دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

تعمیم مربعات لاتین و مجموعه‌های تعیین‌کننده آن‌ها

نگارش:

مهدی خدادادی عمران

استاد راهنما:

دکتر سیّد محسن نجفیان

اسفند ۱۳۹۰

سپاس گزاری

بوسه بر دست پدر باید و مادر پایش
که به خردی ز آفات نگه دارت بود.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سید محسن نجفیان، که قطعاً بدون کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر آرین نژاد و جناب آقای دکتر قائمی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود این رساله شدند، کمال امتنان را دارم.

هم‌چنین از آقایان دکتر خودکار، دکتر مژده و دکتر بدفورد نیز به خاطر کمک‌هایشان متشکرم.

چکیده

یک مربع لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) یک آرایه $n\times n$ از نمادهای $0, 1, \ldots, k-1$ است، به‌طوری‌که هر یک از این نمادها حداکثر یک‌بار در هر سطر و هر ستون ظاهر شوند. فرض کنید $d(n,k)$ اندازه مینیمم مجموعه S از درایه‌های داده شده از یک آرایه $n \times n$ را نشان دهد، به‌طوری‌که یک توسیع منحصر بفرد از S به یک مربع لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) وجود داشته باشد. در این پایان‌نامه نخست در مورد ویژگی‌هایی از $d(n,k)$ برای $k=2n-1$ و $k=2n-2$ بحث می‌کنیم. برهان‌هایی را برای تساوی‌های $d(n,2n-1)=n^2-n$ به‌ازای nهای زوج و $d(n,2n-1)=n^2-n+1$ به‌ازای nهای فرد ارائه می‌دهیم. نتیجه جدید $d(n,2n-2)\geqslant n^2-\lfloor \frac{8n}{5} \rfloor$ را نشان می‌دهیم و هم‌چنین ساختاری را برای nهای مضرب ۵ در مربع‌های لاتین تعمیم یافته از نوع $(n,2n-2)$ به‌دست می‌آوریم. در نهایت به بررسی حاصل‌ضرب مستقیم مربع‌های لاتین تعمیم یافته و مجموعه بحرانی حاصل از آن برای برخی از $d(n,k)$ که $n<k<2n-1$ می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: مربع لاتین، مربع لاتین تعمیم یافته، مجموعه بحرانی، مجموعه تحمیلی، اندازه کوچک‌ترین مجموعه بحرانی .

مقدمه

مطالعه در مورد مربع‌های لاتین سابقه‌ای طولانی در ترکیبیات دارد. [۱۲، ۱۱] مراجعی در رابطه با مربع‌های لاتین می‌باشند، مربع‌های لاتین ارتباط جالب توجهی با مفاهیم مختلف ترکیبیات دارند [۱۹]. به‌ویژه مسئله‌های زیادی از مربع‌های لاتین به‌طور طبیعی به مسائلی از نظریه گراف مرتبط هستند [۴]. این پایان‌نامه بر روی اندازه مجموعه‌های بحرانی در مربع‌های لاتین تعمیم یافته (رنگ‌آمیزی گراف‌ها) تمرکز دارد. نتایج مربوط دیگری در مراجع [۲۳، ۲۲، ۲۰، ۱۶، ۱۵، ۲] می‌توان یافت. یک مربع لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) یک آرایه $n \times n$ از نمادهای $۰, ۱, \ldots, k-۱$ است، به‌طوری‌که هر یک از این نمادها حداکثر یک‌بار در هر سطر و هر ستون ظاهر شوند. در فصل ۱ تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز را بیان می‌نمائیم. فرض کنید $d(n,k)$ اندازه مینیمم مجموعه S از درایه‌های داده شده از یک آرایه $n \times n$ را نشان دهد، به‌طوری‌که یک توسیع منحصر بفرد از S به یک مربع لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) وجود داشته باشد. مجموعه همه مربع‌های لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) را با $L(n,k)$ نشان می‌دهند. برای $k > ۲n-۱$ روشن است که $d(n,k) = n^۲$.

علاوه بر این، برای $n \leqslant k < ۲n-۲$ مقدار $d(n,k)$ معلوم نیست. مهدیان و محمودیان در مورد $d(n, ۲n-۱)$ بحث کردند و برای nهای زوج رابطه $d(n, ۲n-۱) = n^۲ - n$ و برای nهای فرد بزرگ‌تر از ۱ رابطه $d(n, ۲n-۱) = n^۲ - n + ۱$ را ثابت کردند [۲۰].

در فصل ۲ برای nهای زوج رابطه $d(n, ۲n-۱) = n^۲ - n$ را با ارائه ساختار معینی نشان می‌دهیم و از این ساختار در روند تعیین $d(n, ۲n-۲)$ استفاده می‌کنیم. سپس ویژگی‌هایی را برای اثبات رابطه $d(n, ۲n-۲) \leqslant n^۲ - \lfloor \frac{۸n}{۵} \rfloor$ می‌آوریم و همچنین تساوی کران فوق را برای nهای مضرب ۱۰ بررسی می‌کنیم.

در فصل ۳ ابتدا ساختاری از یک مجموعه بحرانی با اندازه $\lfloor \frac{n^۲}{۴} \rfloor$ در مربع‌های لاتین چرخشی از مرتبه n ارائه می‌دهیم و بعد از آن برهان دیگری برای اثبات رابطه $d(n, ۲n-۱) = n^۲ - n + ۱$ برای nهای فرد می‌آوریم. همچنین یک ساختار جدید که برای nهای فرد رابطه $d(n, ۲n-۱) = n^۲ - n + ۱$ را نشان می‌دهد، بیان می‌کنیم و از این ساختار در روند تعیین یک مجموعه بحرانی در $L(n, ۲n-۲)$ استفاده می‌نمائیم.

