دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش ریاضی محض

عنوان

فضای مدولای بعضی از رویه های اقلیدسی تکین

استاد راهنما

دکتر ویدا میلانی

استاد مشاور

دکتر پوربرات

نگارش

اصغر حاجتی

شهریور ۸۷

تاریخ ....

شماره ....

پیوست..........................

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»+

هران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
لفن: ۲۹۹۰۱

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

باز گشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۲۴۹۶/۲۰۰/د مورخ ۸۷/۶/۵ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: **آقای اصغر حاجتی دورباش** شماره شناسنامه: **۶۲۵۲** صادره از: **تهران** متولد: **۱۳۶۰** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: ریاضی محض

با عنوان:

فضای مدولای بعضی از رویه های اقلیدسی تکین

به راهنمایی:

خانم دکتر ویدا میلانی

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۷/۶/۶ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۹٫۵ نوزده و نیم درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما: خانم دکتر ویدا میلانی	استادیار	شهید بهشتی	ویدا میلانی
۲- مشاور: آقای دکتر مهدی پوربرات	استادیار	شهید بهشتی	
۳- داور: خانم دکتر فرشته ملک	استادیار	خواجه نصیرالدین طوسی	
۴- داور: آقای دکتر جعفر شفاف	استادیار	شهید بهشتی	
۵- مدیر گروه: آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	

تقدیم به پدر و مادرم

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه سطوح اقلیدسی می پردازیم و شرایط لازم و کافی را طوری می یابیم که ایـن سطوح تحت این شرایط با یک سطح اقلیدسی با نقاط تکین مخروطی که تکینگی هایی در نقاط از پیش تعیین شده دارد به طور همدیس هم ارز باشند.مرجع اصلی این پایان نامه مقاله [۱۹] می باشد.

تشکر

از پدر و مادر عزیزم که همواره در تمام شرایط،در زندگی ام حامی من بوده و هستند متشکرم.

همچنین شایسته است از استاد گرامی ام ، خانم دکتر ویدا میلانی که راهنمایی اینجانب را متقبل شدند و همینطور جناب آقای دکتر پوربرات که به عنوان استاد مشاور بنده قبول زحمت فرمودند کمال تشکر را داشته باشم.

در پایان امیدوارم که این پایان نامه توانسته باشد سهمی هر چند نا چیز را در خدمتگذاری به علم ریاضیات در کشورمان داشته باشد و موفقیت تمام افرادی را که در این علم بنیادی فعالیت می کنند،آرزومندم.

فهرست مطالب

مقدمه		۱
۱	رویه های قطعه ای مسطح	۳
۱ -۱	مثلث بندی اقلیدسی	۳
۱-۲	پوشش جهانی شاخه ای یک رویه قطعه ای مسطح	۱۰
۱-۳	توسیع رویه های قطعه ای مسطح	۱۱
۱-۴	هولونمی رویه های قطعه ای مسطح	۱۸
۱-۵	توسیع در نزدیکی یک نقطه تکین	۲۲
۱-۶	هم ارزی هندسی مثلث بندی های اقلیدسی	۲۳
۱-۷	متریکهای مسطح با تکینگی های مخروطی	۲۵
۲	رابطه با رویه های ریمان	۳۱
۲-۱	رویه های ریمان	۳۱
۲-۲	توابع همساز با تکینگی های لگاریتمی	۳۸
۲-۳	دیفرانسیلهای درجه دوم	۴۷
۳	دسته بندی رویه های قطعه ای مسطح با تکینگی مخروطی	۵۲
واژه نامه		۵۶
واژه نامه انگلیسی به فارسی		۵۷
واژه نامه فارسی به انگلیسی		۶۶
نمایه ها		۷۴
مراجع		۷۸
چکیده انگلیسی		۸۱

مقدمه

موضوع اصلی مورد مطالعه در این پایان نامه رویه های اقلیدسی با نقـاط تکـین مخروطی مـی باشـد و از اصلی ترین ابزارها برای مطالعه آنها تابع های همساز با تکین های لگاریتمی و دیفرانسیل های درجه دوم می باشد.

یک رویه اقلیدسی رویه ایست که به طور موضعی ساختار صفحه اقلیدسی را می گیرد.یا به طور هم ارز متریک ریمانی مسطح دارد(یا به عبارت دیگر متریک آن انحنای صفر دارد).

حالـت عمـومی تـر از رویـه هـای اقلیدسـی، رویـه هـای اقلیدسـی بـا نقـاط تکـین مخروطـی(بـه طـور مختصر $e.s.c.s$) هستند که رویه های قطعه ای مسطح را نیز شـامل مـی شـود و رویـه هـایی هـستند کـه موضعاً هندسه یک مخروط استاندارد را به خود می گیرند. می توان آنهـا را بـا اسـتفاده از یـک متریـک ریمانی مسطح که تکینگی هایی در نقاطی از یک منیفلد دو بعدی دیفرانسیل پذیر دارد تعریف کرد.

