱ـ۲۹. *فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند و $T \in \mathcal{L}(H, K)$. در این صورت:*

۱) $T^{**} = T$.

۲) $\|T^*\| = \|T\|$.

[۲] Riesz representation theorem

۳) $\|T^*T\| = \|T\|^۲$.

لم ۱ـ۱ـ۳۰. *فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند. در این صورت:*

۱) $\ker T = (\mathrm{Im} T^*)^{\perp}$.

۲) $\ker T^* = (\mathrm{Im} T)^{\perp}$.

۳) $\overline{\mathrm{Im} T} = (\ker T^*)^{\perp}$.

۴) $\overline{\mathrm{Im} T^*} = (\ker T)^{\perp}$.

تعریف ۱ـ۱ـ۳۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $T \in \mathcal{L}(H, H)$. در این صورت T خودـالحاق است، اگر $T = T^*$.

مثال ۱ـ۱ـ۳۲. عملگر همانی I روی H خودـالحاق است

لم ۱ـ۱ـ۳۳. *فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $T \in \mathcal{L}(H)$. اگر عملگر T معکوس‌پذیر باشد، آنگاه T^* معکوس‌پذیر است و $(T^*)^{-۱} = (T^{-۱})^*$.*

لم ۱ـ۱ـ۳۴. *فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. اگر T یک عملگر خطی کراندار و خودـالحاق باشد و به ازای هر $x \in H$، $\langle Tx, x \rangle = ۰$ آنگاه $T = ۰$.*

قضیه ۱ـ۱ـ۳۵. *اگر T یک عملگر خودـالحاق روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه:*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = ۱, x \in H\}.$$

تعریف ۱ـ۱ـ۳۶. عملگر T روی فضای هیلبرت H مثبت است، هرگاه T خودـالحاق باشد و برای هر $x \in H$ داشته باشیم، $\langle Tx, x \rangle \geq ۰$.

لم ۱ـ۱ـ۳۷. *فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند و $T : H \longrightarrow K$ یک عملگر خطی کراندار با برد بسته باشد. آنگاه عملگر منحصر به فرد $T^{\dagger} : K \longrightarrow H$ وجود دارد به گونه ای که:*

$$N_{T^{\dagger}} = T(H)^{\perp} \quad \text{و} \quad T^{\dagger}(K) = (N_T)^{\perp} \quad \text{و} \quad TT^{\dagger} f = f \quad (f \in T(H))$$

تعریف ۱ـ۱ـ۳۸. عملگر $T^\dagger$ که از لم ۱ـ۱ـ۳۷ بدست می‌آید را عملگر شبه معکوس[۳] T می‌نامند.

لم ۱ـ۱ـ۳۹. *فرض کنید H و K دو فضای هیلبرت باشند و $T : H \longrightarrow K$ یک عملگر خطی و کراندار و با برد بسته باشد. در این صورت T دارای عملگر منحصربه فرد شبه‌معکوس $T^\dagger$ با خواص زیر می‌باشد:*

$$TT^\dagger T = T, \qquad\qquad T^\dagger T T^\dagger = T^\dagger.$$

اگر عملگر T کراندار و معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $T^\dagger = T^{-1}$.

نکته ۱ـ۱ـ۴۰. *می‌توان فرض کرد که برای هر گردایه $\{K_j\}_{j\in J}$ از فضاهای هیلبرت، فضای هیلبرتی مانند K وجود دارد به طوری که به ازای هر $j \in J$، $K_j \subseteq K$ و $K = \bigoplus_{j\in J} K_j$.*

لم ۱ـ۱ـ۴۱. *اگر T یک عملگر خطی روی فضای باناخ X باشد و ثابت‌های $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$ وجود داشته باشند که به ازای هر $x \in X$،*

$$\|Tx - x\| \leq \lambda_1 \|x\| + \lambda_2 \|Tx\|,$$

در این صورت T کراندار و معکوس‌پذیر است. بعلاوه برای هر $x \in X$ داریم:

$$\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_2}\|x\| \leq \|Tx\| \leq \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_2}\|x\|,$$

و

$$\frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1}\|x\| \leq \|T^{-1}x\| \leq \frac{1 + \lambda_2}{1 - \lambda_1}\|x\|.$$

[۳] Pseudo inverse

۱ـ۲ قاب‌ها

در این بخش به معرفی قاب‌ها در فضای هیلبرت می‌پردازیم. و برخی از تعاریف اساسی و قضایای مورد نیاز از مبحث قاب‌ها که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را یادآوری می‌کنیم. بحث را با تعریف قاب آغاز می‌کنیم قبل از شروع لازم به یادآوری است که مطالب این بخش را با جزئیات بیشتر می‌توان در مراجع [۳، ۵، ۹] مشاهده کرد. در سرتاسر این بخش H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و J مجموعه اندیس‌گذار شمارایی است.