در فصل ۴ تعمیمی از ضرب مربع‌های لاتین را به مربع‌های لاتین تعمیم یافته خواهیم داشت و با به‌کار بردن این ضرب روی ساختارهای به‌دست آمده مجموعه‌های بحرانی جدید در مربع‌های لاتین تعمیم یافته را به‌دست می‌آوریم.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضیه‌های مقدماتی

در ایـــن فصل ابتدا به ذکر تعاریف و توضیحات مقدماتی مورد نیاز در ایـــن پایان‌نامه مـــی‌پردازیم و سپس ضرب مربع‌های لاتین را تعریف می‌کنیم. برای هر عدد طبیعی n در سرتـــاسر ایـــن پایان‌نامه فرض مـــی‌کنیم $[n]=\{۰,۱,\ldots,n-۱\}$.

۱.۱ مربع‌های لاتین

تعریف ۱.۱.۱. یک **مربع لاتین**[1] L *از* ***مرتبه*** n *یک* **آرایه** $n\times n$ *از* ***نمادهای*** $[n]$ *است، به‌طوری‌که هر عنصر از* $[n]$ *در هر سطر و در هر ستون دقیقاً یک‌بار ظاهر می‌شود.*

مجموعه همه مربع‌های لاتین از مرتبه n را با $LS(n)$ نشان می‌دهند.

مثال. یک مربع لاتین از مرتبه ۵ در شکل زیر نشان داده شده است.

$L:$

۰	۱	۲	۳	۴
۴	۰	۱	۲	۳
۳	۴	۰	۱	۲
۲	۳	۴	۰	۱
۱	۲	۳	۴	۰

♠

در ارتباط با نظریه گراف گاهی اوقات هر یک از نمادهای $۰,۱,\ldots,n-۱$ را رنگ می‌گیریم در این‌صورت مربع لاتین از مرتبه n رنگ‌آمیزی سلول‌های یک آرایه $n\times n$ با n رنگ مذکور است به‌طوری‌که در هر سطر و در

[1]Latin Square

هر ستون هر رنگ دقیقاً یک‌بار ظاهر شود. از اصطلاح سلول برای اشاره به هر موقعیت در مربع لاتین استفاده می‌شود و از اصطلاح درایه برای اشاره به نماد (رنگ) هر سلول استفاده می‌کنیم.

ستون‌های یک مربع لاتین را از چپ به راست و سطرهای آن‌را از بالا به پائین با اعداد $۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ شماره گذاری می‌کنیم. این یک روش مناسب برای مراجعه به هر سلول از مربع لاتین را به‌دست می‌دهد. سلولی را که در تلاقی سطر iام و ستون jام واقع باشد با (i, j) نشان می‌دهیم. هم‌چنین می‌توان یک مربع لاتین را به‌صورت مجموعه‌ای از سه‌تائی‌های مرتب $(i, j; k)$ تعریف کرد که در آن k درایه سلول (i, j) می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱. **مربع لاتین چرخشی**[۲] *از مرتبه n به مربع لاتینی گفته می‌شود که سلول‌های آن با مجموعه نمادهای $\{j - i(\text{پیمانه } n) | ۰ \leqslant i, j \leqslant n - ۱\}$ رنگی شده باشند.*

مربع L فوق مثالی از مربع لاتین چرخشی از مرتبه ۵ می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. **مربع لاتین جزئی**[۳] *به مربع لاتینی گفته می‌شود که همه سلول‌های آن رنگی نباشند. به‌عبارت دیگر یک رنگ‌آمیزی از سلول‌های یک آرایه $n \times n$ با n رنگ است که در هر سطر و در هر ستون هر رنگ حداکثر یک‌بار ظاهر می‌شود. (**رنگ‌آمیزی جزئی** از یک مربع به رنگ‌آمیزی گفته می‌شود که همه سلول‌های مربع لاتین لزوماً رنگی نباشند و هر رنگ در هر سطر و هر ستون حداکثر یک‌بار ظاهر شود.)*

تعریف ۴.۱.۱. *سلول‌هایی را که رنگ‌آمیزی جزئی، رنگی به آن‌ها تخصیص نمی‌دهد،* **بی‌رنگ** *(خالی) می‌نامیم. این سلول‌ها را با قرار دادن $\star$ در آن‌ها مشخص می‌کنیم، حال اگر در سلول علامتی نباشد یعنی این‌که سلول رنگی می‌باشد اما در مورد رنگ آن تصمیمی نگرفته‌ایم.*

تعریف ۵.۱.۱. *تعداد سلول‌های رنگی (پر) مربع لاتین جزئی P را* **حجم** *P می‌گویند و با $|P|$ نشان داده و مجموعه $\{(i, j) | (i, j; k) \in P\}$ را* **شکل** *P می‌نامند.*

[۲] Circulant Latin Square
[۳] Partial Latin Square

تعریف ۶.۱.۱. یک مربع لاتین جزئی P از مرتبه n **توسیع** به مربع‌های لاتین از مرتبه n دارد، اگر بتوانیم با رنگ کردن سلول‌های بی‌رنگ P ، یک مربع لاتین را به‌دست آوریم.

تعریف ۷.۱.۱. هرگاه مربع لاتین جزئی P از مرتبه n ، زیر مجموعه دقیقاً یک مربع لاتین L در $LS(n)$ باشد، آن‌گاه P را به‌طور **یکتا تکمیل‌پذیر** یا UC[۴] به L می‌گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. مربع لاتین جزئی P از $LS(n)$ را یک **مجموعه بحرانی**[۵] گویند هرگاه

۱) به‌طور یکتا تکمیل‌پذیر باشد،

۲) در صورت حذف هر عضو از P شرط (۱) برقرار نباشد.