هر مخروط استاندارد ثابت یکتایی را به همراه دارد که این ثابـت را مقـدار بـازی(کـه یـک عـدد مثبت حقیقی است) می نامیم.بنابراین $e.s.c.s$ یک ثابت به ازای هر یک از این نقاط تکین می گیرد.

به علاوه هر رویه اقلیدسی(یا ریمـان) بـا نقـاط تکـین مخروطـی یـک سـاختار همـدیس یکتـا را بـه ارث می برد.

در فصل اول این پایان نامه ابتدا به بررسی توپولوژی رویه های قطعه ای مسطح می پردازیم.سـپس یک متریک ریمانی را روی آنها به گونه ای تعریف می کنیم تا تبدیل بـه یـک رویـه اقلیدسـی بـا نقـاط تکین مخروطی شوند و به بررسی هندسه آنها می پردازیم.در فصل دوم رابطه این رویه ها بـا رویـه هـای ریمان پرداخته و در نهایت در فصل سوم با استفاده از این خواص هندسی و توپولوژیک یک دسته بندی از $e.s.c.s$ (که هدف اصلی ما در این پایان نامه نیز می باشد) را بـا جـواب دادن بـه ایـن پرسـش انجـام می دهیم:

فـرض کنـیم یـک رویـه ریمـان بـسته و جهـت پـذیر S را در اختیـار داشـته باشـیم ، $x_1,\dots,x_n \in S$ و $0 \le \theta_1,\dots,\theta_n \le 2\pi$.تحت چه شرایطی S تبدیل به یک $e.s.c.s$ می شـود بـه طوریکـه در نزدیکـی x_i ساختار مخروط با ثابت بازی θ_i را دارد و در نقاط دیگر این ثابت بازی صفر می باشد. برای اثبـات

آن از وجود دیفرانسیل های درجه دوم روی روی یک سطح بسته از گونای بزرگتر از یک و همچنین وجود تابعهای همساز که تکینه های لگاریتمی در نقاط خاص از این سطوح دارند استفاده می کنیم [۱۸]. دیفرانسیل های درجه دوم به طور کامل در مرجع [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته اند. مرجع اصلی این پایان نامه مقاله سال ۲۰۰۷ از ترویانف [۱۹] می باشد.

اصغر حاجتی دورباش

۱. رویه های قطعه ای مسطح

۱-۱ مثلث بندی اقلیدسی

یک منیفلد توپولوژیک از بعد n فضای هاسدورف همبند M می باشد که یک پایه شمارا داشته باشد و هرنقطه $p \in M$ یک همسایگی باز U داشته باشد که نسبت به توپولوژی القایی با یک مجموعه باز V از $H^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_n \geq 0\}$ همئومورف باشد.یک چنین همئومورفیسم $f: U \to V$ یک کارت نامیده می شود.یک اطلس عبارت است از خانواده از کارتهای $\{f_\alpha, U_\alpha\}$ بطوریکه U_α یک پوشش باز از M است.

منیفلد توپولوژیک با بعد دو رویه نامیده می شود.به رویه فشرده بدون مرز رویه بسته و در غیر اینصورت رویه بازگفته می شود.

اگرمنیفلد M شامل یک اطلس ماکسیمال $\{f_\alpha, U_\alpha\}$ از کارتها باشد بطوریکه نگاشت

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to f_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

دیفرانسیل پذیر از کلاس c^∞ باشد می گوییم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیراز بعد n است.

تعریف ۱-۱-۱ . فرض کنیم Σ یک رویه باشد.یک مثلث بندی اقلیدسی از Σ یک مجموعه ازدوتاییهای

$$\Psi : \{(\mathrm{T}_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

می باشدکه هر T_α یک زیرمجموعه فشرده از Σ می باشد و $f_\alpha : \mathrm{T}_\alpha \to R^2$ یک همئومورفیسم به روی یک مثلث ناتباهیده $f_\alpha(T_\alpha)$ (مثلث با مساحت بزرگتر از صفر) در صفحه اقلیدسی R^2 است.یک زیرمجموعه e از T_α را یال می نامیم اگر $f_\alpha(e)$ یک یال از $f_\alpha(T_\alpha)$ در صفحه اقلیدسی R^2 باشد و می گوییم نقطه p از Σ یک رأس از مثلث بندی است اگر تصویر آن $f_\alpha(p)$ یک رأس از $f_\alpha(T_\alpha)$ باشد.

همچنین مثلث بندی اقلیدسی باید در شرایط زیر صدق کند:

۱. هر نقطه از Σ در یکی از مثلثهای T_α قرار داشته باشد،یعنی: $\cup_\alpha T_\alpha = \Sigma$.

۲. این مثلثها موضعاً متناهی باشند،و این به این معنی می باشد که هر نقطه همسایگی داشته باشد که فقط با تعداد متناهی از مثلثهای T_α اشتراک داشته باشد.

۳. اگر $\alpha \neq \beta$ آنگاه $T_\alpha \cap T_\beta$ یا تهی باشد یا ضلع یا یک رأس.