تعریف ۱ـ۲ـ۱. خانواده شمارش‌پذیر $\{f_j\}_{j\in J}$ از عناصر در فضای هیلبرت H یک قاب برای H نامیده می‌شود هرگاه اعداد ثابت و مثبت A و B چنان موجود باشند که $0 < A \leq B < \infty$ و

$$A\|f\|^{2} \leq \sum_{j\in J}|\langle f, f_j\rangle|^{2} \leq B\|f\|^{2}, \qquad (f \in H). \qquad (۱ـ۱)$$

اعداد A و B به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند و لزوما یکتا نیستند.

مثال ۱ـ۲ـ۲. فرض کنید $H = \mathbb{R}^{2}$ و $\{e_1, e_2\}$ پایه متعامدیکه استاندارد برای $\mathbb{R}^{2}$ باشد. اگر $f_1 = e_1$ و $f_2 = e_1 - e_2$ و $f_3 = e_1 + e_2$ باشند، دنباله $\{f_j\}_{j=1}^{3}$ تشکیل یک قاب برای $\mathbb{R}^{2}$ می‌دهد، زیرا برای هر $f = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}|\langle f, f_j\rangle|^{2} &= \alpha^{2} + 0 + \alpha^{2} + \beta^{2} + \alpha^{2} + \beta^{2}\\ &= 3\alpha^{2} + 2\beta^{2},\end{aligned}$$

از طرفی

$$2(\alpha^{2} + \beta^{2}) \leq 3\alpha^{2} + 2\beta^{2} \leq 3(\alpha^{2} + \beta^{2}),$$

در نتیجه $\{f_j\}_{j=1}^{3}$ یک قاب با کران‌های $A = 2$ و $B = 3$ می‌باشد.

تعریف ۱ـ۲ـ۳. اگر در رابطه (۱ـ۱) ، $A = B$ باشد،آنگاه قاب را کیپ می‌گویند. یعنی

$$\sum_{j\in J}|\langle f, f_j\rangle|^{2} = A\|f\|^{2}, \qquad (f \in H).$$

مثال ۱ـ۲ـ۴. در فضای هیلبرت $H=\mathbb{R}^{۲}$ دنباله

$$f_{۱}=(۱,۰), f_{۲}=(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}), f_{۳}=(-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

یک قاب کیپ برای $\mathbb{R}^{۲}$ می‌باشد. زیرا برای هر$f=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{۲}$

$$\begin{aligned}\sum_{j=۱}^{۳}|\langle f,f_j\rangle|^{۲}&=\alpha^{۲}+۰+\frac{۱}{۴}\alpha^{۲}+\frac{۳}{۴}\beta^{۲}+\frac{۱}{۴}\alpha^{۲}+\frac{۳}{۴}\beta^{۲}\\&=\frac{۳}{۲}(\alpha^{۲}+\beta^{۲})\\&=\frac{۳}{۲}\|f\|^{۲}.\end{aligned}$$

بنابراین $\{f_j\}_{j=۱}^{۳}$ یک قاب با کران $A=\frac{۳}{۲}$ است.

تعریف ۱ـ۲ـ۵. اگر در رابطه (۱ـ۱) ، $A=B=۱$، آنگاه دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ را یک قاب پارسوال می‌نامند.

مثال ۱ـ۲ـ۶. فرض کنید $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه برای H باشد. اگر

$$\{\varphi_{۱}=e_{۱},\varphi_{۲}=۰,\varphi_{۳}=e_{۲},\varphi_{۴}=۰,\varphi_{۵}=e_{۳},...\}$$

و $f\in H$ آنگاه

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}|\langle f,\varphi_j\rangle|^{۲}&=|\langle f,e_{۱}\rangle|^{۲}+|\langle f,۰\rangle|^{۲}+|\langle f,e_{۲}\rangle|^{۲}+|\langle f,۰\rangle|^{۲}+...\\&=\sum_{j\in J}|\langle f,e_j\rangle|^{۲}.\end{aligned}$$

در این صورت $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ تشکیل یک قاب با کران‌های $A=B=۱$، می‌دهد لذا یک قاب پارسوال می‌باشد.

مثال ۱ـ۲ـ۷. هر پایه متعامدیکه $\{e_j\}_{j\in J}$ در فضای هیلبرت H یک قاب پارسوال است. زیرا

$$\sum_{j\in J}|\langle f,e_j\rangle|^{۲}=\|f\|^{۲},\qquad (f\in H).$$

در اینجا مثالی از یک دنباله متعامد را ذکر می‌کنیم که قاب نباشد.