مثال. در شکل‌های زیر مربع لاتین جزئی P یک مجموعه بحرانی در $L_۱$ می‌باشد، اما $P \setminus (۱, ۱; ۲)$ به $L_۲$ نیز تکمیل‌پذیر است.

$$P: \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۰ & \star & \star \\ \hline \star & ۲ & \star \\ \hline \star & \star & \star \\ \hline\end{array}, \quad L_۱: \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۰ \\ \hline ۲ & ۰ & ۱ \\ \hline\end{array}, \quad L_۲: \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۰ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۰ \\ \hline\end{array}$$

♠

تعریف ۹.۱.۱. در فرآیند تکمیل کردن یک مجموعه یکتا تکمیل‌پذیر U به مربع لاتین L ، سه‌تایی مرتب $t = (i, j; k)$ را **تحمیلی** در مربع لاتین جزئی T $(U \subseteq T \subset L)$ می‌نامیم، هرگاه لااقل در یکی از شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $i \neq i'$ ، $j \neq z$ای وجود دارد که $(i', z, k) \in T$ ، یا $z \neq k$ای وجود دارد که $(i', j, z) \in T$.

(یعنی برای هر سطر $i \neq i'$ ، یا این سطر دارای درایه k است و یا در ستون j و در T پر است.)

۲) برای هر $j \neq j'$ ، $i \neq z$ای وجود دارد که $(z, j', k) \in T$ ، یا $z \neq k$ای وجود دارد که $(i, j', z) \in T$.

(یعنی برای هر ستون $j \neq j'$ ، یا این ستون دارای درایه k است و یا در سطر i و در T پر است.)

---
[۴] Uniquely Completable
[۵] Critical Set

۳) *برای هر* $k' \neq k$ *،* $z \neq i$ *ای وجود دارد که* $(z, j, k') \in T$ *، یا* $z \neq j$ *ای وجود دارد که* $(i, z, k') \in T$.

(یعنی برای هر درایه $k' \neq k$ *، این درایه یا در سطر* i *و یا در ستون* j *ظاهر شده است.)*

تعریف ۱۰.۱.۱. *فرض کنید* U *یک مجموعه یکتا تکمیل‌پذیر و قابل توسیع به مربع لاتین* L *باشد.* U *را* **یکتا تکمیل‌پذیر قوی**[۶] *می‌نامیم، هرگاه دنباله‌ای از مربع‌های لاتین جزئی مانند* $U = P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_f = L$ *وجود داشته باشد، به‌طوری‌که هر سه‌تایی* $t \in P_{v+1} \setminus P_v$ *در* P_v *، تحمیلی باشد. (برای هر* v *،* $1 \leqslant v < f$ *سه‌تایی* $(i_v, j_v; k_v)$ *در* L *وجود داشته باشد، به‌طوری‌که* $P_{v+1} = P_v \cup \{(i_v, j_v; k_v)\}$ *و به‌ازای هر* $k'_v \in [n] \setminus \{k_v\}$ *،* $P_v \cup \{(i_v, j_v; k'_v)\}$ *یک مربع لاتین جزئی در* L *نباشد.)*

اگر U یکتا تکمیل‌پذیر قوی باشد، آن‌گاه یا U یک مجموعه بحرانی قوی می‌باشد یا بعضی از زیر مجموعه‌های U مجموعه بحرانی قوی می‌باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱. *دو مربع لاتین* L *و* L' **ایزوتوپیک***اند، اگر یک سه‌تایی* (ϕ, ψ, χ) *از نگاشت‌های یک‌به‌یک موجود باشد که* ϕ *،* ψ *و* χ *سطرها، ستون‌ها و درایه‌ها را به‌ترتیب از* L' *به روی* L *بنگارد،*

$$L = \{(r\phi, c\psi; e\chi) | (r, c; e) \in L'\}$$

در این‌صورت (ϕ, ψ, χ) *را یک ایزوتوپی از* L' *به* L *می‌نامند. بنابراین دو مربع لاتین ایزوتوپیک‌اند اگر یکی از آن‌ها بتواند به دیگری توسط جابه‌جائی سطرها، ستون‌ها و تغییر نام درایه‌ها تبدیل شود.*

تعریف ۱۲.۱.۱. *دو مربع لاتین* **ایزومرفیک***اند، اگر نگاشت‌های یک‌به‌یک* ϕ *،* ψ *و* χ *تعریف ۱۱.۱.۱ با هم مساوی باشند.*

تعریف ۱۳.۱.۱. *دو مربع لاتین جزئی (مجموعه بحرانی)* P *و* P' **ایزوتوپیک***اند، اگر یک سه‌تایی مرتب* (ϕ, ψ, χ) *از نگاشت‌های یک‌به‌یک وجود داشته باشد که عناصر* $(a, b; c) \in P$ *را به روی عناصر* $(x, y; z) \in$ P' *بنگارد.*

[۶] Strong Uniquely Completable

تعریف ۱۴.۱.۱. *دو مربع لاتین جزئی* ***ایزومرفیک*** *اند، اگر نگاشت‌های یک‌به‌یک ϕ ، ψ و χ تعریف ۱۳.۱.۱ با هم مساوی باشند.*

لم ۱۵.۱.۱. [۸] *اگر A یک مجموعه بحرانی از مربع لاتین L باشد و (ϕ, ψ, χ) یک ایزوتوپی از A به A' باشد، آن‌گاه A' یک مجموعه بحرانی در مربع لاتین L' است و L' ایزوتوپیک با L است.*