۴. اگر $T_\alpha \cap T_\beta \neq \varnothing$ آنگاه یک ایزومتری $g_{\alpha\beta} \in E(2)$ ($E(2)$ گروه ایزومتریهای صفحه اقلیدسی) وجود داشته باشد به طوریکه در مجموعه $T_\alpha \cap T_\beta$ داشته باشیم:

$$f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta .$$

به هر عنصر $(T_\alpha, f_\alpha) \in \Psi$ یک مثلث یا یک ۲-سادک از مثلث بندی گفته می شود و این دوتایی را اغلب با T_α نمایش می دهیم.همچنین به رأسها و ضلعها به ترتیب ۰- سادک و ۱- سادک گفته می شود.

دو مثلث بندی اقلیدسی

$$\Psi^1 := \{(T_\alpha^1, f_\alpha^1), \Psi^2 := \{(T_\alpha^2, f_\alpha^2)\}$$

از رویه Σ مساوی گفته می شوند اگر تمام سادکهای آنها برابر باشند و به ازای هر $\alpha \in A$ یک ایزومتری $g_\alpha \in E(2)$ وجود داشته باشد بطوریکه در T_α رابطه $f_\alpha^2 = g_\alpha f_\alpha^1$ برقرار باشد.

تعریف ۱-۱-۲ . به رویه Σ که دارای یک مثلث بندی اقلیدسی Ψ باشد رویه قطعه ای مسطح گفته می شود و آن را با نماد (Σ, Ψ) نمایش می دهیم.

رویه قطعه ای مسطح (Σ, Ψ) با تعدادی ساختار اضافی همراه است که به طور مختصر به آنها اشاره می کنیم:

روی این رویه ها اندازه مساحت به طور خوشتعریف بیان می شود.به این ترتیب که زیرمجموعه $E \subset \Sigma$ را اندازه پذیرمی گوییم اگر مجموعه $f_\alpha(T_\alpha \cap E)$ به ازای هر α متعلق به σ-جبر زیر باشد :

$$X = \{A \mid \text{است } R^2 \text{ یک زیرمجموعه لبگ اندازه پذیر از } A\}.$$

مجموعه تمام چنین زیرمجموعه های E از Σ که در شرط بالا صدق می کنند تشکیل یک σ-جبر می دهد:

برای اثبات آن، چون T_α به ازای هر α یک زیرمجموعه فشرده از Σ است، $f_\alpha(T_\alpha)$ یک زیرمجموعه بسته و در نتیجه زیرمجموعه بورل از $\mathbb{R}^2$ خواهد بود. پس $f_\alpha(T_\alpha)$ به ازای هر α لبگ اندازه پذیر است

و T_α یک زیر مجموعه اندازه پذیر از Σ خواهد بود.در نتیجه مجموعه Σ یک مجموعه اندازه پذیر است.

فرض کنیم مجموعه های $E_1,E_2,\ldots$ که $E_i \subset \Sigma$ در این شرط صدق کنند که به ازای هر α داشته باشیم $f_\alpha(E_i \cap T_\alpha) \in X$.چون $f_\alpha(T_\alpha \cap (\cup E_i)) = \cup f_\alpha(T_\alpha \cap E_i)$ و از اینکه X، σ- جبر است خواهیم داشت: $\cup_\alpha f_\alpha(E_i \cap T_\alpha) \in X$. پس $f_\alpha((\cup E_i) \cap T_\alpha) \in X$ و در نتیجه $\cup E_i$ یک زیرمجموعه اندازه پذیر از Σ است.

همچنین اگر به ازای هر α، $f_\alpha(E \cap T_\alpha) \in X$ آنگاه $f_\alpha(E \cap T_\alpha)^c \in X$. از طرفی داریم:

$$f_\alpha(E^c \cap T_\alpha) = f_\alpha(E \cap T_\alpha)^c \cap f_\alpha(T_\alpha)$$

از σ-جبر بودن X خواهیم داشت $f_\alpha(E^c \cap T_\alpha) \in X$.در نتیجه E^c یک زیرمجموعه اندازه پذیر از Σ است.

پس مجموعه های $E \subset \Sigma$ که $f_\alpha(E \cap T_\alpha) \in X$ تشکیل یک σ-جبر می دهد. اندازه مجموعه اندازه پذیر $E \subset \Sigma$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu_\Sigma(E) = \sum_\alpha \mu(f_\alpha(T_\alpha \cap E))$$

که μ اندازه لبگ در R^2 است.

تعریف ۱-۱-۳. یک ساختار طول روی یک مجموعه X عبارت است از یک خانواده C از نگاشتهای $f: I \to X$ به ازای هربازه $I \subset \mathbb{R}$ که آنها را با نماد $C(I)$ نشان می دهیم و یک نگاشت $\ell: C = \cup C(I) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱. مثبت بودن: برای هر $f \in C$، $\ell(f) \geq 0$ و $\ell(f) = 0$ اگر و فقط اگر f ثابت باشد.
۲. تحدید و کنار هم گذاری: اگر $I \subset J$ آنگاه تحدید هر عضو $C(J)$ به I در $C(I)$ قرار بگیرد(تحدید).