مثال ۱ـ۲ـ۸. فرض کنید $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت H باشد . در این صورت دنباله

$$\{\frac{1}{j}e_j\}_{j\in J}=\{e_1,\frac{1}{2}e_2,\frac{1}{3}e_3,...\},$$

یک دنباله متعامد می‌باشد ولی یک قاب نمی‌باشد. فرض کنید عدد مثبتی مانند A وجود داشته باشد که در شرط پایینی قاب صدق کند، آنگاه برای یک k ثابت و $f:=e_k$ داریم:

$$A=A\|e_k\|^2\leq\sum_{j\in J}|\langle e_k,\frac{1}{j}e_j\rangle|^2=|\langle e_k,\frac{1}{k}e_k\rangle|^2=\frac{1}{k^2}$$

حال اگر $k\longrightarrow\infty$ آنگاه $A=0$. این تناقض نشان می‌دهد که $\{\frac{1}{j}e_j\}_{j\in J}$ تشکیل یک قاب نمی‌دهد.

تعریف ۱ـ۲ـ۹. دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ از عناصر فضای هیلبرت H را یک دنباله بسل گویند، هرگاه عدد ثابت و مثبت B چنان موجود باشد که :

$$\sum_{j\in J}|\langle f,f_j\rangle|^2\leq B\|f\|^2,\qquad (f\in H).$$

مثال ۱ـ۲ـ۱۰. فرض کنید $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت H باشد. اگر برای هر $j\in J$، $f_j=e_j+e_{j+1}$ آنگاه $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل است. زیرا،

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}|\langle f,f_j\rangle|^2&=\sum_{j\in J}|\langle f,e_j+e_{j+1}\rangle|^2\\&=\sum_{j\in J}|\langle f,e_j\rangle+\langle f,e_{j+1}\rangle|^2\\&\leq\sum_{j\in J}\Big(|\langle f,e_j\rangle|+|\langle f,e_{j+1}\rangle|\Big)^2\\&\leq 2\sum_{j\in J}|\langle f,e_j\rangle|^2+2\sum_{j\in J}|\langle f,e_{j+1}\rangle|^2\\&=4\|f\|^2.\end{aligned}$$

توجه کنید نامساوی دوم از رابطه‌ی $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ نتیجه شده است. در ادامه به تعریف

عملگر قاب می‌پردازیم. ولی قبل از آن به چند تعریف نیازمندیم. بحث را با تعریف عملگر ترکیب آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱ـ۲ـ۱۱. اگر $\{f_j\}_{j\in J}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H با کران‌های قاب A و B باشد. آنگاه عملگر ترکیب (عملگر پیش‌ـقاب) برای هر دنباله از اسکالرهای $\{c_j\}_{j\in J} \in \ell^{۲}(\mathbb{N})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T : \ell^{۲}(\mathbb{N}) \longrightarrow H,$$

با

$$T(\{c_j\}_{j\in J}) = \sum_{j\in J} c_j f_j.$$

نکته ۱ـ۲ـ۱۲. *عملگر ترکیب خوش‌تعریف و خطی کراندار است. برای اینکه نشان دهیم عملگر ترکیب T خوش‌تعریف است، کافیست سری $\sum_{j\in J} c_j f_j$ همگرا باشد. برای این منظور، ابتدا فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ و $n \geq m$ آنگاه:*

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=۱}^{n} c_j f_j - \sum_{j=۱}^{m} c_j f_j\| &= \|\sum_{j=m+۱}^{n} c_j f_j\| \\
&= \sup_{\|g\|=۱} |\langle \sum_{j=m+۱}^{n} c_j f_j, g\rangle| \\
&\leq \sup_{\|g\|=۱} \sum_{j=m+۱}^{n} |c_j \langle f_j, g\rangle| \\
&\leq \Big(\sum_{j=m+۱}^{n} |c_j|^{۲}\Big)^{\frac{۱}{۲}} \sup_{\|g\|=۱} \Big(\sum_{j=m+۱}^{n} |\langle f_j, g\rangle|^{۲}\Big)^{\frac{۱}{۲}} \\
&\leq \sqrt{B}\Big(\sum_{j=m+۱}^{n} |c_j|^{۲}\Big)^{\frac{۱}{۲}},
\end{aligned}$$

که درآن B کران بالای قاب است . حال چون $\{c_j\}_{j\in J} \in \ell^{۲}(\mathbb{N})$ یعنی $\Big(\sum_{j\in J} |c_j|^{۲}\Big)^{\frac{۱}{۲}} < \infty$ پس سری $\sum_{j\in J} c_j f_j$ در فضای هیلبرت H همگرا است، لذا T خوش‌تعریف است. بوضوح T