نتیجه ۱۶.۱.۱. [۱۴] *مربع لاتین جزئی ایزوتوپیک با یک مربع لاتین جزئی دیگر که یکتا تکمیل‌پذیر باشد خود یکتا تکمیل‌پذیر است.*

۲.۱ مربع‌های لاتین تعمیم یافته

در این بخش مفهوم مربع لاتین را تعمیم می‌دهیم و مربع لاتین تعمیم یافته را تعریف می‌کنیم. از مرجع [۲۴] برای این منظور استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. یک **مربع لاتین تعمیم یافته**[۷] *از نوع (n,k) یک* ***آرایه*** *$n \times n$ از نمادهای $[k]$ است، به‌طوری‌که هریک از این نمادها در هر سطر و در هر ستون حداکثر یک‌بار ظاهر شوند.*
مجموعه همه مربع‌های لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) را با $L(n,k)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $k \geqslant n$ و اگر $k = n$ آن‌گاه مربع لاتین تعمیم یافته از نوع (n,n) همان مربع لاتین از مرتبه n است.

این طبیعی است فکر کنید یک مربع لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) یک مربع $n \times n$ می‌باشد که با kرنگ $[k]$ رنگی شده، به‌طوری‌که هیچ رنگی دو بار یا بیش‌تر در هر سطر و ستون تکرار نشود، این نگرش دیگری از مربع‌های لاتین تعمیم یافته است.

مثال. مربع لاتین تعمیم‌یافته از نوع (۵،۷) در شکل زیر نشان داده شده است.

[۷]Generalized Latin Square

۰	۱	۲	۳	۴
۶	۰	۱	۲	۳
۵	۶	۰	۱	۲
۴	۵	۶	۰	۱
۳	۴	۵	۶	۰

♠

تعریف ۲.۲.۱. **مربع لاتین تعمیم یافته چرخشی**[۸] *از نوع (n,k) به مربع لاتین تعمیم یافته‌ای گفته می‌شود که به سلول‌های (i,j) آن رنگ $j-i$ (پیمانه k) تخصیص یابد.*

مربع فوق مثالی از *مربع لاتین تعمیم یافته* چرخشی از نوع (۵,۷) می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱. **مربع لاتین تعمیم یافته جزئی**[۹] *به مربع لاتین تعمیم یافته‌ای گفته می‌شود که همه سلول‌های آن لزوماً رنگی نباشند. به‌عبارت دیگر یک رنگ‌آمیزی از سلول‌های یک آرایه $n \times n$ با k رنگ است که در هر سطر و در هر ستون هر رنگ حداکثر یک‌بار ظاهر می‌شود و به برخی سلول‌ها ممکن است رنگی اختصاص نیابد.* (**رنگ‌آمیزی تعمیم یافته جزئی** *از یک مربع به رنگ‌آمیزی گفته می‌شود که همه سلول‌های مربع لاتین تعمیم یافته لزوماً رنگی نباشند.*)

تعریف ۴.۲.۱. یک **رنگ قابل دسترس** *برای یک سلول بی‌رنگ (i,j)، $(0 \leqslant i,j \leqslant n-1)$ در یک رنگ‌آمیزی تعمیم یافته جزئی مربع A، یکی از رنگ‌هایی است که در سلول‌های $u(i,j)$ ظاهر نشده است. $u(i,j)$ اجتماعی از سلول‌های iامین سطر و jامین ستون می‌باشد، یعنی*

$$u(i,j) = \{(h,w) | (h=i, (0 \leqslant w \leqslant n-1)) \vee (w=j, (0 \leqslant h \leqslant n-1))\}$$

واضح است برای بحث در مورد رنگ‌های قابل دسترس در مربع‌های لاتین تعمیم یافته، نوع (n,k) باید مشخص باشد. مجموعه رنگ‌های قابل دسترس برای سلول بی‌رنگ (i,j) با $a(i,j)$ نشان داده می‌شود و هم‌چنین رنگ سلول (i,j) را با $c(i,j)$ نشان می‌دهیم.

[۸] Circulant Generalized Latin Square
[۹] Partial Generalized Latin Square

تعریف ۵.۲.۱. *یک مربع لاتین تعمیم یافته جزئی P از نوع (n,k) توسیع به مربع‌های لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) دارد، اگر بتوانیم با رنگ کردن سلول‌های بی‌رنگ P، یک مربع لاتین تعمیم یافته را به‌دست آوریم.*

تعریف ۶.۲.۱. *هرگاه مربع لاتین تعمیم یافته جزئی P از نوع (n,k)، زیر مجموعه دقیقاً یک مربع لاتین L در $L(n,k)$ باشد، آن‌گاه P را به‌طور یکتا تکمیل‌پذیر یا UC به L می‌گوییم.*

تعریف ۷.۲.۱. *مربع لاتین تعمیم یافته جزئی P از $L(n,k)$ را یک مجموعه بحرانی گویند هرگاه*

۱) *به‌طور یکتا تکمیل‌پذیر باشد،*

۲) *در صورت حذف هر عضو از P شرط (۱) برقرار نباشد.*

مثال. یک مربع لاتین تعمیم یافته جزئی، به‌طور یکتا تکمیل‌پذیر از نوع (۴،۵) در شکل زیر نشان داده شده است.