و منظور از کنار هم گذاری اینست که اگر داشته باشیم:

$$g \in C([b,c]), f \in C([a,b])$$

و تابع $h: [a,c] \to X$ به گونه ای باشد که تحدید آن به $[a,b]$ برابر با f و تحدید آن به $[b,c]$ برابر g باشد آنگاه $h \in C([a,c])$ و داشته باشیم:

$$\ell(h) = \ell(f) + \ell(g) .$$

به h کنار هم گذاری یا ضرب f و g گفته می شود، $h = f.g$.

۳. پایدار تحت تغییر پارامتر: اگر φ از Iبه روی J یک همئومورفیسم باشد و $f \in C(J)$ آنگاه:

$$\ell(f \circ \varphi) = \ell(f) \text{ و } f \circ \varphi \in C(I) .$$

۴. پیوستگی: برای هر $I = [a,b]$ نگاشت $t \to \ell(f|_{[a,t]})$ که $t \in I$،یک تابع پیوسته باشد.

حال اگر $C : [0,1] \to \Sigma$ منحنی پیوسته دلخواهی روی Σ باشد طول آن $\ell(C)$ را مساوی با طول اقلیدسی آن در صفحه اقلیدسی R^2یعنی:

$$\sum_{\alpha} \Lambda_{f_\alpha} f_\alpha (T_\alpha \cap C[0,1])$$

تعریف می کنیم که منظور از طول اقلیدسی Λ_c یک منحنی $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ عبارت است از:

$$\Lambda_c([a,b]) = \sup\{\Lambda_c(P) \mid P \in \mathrm{P}[a,b]\}$$

$$\Lambda_c(P) = \sum_{k=1}^{m} \| c(t_k) - c(t_{k-1}) \|$$

که سوپریمم روی تمام افرازهای $\mathrm{P}[a,b] = \{t_0, \ldots, t_m\}$ بازه $[a,b]$ گرفته شده است.

پس (Σ, Ψ) با این تعریف یک ساختار طول خواهد داشت که در اینجا $C(I)$ تمام توابع پیوسته از بازه های بسته $I = [a,b]$ به Σ است.

حال به ازای دو نقطه $x, y \in \Sigma$ تابع $d_\ell(x,y)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d_\ell(x,y) = \inf\{\ell(f); f : [a,b] \to \Sigma, f \in C, f(a) = x, f(b) = y\}.$$

تابع $d_\ell(x,y)$، تابع فاصله نامیده می شود.اگر Σهمبند باشد، d_ℓ یک متریک روی آن تعریف می کند.برای اثبات آن به این طریق عمل می کنیم: چون Σ همبند و موضعاً همبند مسیری است $d_\ell(x,y)$ به ازای هر دو نقطه x, y تعریف می شود.چون تابع ثابت در C قرار دارد به ازای هر $x \in \Sigma$، $d_\ell(x,x) = 0$.از تعریف d_ℓ همچنین داریم $d_\ell(x,y) = d_\ell(y,x)$ که $x, y \in \Sigma$.

اگر $p \neq q$، آنگاه $d_\ell(p,q) \neq 0$. این به دلیل اینکه مثلثها اقلیدسی هستند و طول هر منحنی پیوسته در این مثلثها مثبت است برقرار است.

حال برای اثبات نامساوی مثلث فرض می کنیم که $\varepsilon > 0$ و $\alpha, \beta \in C$ دو منحنی در Σ باشند که به ترتیب از چپ به راست نقطه p را به نقطه q و نقطه q را به نقطه r وصل می کنند،به طوریکه:

$$\ell(\alpha) < d(p,q) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{و} \qquad \ell(\beta) < d(q,r) + \frac{\varepsilon}{2}$$

حال با عمل پشت سر هم قرار دادن دو مسیر،اجتماع آنها تبدیل به یک منحنی پیوسته γ در Σ می شود که نقطه p را به نقطه r وصل می کند.آنگاه داریم:

$$d(p,r) \le \ell(\gamma) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) < d(p,q) + d(q,r) + \varepsilon$$

چون ε دلخواه بود پس نامساوی مثلث نیز به دست می آید.

تعریف ۱-۱-٤ . فرض کنیم یک ساختار طول روی رویه Σ داشته باشیم.یک متریک روی Σ که به روش بالا با استفاده از تابع فاصله مربوط به این ساختار بدست آمده باشد متریک طول یا متریک ذاتی نامیده می شود.

به عنوان مثالهایی از اینگونه متریکها می توان به متریک به دست آمده روی یک منیفلد ریمانی با استفاده از متریک ریمانی روی آن اشاره کرد.که C تمام منحنیهای دیفرانسیل پذیر قطعه ای روی آن می باشد.

تعریف ۱-۱-۵ . اگر متریک فضای متریک X ذاتی باشد آنگاه X یک فضای طول یا فضای متریک مسیری نامیده می شود.

از اینرو رویه قطعه ای مسطح با استفاده از ساختار طول و متریک بدست آمده دربالا یک فضای طول است.