۲	۱	۰	$\star$
۳	۰	$\star$	۱
۱	۳	۴	۰
$\star$	۴	۱	۳

♠

تعریف ۸.۲.۱. *یک مجموعه بحرانی با مینیمم اندازه یک* **مجموعه بحرانی مینیمم** *نام دارد. اندازه مجموعه بحرانی مینیمم را* **عدد بحرانی** *می‌نامند و با $d(n,k)$ نشان می‌دهند.*

تعریف ۹.۲.۱. *فرض کنید M یک مربع لاتین تعمیم یافته از نوع (n,k) که $k > n$ باشد. در فرآیند تکمیل کردن یک مجموعه یکتا تکمیل‌پذیر U به M، سه‌تایی مرتب $t = (i,j;k)$ را تحمیلی در مربع لاتین تعمیم یافته جزئی T $(U \subseteq T \subset M)$ می‌نامیم، هرگاه در شرط زیر صدق کند:*

برای هر $k' \neq k$، $z \neq i$ای وجود دارد که $(z,j,k') \in T$، یا $z \neq j$ای وجود دارد که $(i,z,k') \in T$. (یعنی برای هر درایه $k' \neq k$، این درایه یا در سطر i و یا در ستون j ظاهر شده است.)

تعریف ۱۰.۲.۱. *فرض کنید U یک مجموعه یکتا تکمیل‌پذیر و قابل توسیع به مربع لاتین تعمیم یافته M از نوع (n,k) باشد. U را یکتا تکمیل‌پذیر قوی می‌نامیم، هرگاه دنباله‌ای از مربع‌های لاتین تعمیم یافته جزئی مانند $U = P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_f = M$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که هر سه‌تایی $t \in P_{v+1} \setminus P_v$ در P_v، تحمیلی باشد. (برای هر v، $1 \leqslant v < f$ سه‌تایی $(i_v, j_v; k_v)$ در M وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $P_{v+1} = P_v \cup \{(i_v, j_v; k_v)\}$ و به‌ازای هر $k'_v \in [k] \setminus \{k_v\}$، $P_v \cup \{(i_v, j_v; k'_v)\}$ یک مربع لاتین تعمیم یافته جزئی در M نباشد.)*

اگر U یکتا تکمیل‌پذیر قوی در مربع‌های لاتین تعمیم یافته باشد، آن‌گاه یا U یک مجموعه بحرانی قوی است و یا بعضی از زیر مجموعه‌های U مجموعه بحرانی قوی در مربع‌های لاتین تعمیم یافته می‌باشند.

تعریف ۱۱.۲.۱. *دو مربع لاتین تعمیم یافته L و L' از نوع (n,k) ایزوتوپیک‌اند، اگر یک سه‌تایی (ϕ, ψ, χ) از نگاشت‌های یک‌به‌یک موجود باشد به‌طوری‌که ϕ، ψ و χ سطرها، ستون‌ها و درایه‌ها را به‌ترتیب از L' به روی L بنگارد، یعنی*

$$L = \{(r\phi, c\psi; e\chi) | (r, c; e) \in L'\}$$

در این‌صورت (ϕ, ψ, χ) را یک ایزوتوپی از L' به L می‌نامند. بنابراین دو مربع لاتین تعمیم یافته ایزوتوپیک‌اند اگر یکی از آن‌ها بتواند به دیگری توسط جابه‌جائی سطرها، ستون‌ها و تغییر نام درایه‌ها تبدیل شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. *دو مربع لاتین تعمیم‌یافته ایزومرفیک‌اند، اگر نگاشت‌های یک‌به‌یک ϕ، ψ و χ تعریف ۱۱.۲.۱ با هم مساوی باشند.*

تعریف ۱۳.۲.۱. *دو مربع لاتین تعمیم یافته جزئی (مجموعه بحرانی) P و P' از نوع (n,k) ایزوتوپیک‌اند، اگر یک سه‌تایی مرتب (ϕ, ψ, χ) از نگاشت‌های یک‌به‌یک وجود داشته باشد که عناصر $(a, b; c) \in P'$ را به روی عناصر $(x, y; z) \in P$ بنگارد.*

تعریف ۱۴.۲.۱. *دو مربع لاتین تعمیم یافته جزئی ایزومرفیک‌اند، اگر نگاشت‌های یک‌به‌یک ϕ ، ψ و χ تعریف ۱۳.۲.۱ با هم مساوی باشند.*

لم ۱۵.۲.۱. *اگر A یک مجموعه بحرانی از مربع لاتین تعمیم یافته L باشد و (ϕ,ψ,χ) یک ایزوتوپی از A به A' باشد، آن‌گاه A' یک مجموعه بحرانی در مربع لاتین تعمیم یافته L' است و L' ایزوتوپیک با L است.*

برهان مشابه با لم ۱۵.۱.۱ برای این لم برقرار است.

نتیجه ۱۶.۲.۱. *مربع لاتین تعمیم یافته جزئی ایزوتوپیک با یک مربع لاتین تعمیم یافته جزئی دیگر که یکتا تکمیل‌پذیر باشد خود یکتا تکمیل‌پذیر است.*

گزاره ۱۷.۲.۱. *برای $k > ۲n - ۱$ داریم:* $d(n,k) = n^۲$

برهان . تعداد سلول‌های یک سطر و ستون برابر $۲n - ۱$ است. اگر یک سلول بی‌رنگ داشته باشیم چون $k > ۲n - ۱$ امکان رنگ‌آمیزی سلول مذکور با بیش از یک رنگ فراهم است. □

حال به شرح تعویض iامین سطر با jامین سطر در یک مربع لاتین تعمیم یافته جزئی از نوع (n,k) می‌پردازیم.

۱)اگر سلول‌های (i,r) , (j,r) هر دو رنگی باشند، آن‌گاه رنگ‌هایشان را عوض می‌کنیم.

۲)اگر (i,r) رنگی باشد و (j,r) بی‌رنگ ، آن‌گاه (j,r) را با رنگ (i,r) رنگی کرده و (i,r) را بی‌رنگ می‌کنیم.

۳)اگر (j,r) رنگی و (i,r) بی‌رنگ باشد، آن‌گاه (i,r) را با رنگ (j,r) رنگی کرده و (j,r) را بی‌رنگ می‌کنیم.

۴)نهایتاً اگر (i,r) و (j,r) هر دو بی‌رنگ باشند، آن‌گاه کاری انجام نمی‌دهیم.

برای تعویض iامین و jامین ستون در یک مربع لاتین تعمیم یافته جزئی از نوع (n,k) روشی مشابه تعویض iامین سطر با jامین سطر را تعریف می‌کنیم.

منظور از تغییر دادن مربع لاتین تعمیم یافته جزئی A یعنی این‌که بعضی از سطرها و ستون‌های A را به‌شکل فوق تعویض کنیم. اگر A را تغییر داده و به مربع لاتین تعمیم یافته جزئی B دست یابیم، B را یک تغییر آرایش A می‌گوییم.

گزاره ۱۸.۲.۱. *فرض کنید A یک مربع لاتین تعمیم یافته جزئی از نوع (n, k) و B یک تغییر آرایش A باشد. A به‌طور منحصر به‌فردی به عضوی از $L(n, k)$ توسیع می‌یابد، اگر و تنها اگر B به‌طور منحصر به‌فردی قابل توسیع به عضوی از $L(n, k)$ باشد.*

برهان. نشان می‌دهیم اگر A به‌طور منحصر به‌فردی به عضوی از $L(n, k)$ توسیع یابد، آن‌گاه B نیز به‌طور منحصر به‌فردی قابل توسیع به عضوی از $L(n, k)$ می‌باشد. از آن‌جاکه یک تغییر آرایش B از A با جابه‌جائی سطرها و ستون‌های A به‌دست می‌آید، پس طبق خاصیت تغییر آرایش رنگ قابل دسترس برای سلول‌های بی‌رنگ تغییر نخواهد کرد، چون اگر موقعیت یک سلول بی‌رنگ را با تغییر آرایش سطری عوض کنیم، آن‌گاه آن سلول بی‌رنگ در همان ستون سابق باقی مانده و تغییرآرایش سطری سلول‌های رنگی سطرش را عوض نکرده، پس سلول بی‌رنگ مورد نظر به همان رنگ‌های سابق دسترسی دارند. شرایط مشابه‌ای برای تغییرآرایش ستونی برقرار می‌باشند. پس اگر A به‌طور منحصر به‌فردی به عضوی از $L(n, k)$ توسیع یابد، آن‌گاه حتماً B نیز به‌طور منحصر به‌فردی قابل توسیع به عضوی از $L(n, k)$ خواهد بود. عکس گزاره به صورت مشابه اثبات می‌شود. $\square$

۳.۱ حاصل ضرب مستقیم مربع‌های لاتین

دو مربع لاتین جزئی یکتا تکمیل‌پذیر را در نظر بگیرید. مسئله این‌که چه وقتی حاصل ضرب این دو مربع لاتین جزئی خود یکتا تکمیل‌پذیر است، سال‌ها به‌عنوان یک مسئله باز مطرح بود. گاور[۱۰] در سال ۲۰۰۰ حدس زد اگر P و Q دو مربع لاتین جزئی به طور یکتا تکمیل‌پذیر به‌ترتیب به مربع‌های لاتین M و N باشند، آن‌گاه حاصل ضرب P و Q نیز یکتا تکمیل‌پذیر به حاصل ضرب M و N خواهد بود [۱۴]. در این بخش به حاصل ضرب مربع‌های لاتین پرداخته و از مراجع [۱۴، ۱۳، ۷، ۶، ۳، ۱] استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید M و N دو مربع لاتین به‌ترتیب از مرتبه‌های m و n باشند. ضرب مستقیم M و N*

[۱۰] R. A. H. Gower

یک آرایه $mn \times mn$ روی مجموعه‌ی زیر است:

$$T = \{(k_i, k_j) | i = ۰, ۱, \ldots, m - ۱, j = ۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

که در زیر به‌صورت سه‌تایی‌ها نمایش داده شده است:

$$L = \{((i, i'), (j, j'); (k, k')) | (i, j; k) \in M, (i', j'; k') \in N\}$$

و به وضوح یک مربع لاتین است.

برای ضرب دو مربع لاتین تعریف معادل دیگری را در زیر می‌آوریم.

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنید M و N دو مربع لاتین به‌ترتیب از مرتبه‌های m و n و با درایه‌های منتخب از $[m]$ و $[n]$ باشند. آرایه N^r را برای $r = ۰, ۱, \ldots, m - ۱$ با اضافه کردن rn به هر درایه N به‌دست می‌آوریم، به‌عبارت دیگر $N^r = rnJ + N$، که J ماتریسی با کل درایه‌های ۱ می‌باشد. ضرب مستقیم M و N را، مربع لاتین از مرتبه mn تعریف می‌کنیم که با جای‌گذاری هر درایه r از M با آرایه N^r به‌دست می‌آید به‌عبارت دیگر*

$$L = M \times N = \{(an + d, bn + e; cn + f) | (a, b; c) \in M, (d, e; f) \in N\}$$

ضرب مستقیم دو مربع لاتین M و N است.

مثال. دو مربع لاتین M و N زیر را در نظر بگیرید:

$$M : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \\ \hline ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ \hline ۳ & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}, \quad N : \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۰ \\ \hline ۲ & ۰ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

حال حاصل ضرب $M \times N$ به‌شکل زیر است.