ساختار دیگر که می توان روی یک رویه قطعه ای مسطح تعریف کرد مرتبه تکینگی می باشد که مجموع زوایای مثلثهای مجاور با یک رأس را اندازه گیری می کند:

تعریف ۱-۱-٦ . رأس $p \in \Sigma$ را در نظرمی گیریم.فرض کنیم $T_1,\ldots,T_k$ تمام مثلثهایی از مثلثبندی Ψ باشند که با رأس p مجاور هستند.می گوییم رأس p یک رأس مخروطی با اندازه زاویه کلی θ است اگر:

$$\theta = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j$$

که φ_j اندازه زاویه مجاوربا رأس $f(p)$ در مثلث $f_i(T_i)$ به ازای $1 \le i \le k$ می باشد.همچنین مرتبه تکینگی $\beta(p)$از رأس p به صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta(p)=\frac{\theta}{2\pi}-1\ .$$

تابع β را می توان با تعریف $\beta(x)=0$ به ازای هر $x\in\Sigma$ که یک رأس از مثلثبندی نباشد به تمام رویه Σ گسترش داد.

می گوییم نقطه x یک نقطه تکین است اگر $\beta(x)\neq 0$ یا به عبارت دیگر $\theta\neq 2\pi$.در غیر اینصورت به آن یک نقطه منظم می گوییم.

لم ۱-۱-۷ (فرمول گاوس- بونه) . فرض کنیم Ψ یک مثلثبندی اقلیدسی دلخواه از رویه فشرده بدون مرز Σ باشد. آنگاه خواهیم داشت:

$$\chi(\Sigma)+\sum_{x\in\Sigma}\beta(x)=0.$$

که $\chi(\Sigma)$ شاخص اویلر رویه Σ می باشد.

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم هرمثلثبندی اقلیدسی از یک رویه فشرده تعداد متناهی مثلث دارد: فرض کنیم یک مثلثبندی از Σ تعداد نا متناهی مثلث داشته باشد.حال یک نقطه از هر مثلث انتخاب می کنیم که روی ضلعها قرار نداشته باشد.چون Σ فشرده است این مجموعه از نقاط یک نقطه حدی p_0 در Σدارد.پس هر همسایگی از p_0 با تعداد نامتناهی از مثلثهای این مثلثبندی اشتراک خواهد داشت. اما چون طبق تعریف مثلثبندی موضعاً متناهی است یک همسایگی از p_0 وجود دارد که فقط تعداد متناهی از مثلثها را قطع می کند و به این ترتیب به تناقض می رسیم.از اینرو $\sum_{x\in\Sigma}\beta(x)$ خوشتعریف است.

V را تعداد رأسها، E را تعداد یال و F را تعداد وجه های مثلثبندی در نظر می گیریم.

حال فرمول گاوس- بونه معادل با فرمول زیر است:

$$2\pi\chi(\Sigma)=2\pi\Big(\sum_{v}\Big(1-\frac{\theta_v}{2\pi}\Big)\Big)=\sum_{v}(2\pi-\theta_v)$$

پس به اثبات تساوی أخیر می پردازیم.اما داریم:

$$\sum_{v}(2\pi-\theta_v)=2\pi V-\sum_{v}\theta_v$$

$$=2\pi V-\sum_{f}\text{(مجموع زاویه های درونی تمام مثلثهای موجود)}$$

$$=2\pi V-\sum_{f}\pi=2\pi V-\sum_{f}(3-2)\pi=2\pi V-\sum_{f}3\pi+\sum_{f}2\pi$$

هر مثلث سه ضلع دارد وچون Σ بدون مرز است داریم :

$$2E = 3F$$

ازاینرو:

$$\begin{aligned} 2\pi V - \sum_f 3\pi + \sum_f 2\pi &= 2\pi V - 3\pi F + 2\pi F \\ &= 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F \\ &= 2\pi (V - E + F) \\ &= 2\pi\ (\chi\ (\Sigma)) . \end{aligned}$$

لم۱-۱-۷ نتیجه جالب زیر را به همراه دارد که در هیچ جایی از این پایان نامه از آن استفاده نمی شود.
اگر S یک رویه قطعه ای مسطح باشد و با کره S^2 همئومورف باشد و به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $\beta(x) > -1$، آنگاه حداقل سه نقطه روی S وجود دارد که در شرط $0 < \theta < 2\pi$ صدق می کنند:
برای اثبات آن ابتدا فرض کنیم دقیقاً دو نقطه وجود داشته باشد که در شرط $0 < \theta < 2\pi$ صدق کنند.آنگاه داریم:

$$\sum_{i=1,2} (2\pi - \theta_i) = -2\pi(\beta_1 + \beta_2) < 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$$

که با لم۱-۱-۷ تناقض دارد. چون $0 < \theta < 2\pi$ ، به ازای کمتر از دو نقطه مخروطی در مجموع سمت چپ نابرابری بالا عدد کوچکتری نسبت به حالت فقط دو نقطه مخروطی بدست خواهد آمد، این نیز با لم ۱-۱-۷ تناقض دارد.