$L = M \times N :$

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱	۲	۰	۴	۵	۳	۷	۸	۶	۱۰	۱۱	۹
۲	۰	۱	۵	۳	۴	۸	۶	۷	۱۱	۹	۱۰
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۰	۱	۲
۴	۵	۳	۷	۸	۶	۱۰	۱۱	۹	۱	۲	۰
۵	۳	۴	۸	۶	۷	۱۱	۹	۱۰	۲	۰	۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۸	۶	۱۰	۱۱	۹	۱	۲	۰	۴	۵	۳
۸	۶	۷	۱۱	۹	۱۰	۲	۰	۱	۵	۳	۴
۹	۱۰	۱۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱۰	۱۱	۹	۱	۲	۰	۴	۵	۳	۷	۸	۶
۱۱	۹	۱۰	۲	۰	۱	۵	۳	۴	۸	۶	۷

♠

فرض کنید $Q \subseteq N$ یک مربع لاتین جزئی از مرتبه n و با درایه‌های منتخب از $[n]$ باشد و فرض کنید $r \in [m]$ آن‌گاه Q^r آرایه‌ای است که با استفاده از اضافه کردن rn به هر درایه Q به‌دست می‌آید.

تعریف ۳.۳.۱. *فرض کنید $P \subseteq M$ و $Q \subseteq N$ دو مربع لاتین جزئی به‌ترتیب از مرتبه m و n باشند. (M و N مربع‌های لاتین از مرتبه m و n هستند.) ضرب مستقیم P و Q مربع لاتین جزئی $R = P \times Q$ از مرتبه mn می‌باشد که با جای‌گذاری N^r به‌جای هر درایه P و جای‌گذاری Q^r به‌جای هر درایه $M \setminus P$ به‌دست می‌آید. واضح است که $P \times Q \subseteq M \times N$.*

مثال. دو مربع لاتین جزئی P و Q زیر را در نظر بگیرید:

$P :$

۰	۱	$\star$	$\star$
۱	$\star$	$\star$	$\star$
$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
$\star$	$\star$	$\star$	۲

$,\quad Q :$

۰	$\star$	$\star$
$\star$	$\star$	$\star$
$\star$	$\star$	۱

حال حاصل ضرب $P \times Q$ را در زیر مشاهده می‌کنیم.

$R = P \times Q :$

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	⋆	⋆	۹	⋆	⋆
۱	۲	۰	۴	۵	۳	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
۲	۰	۱	۵	۳	۴	⋆	⋆	۷	⋆	⋆	۱۰
۳	۴	۵	۶	⋆	⋆	۹	⋆	⋆	۰	⋆	⋆
۴	۵	۳	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
۵	۳	۴	⋆	⋆	۷	⋆	⋆	۱۰	⋆	⋆	۱
۶	⋆	⋆	۹	⋆	⋆	۰	⋆	⋆	۳	⋆	⋆
⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆
⋆	⋆	۷	⋆	⋆	۱۰	⋆	⋆	۱	⋆	⋆	۴
۹	⋆	⋆	۰	⋆	⋆	۳	⋆	⋆	۶	۷	۸
⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	⋆	۷	۸	۶
⋆	⋆	۱۰	⋆	⋆	۱	⋆	⋆	۴	۸	۶	۷

♠

ضرب مستقیم دو مربع لاتین جزئی P و Q مجموعه زیر را تشکیل می‌دهد:

$$P \times Q = \{(an+d, bn+e; cn+f) | (a,b;c) \in P, (d,e;f) \in N\}$$

$$\cup \{(an+d, bn+e; cn+f) | (a,b;c) \in M \setminus P, (d,e;f) \in Q\}$$

نتیجه ۴.۳.۱. *فرض کنید $(a,b;c)$ عناصر مربع لاتین M و $(\alpha,\beta;\gamma)$ عناصر مربع لاتین N باشند. از تعریف ضرب مستقیم مربع‌های لاتین می‌دانیم که مربع لاتین $L = M \times N$ شامل همه عناصر $(an+\alpha, bn+\beta; cn+\gamma)$ است. ($a,b,c \in \{۰,۱,\ldots,m-۱\}$ و $\alpha,\beta,\gamma \in \{۰,۱,\ldots,n-۱\}$) اگر P یک مربع لاتین جزئی یکتا تکمیل‌پذیر به M و Q نیز یک مربع لاتین جزئی یکتا تکمیل‌پذیر به N باشد آن‌گاه گزاره‌های زیر از ضرب $R = P \times Q$ نتیجه می‌شوند:*

۱) *اگر $(a,b;c) \in P$ آن‌گاه $(an+\alpha, bn+\beta; cn+\gamma) \in R$،*

۲) *اگر $(a,b;c) \notin P$ اما $(\alpha,\beta;\gamma) \in Q$ باشد آن‌گاه $(an+\alpha, bn+\beta; cn+\gamma) \in R$،*

۳) *اگر $(a,b;c) \notin P$ و $(\alpha,\beta;\gamma) \notin Q$ آن‌گاه $(an+\alpha, bn+\beta; cn+\gamma) \notin R$.*

روشن است که ضرب مستقیم دو مربع لاتین (دو مربع لاتین جزئی) خاصیت جابه‌جائی ندارد. اما یک نتیجه ضعیف‌تر از جابه‌جائی را در ادامه خواهیم داشت.