به عنوان کاربردی دیگر از این فرمول می توان گفت که هیچ مثلث بندی اقلیدسی روی رویه های بسته یا فشرده بدون مرز از گونای بزرگتر از ۱ وجود ندارد که بدون نقاط تکین مخروطی باشد.

۱-۲ پوشش جهانی شاخه ای رویه قطعه ای مسطح

اگر (Σ,Ψ) یک رویه قطعه ای مسطح باشد آنگاه $\Sigma' := \Sigma-\{p_1,\ldots\}$ را رویه باز حاصل از برداشتن رأس های تکین $p_1,\ldots\in\Sigma$ در نظر می گیریم.

تعریف ۱-۲-۱ . می گوییم منحنی $c:[0,1]\to\Sigma$ قابل قبول است اگر تعداد نقاط $x\in[0,1]$ که $c(x)$ روی یالی از مثلثبندی قرار می گیرد متناهی باشد و $c(x)\in\Sigma'$ به ازای هر $0<x<1$.

تعریف ۱-۲-۲ . فرض کنیم $h:([0,1]\times[0,1])\to\Sigma$ یک هموتوپی باشد. می گوییم h یک هموتوپی قابل قبول است اگر به ازای هر $t\in[0,1]$، $h_t(s)=h(t,s)$ یک منحنی قابل قبول باشد.

دو منحنی $c_0(t)$ و $c_1(t)$ را هموتوپ قابل قبول می گوییم اگر هموتوپی قابل قبول h وجود داشته باشد که $h_0(t)=c_0(t), h_1(t)=c_1(t)$.

مثلث ثابت $T_0\in\Psi$ را از این مثلثبندی در نظر می گیریم و آنرا مثلث خانه یا مثلث پایه می گوییم.سپس نقطه ثابت x_0 را که یک نقطه درونی T_0 است انتخاب می کنیم و به آن نقطه پایه می گوییم.

پوشش جهانی شاخه ای رویه قطعه ای مسطح (Σ,Ψ) عبارت است ازمجتمع اقلیدسی † دو بعدی $\widehat{\Psi}$ که به صورت زیر به دست آمده است :

یک k-سادک $\hat{\sigma}$ از $\widehat{\Psi}$ $(k=0,1,2)$ یک دوتایی به شکل $(\sigma,[c])$ میباشد که σ یک سادک از Ψ است و $[c]$ کلاس هم ارزی تمام منحنیهایی است که با منحنی c تحت یک هموتوپی قابل قبول هموتوپ هستند و مثلث T_0 را به σ وصل می کنند.

در نتیجه پوشش جهانی شاخه ای $\widehat{\Psi}$ مجتمع سادکی † می باشد که لزوماً موضعاً متناهی نیست و نگاشت $\widehat{\Psi}\to\Psi$ که $(\sigma,[c])$ را به σ می فرستد یک نگاشت سادکی † می باشد.

تحقق هندسی † $\widehat{\Psi}$ را با $\hat{\Sigma}$ نشان می دهیم.در نتیجه $\hat{\Sigma}$ یک فضای توپولوژیک مثلث بندی † شده می باشد که با یک نگاشت پوشای $P:\hat{\Sigma}\to\Sigma$ همراه است که هر سادک را به طور همئومورف به روی سادک متناظر در Ψ می فرستد. نگاشت P، $\hat{\Sigma}$ را تبدیل به یک فضای طول می کند،به این ترتیب که $C_{\hat{\Sigma}}$ را مجموعه تمام منحنیهای پیوسته $f:[a,b]\to\hat{\Sigma}$ می گیریم و $\ell_{\hat{\Sigma}}(f)$ را در $\hat{\Sigma}$ مساوی با

$\ell(P(f([a,b])))$ در نظر می گیریم(در حقیقت ما به هر سادک $\widehat{\sigma}=(\sigma,[c])$ از $\widehat{\Psi}$ هندسه یک سادک اقلیدسی † را نسبت می دهیم) .پس $\widehat{\Sigma}$ با این ساختار طول یک فضای متریک است.

روش دیگر برای درک $\widehat{\Sigma}$ اینگونه است: همانطوریکه می دانیم برای ساخت فضای پوشش جهانی $\widetilde{X}$ از فضای توپولوژیک X با نقطه پایه x_0 که X همبند مسیری،موضعاً همبند مسیری و به طور نیمه موضعی همبند ساده † می باشد قرار می دهیم:

$$\widetilde{X}=\{[\gamma] \mid \gamma:[0,1]\to X\ ,\gamma(0)=x_0\}$$

و $[\gamma]$ کلاس هموتوپی منحنی γ(با یک هموتوپی که نقاط انتهایی $\gamma(0)$ و $\gamma(1)$ را ثابت نگاه می دارد) می باشد. $\widetilde{X}$ همراه با نگاشت $P:\widetilde{X}\to X$ که $[\gamma]$ را به $\gamma(1)$ می فرستد یک پوشش جهانی برای X می باشد[۷].

حال فرض می کنیم $\widetilde{\Sigma'}$ پوشش جهانی Σ' باشد.با استفاده از نگاشت P همانند بالا $\widetilde{\Sigma'}$ یک فضای طول و در نتیجه فضای متریک می باشد که در انتها برای تتمیم این متریک نقاط متناظر با رأسهای تکین را به آن اضافه نموده ایم تا $\widehat{\Sigma}$ حاصل شود.

۱-۳ توسیع رویه های قطعه ای مسطح

فرض کنیم یک مثلث بندی اقلیدسی Ψ از Σ در اختیار باشد.آنگاه یک ضلع از (Σ,Ψ) درونی نامیده می شود اگردر مرز Σ قرار نداشته باشد. مثلثهای یکتای $T_1,T_2\in\Psi$ که با این ضلع درونی مجاور هستند هنگ این ضلع نامیده می شوند.

لم ۱-۳-۱ (لم چسباندن) . X را یک فضای توپولوژیک در نظر می گیریم،و فرض می کنیم $X=A_1\cup\cdots A_k$ که در اینجا A_i یک مجموعه بسته در X می باشد.به ازای هر i فرض کنیم $f_i:A_i\to Y$ یک تابع پیوسته باشد و $f_i|_{A_i\cap A_j}=f_j|_{A_i\cap A_j}$.آنگاه تابع پیوسته یکتای $f:X\to Y$ وجود دارد که به ازای هر i ، $f|_{A_i}=f_i$.

اثبات: [۹] ص ۴۶.

حال e را یک یال درونی درنظر می گیریم که مثلثهای $(T_1,f_1),(T_2,f_2)$ هنگ این یال هستند.طبق تعریف مثلث بندی اقلیدسی، ایزومتری $g_{12} \in E(2)$ وجود دارد که در مجموعه $T_1 \bigcap T_2 = e$ رابطه $f_1 = g_{12} f_2$ برقرار است.اگر لازم بود ایزومتری g_{12} را با ایزومتری تقارن نسبت به خط $f_1(e)$ ترکیب می کنیم تا $f_1(T_1)$ و $f_2(T_2)$ به جز در نقاط $f_1(e)$ هیچ اشتراکی نداشته باشند.نتیجه می گیریم ایزومتری $g : T_2 \to R^2$ وجود دارد که نقاط درونی $g(T_2)$ و $f_1(T_1)$ هیچ اشتراکی نداشته باشند و $f_1(e) = g(e)$. طبق لم چسباندن تابع پیوسته

$$f_e = f_1 \bigcup g : T_1 \bigcup T_2 \to R^2$$

وجود دارد که یک ایزومتری از هنگ به روی یک چهارضلعی در صفحه اقلیدسی نیز می باشد.نگاشت f_e که به اینصورت به دست آمده است نگاشت آشکار ساز هنگ نامیده می شود.همچنین می گوییم g ادامه f_1 درطول ضلع e می باشد.تعاریف هنگ، آشکار ساز هنگ،و ادامه درطول یک یال به طور مشابه برای پوشش جهانی شاخه ای $\hat{\Sigma}$ تعریف می شود.

لم ۱-۳-۲ (لم عدد لبگ) . فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده و $U_1,\dots,U_n$ یک پوشش باز از آن باشد.در اینصورت عدد $\delta > 0$ وجود دارد که هر $U \subset X$ با قطر کمتر از δ مشمول یکی از اعضای این پوشش است.

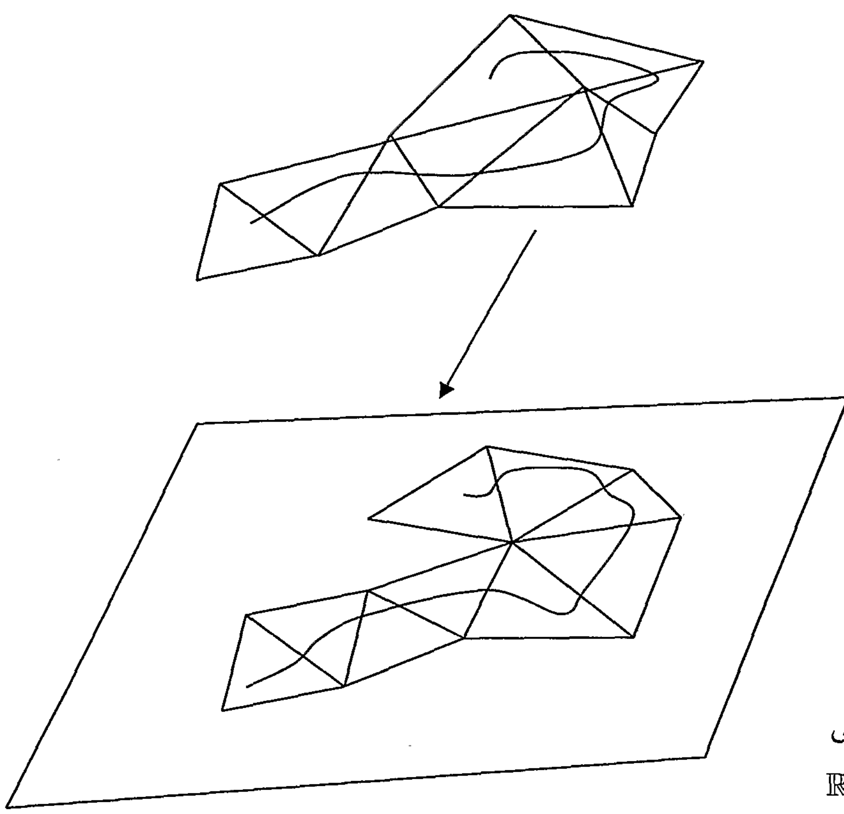
اثبات: [۹] ص ۷۶.