لم ۵.۳.۱. *ضرب مستقیم $L = M \times N$ از دو مربع لاتین M و N با ضرب مستقیم $L' = N \times M$ ایزومورفیک است.*

برهان. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم، M یک مربع لاتین با درایه‌های منتخب از $[m]$ و N نیز مربع لاتینی با درایه‌های منتخب از $[n]$ باشند. برای هر $x \in Y = \{۰, ۱, \ldots, mn - ۱\}$، وجود دارد $x_۱$ و $y_۱$ای که:

$$۰ \leqslant x_۱ \leqslant m - ۱, ۰ \leqslant y_۱ \leqslant n - ۱; \quad x = x_۱ n + y_۱$$

نگاشت $f : Y \longrightarrow Y$ را به‌صورت $f(x) = f(x_۱ n + y_۱) = y_۱ m + x_۱$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت به‌وضوح نگاشتی یک‌به‌یک و پوشاست. اگر f برای سطرها ، ستون‌ها و درایه‌های L به‌کار برده شود، مربع لاتین L' به دست می‌آید که با مربع لاتین $M \times N$ ایزومورفیک است و داریم:

$$L' = \{(dm + a, em + b; fm + c) | (d + an, e + bn; f + cn) \in L, (a, b; c) \in M, (d, e; f) \in N\}$$

□

لم ۶.۳.۱. *فرض کنید P و Q دو مربع لاتین جزئی باشند که به‌ترتیب یکتا تکمیل‌پذیر به مربع‌های لاتین M و N می‌باشند. ضرب مستقیم $P \times Q$ و $Q \times P$ با هم ایزومرفیک‌اند.*

برهان. مشابه با برهان قبلی سلول‌های پر $P \times Q$ به سلول‌های پر $Q \times P$ نگاشته می‌شوند. پس کافی است ثابت کنیم که سلول‌های خالی $P \times Q$ به سلول‌های خالی $Q \times P$ نگاشته می‌شوند. طبق نتیجه ۴.۳.۱ سلول‌های خالی $P \times Q$ به‌شکل $(an + d, bn + e)$ هستند که $(a, b; c) \in M \backslash P$ و $(d, e; f) \in N \backslash Q$. در این حالت عنصر $(dm + a, em + b; fm + c)$ در $L' = N \times M$ می‌باشد که عنصری از $Q \times P$ نیست پس خانه $(dm + a, em + b)$ خالی است. □

قضیه ۱.۳.۷. *فرض کنید P مربع لاتین جزئی باشد که به‌طور قوی یکتا تکمیل‌پذیر به مربع لاتین M از مرتبه m و Q مربع لاتین جزئی باشد که به‌طور یکتا تکمیل‌پذیر به مربع لاتین N از مرتبه n است. آن‌گاه مربع لاتین جزئی $R = P \times Q$ به‌طور یکتا تکمیل‌پذیر به $L = M \times N$ است.*

برهان. چون P به‌طور قوی یکتا تکمیل پذیر است، دنباله‌ای از مربع‌های لاتین جزئی $P_1, P_2, \ldots, P_f$ وجود دارد به‌طوری که این دنباله شرایط قوی بودن را ارضا می‌کند. یعنی $P_{v+1} = P_v \cup \{(i_v, j_v; k_v)\}$ و برای هر k'_v از مجموعه $[m] \setminus \{k_v\}$، k'_v یا در سطر i_v و یا در ستون j_v مربع لاتین جزئی P_v وجود دارد. می‌دانیم که $P_1 = P$، حال قرار می‌دهیم $R_1 = P_1 \times Q = P \times Q = R$.

$P_2 = P_1 \cup \{(i_1, j_1; k_1)\}$ به این معنی است که در مکان‌هایی از $R_1 = R$، سطرهای نام‌گذاری شده با $i_1 n$ تا $(i_1 + 1)n - 1$ و ستون‌های نام‌گذاری شده با $j_1 n$ تا $(j_1 + 1)n - 1$، یک کپی از Q^{k_1} خواهیم داشت و برای هر $k' \in [m] \setminus \{k_1\}$ یک کپی از $N^{k'}$ در مکان‌هایی از $R_1 = R$ که در سطرهای نام‌گذاری شده با $i_1 n$ تا $(i_1 + 1)n - 1$ و ستون‌های نام‌گذاری شده با $j_1 n$ تا $(j_1 + 1)n - 1$، وجود دارد. اکنون هر عنصر مجموعه $\{0 + k'n, 1 + k'n, \ldots, (n-1) + k'n\}$ دقیقاً یک‌بار در هر یک از این سطرها یا دقیقاً یک‌بار در هر یک از این ستون‌ها ظاهر می‌شوند. بنابراین تنها درایه‌هایی از مجموعه $[mn]$ که لزوماً در سطرهای $i_1 n$ تا $(i_1 + 1)n - 1$ و یا ستون‌های $j_1 n$ تا $(j_1 + 1)n - 1$ ظاهر نمی‌شوند، درایه‌های $0 + k_1 n, 1 + k_1 n, \ldots, (n-1) + k_1 n$ هستند. اما این سلول‌ها لزوماً شامل یک کپی از Q^{k_1} هستند که به‌طور یکتا به N^{k_1} تکمیل‌پذیر است. پس این زیر آرایه $n \times n$ از $R_1 = R$ مجبور است که به N^{k_1} تکمیل شود. این تکمیل، مربع لاتین جزئی جدید $R_2 = P_2 \times Q$ را به‌دست می‌دهد.

بنابراین دنباله‌ای از مربع‌های لاتین جزئی $R_1, R_2, \ldots, R_f$ با $R_f = P_f \times Q = M \times Q = M \times N$ به‌دست می‌آید، که در آن $P \times Q$ یکتا تکمیل‌پذیر به $M \times N$ است. $\square$

نتیجه ۱.۳.۸. *با استفاده از لم ۱.۳.۶، در قضیه ۱.۳.۷ اگر Q به‌جای P به‌طور قوی یکتا تکمیل‌پذیر باشد، آن‌گاه $P \times Q$ به‌طور یکتا تکمیل‌پذیر به $M \times N$ است.*