لم ۱-۳-۳ . فرض کنیم (Σ,Ψ) یک رویه قطعه ای مسطح باشد با مثلث پایه T_0.حال ایزومتری f_0 از T_0 به روی یک مثلث در R^2 را درنظر می گیریم. آنگاه نگاشت یکتای $f : \hat{\Sigma} \to R^2$ وجود دارد که در مثلث T_0، f و f_0 برابر هستند و f هر هنگ را به طور ایزومتریک به روی یک چهارضلعی می نگارد:

اثبات: فرض کنیم $\hat{x}$ یک نقطه در $\hat{\Sigma}$ باشد.این نقطه به یک سادک $\hat{\sigma} = (\sigma,[c])$ در $\hat{\Psi}$ تعلق دارد.یک منحنی قابل قبول c که نقطه پایه $x_0 \in T_0$ را به σ وصل می کند انتخاب می کنیم.چون c قابل قبول است،فقط تعداد متناهی از یالهای $e_1,\dots,e_n$ را و با همین ترتیب قطع می کند که امکان تکرار نیز وجود دارد.حال به این منحنی یک دنباله از مثلثهای $T_1,\dots,T_n$ را متناظر می کنیم با این ویژگی که (T_0,T_1) هنگ یال e_1 باشد ، (T_1,T_2) هنگ یال e_2 باشد و به همین ترتیب ادامه می دهیم تا

(T_{n-1},T_n) هنگ یال e_n باشد.همانند شکل ۱ در زیر تابع $f_j:T_j \to R^2$ را ادامه f_{j-1} در طول یال e_j به ازای $1 \le j \le m$ در نظر می گیریم و در نهایت تعریف می کنیم:

$$f(\widehat{x}) := f_m(p(\widehat{x})).$$



شکل ۱

حال ثابت می کنیم نقطه $f(\widehat{x}) \in R^2$ فقط به کلاس هموتوپی قابل قبول $[c]$ بستگی دارد و نه به مسیر c .فرض کنیم α,β در کلاس هموتوپی c قرار داشته باشند،پس یک هموتوپی قابل قبول $h:([0,1]\times[0,1]) \to \Sigma$ وجود دارد. به ازای هر رأس v از مثلثبندی تمام مثلثهایی که با رأس v مجاور هستند را ستاره v و درون این ستاره را ستاره باز v می نامیم.

حال یک پوشش باز را برای $h([0,1]\times[0,1])$ به این صورت انتخاب می کنیم:

۱) اگر $x \in h([0,1]\times[0,1])$ یک رأس باشد،همسایگی باز از x را ستاره باز x می گیریم .۲) اگر x نقطه درونی یک یال باشد این همسایگی را نقاط درونی هنگ این یال می گیریم .۳) در نهایت اگر x نقطه درونی یک مثلث باشد درون این مثلث را به عنوان همسایگی باز از x در نظر می گیریم.

حال متناظر با این همسایگیها سه دسته بندی ممکن زیر برای دو منحنی هموتوپ قابل قبول α و β با نقاط ابتدایی و انتهایی یکسان که در یکی از این همسایگیها قرار دارند را در نظر میگیریم:

الف) اگر هر دو منحنی در یکی از همسایگی های باز از نوع ۲ یا ۳ قرار داشته باشند و نقاط ابتدایی و انتهایی یکسانی داشته باشند آنگاه تحت ادامه در صفحه اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ دارای نقاط ابتدایی و انتهایی یکسانی هستند.

ب) اگر هر دو α و β در یکی از همسایگی های باز از نوع ۱ قرار داشته باشند و x یک رأس منظم باشد،آنگاه باز هم ادامه آنها در صفحه اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ دارای نقاط ابتدایی و انتهایی یکسانی خواهد بود.

ج) اگر هر دو α و β در یکی از همسایگی های باز از نوع ۱ قرار داشته باشند و به رأس تکین مخروطی x ختم شوند،چون هنگام ادامه مثلثهای موجود در ستاره x در امتداد هر منحنی در این ستاره، همواره تصویر این رأس در صفحه اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ ثابت است،تصویرهای α و β در $\mathbb{R}^2$ دارای نقاط انتهایی یکسانی خواهد بود.

مجموعه تمام این همسایگیها پوشش بازی برای $h([0,1]\times[0,1])$ است.چون این مجموعه یک زیرمجموعه فشرده از Σ است تعداد متناهی از این همسایگیها مانند $\{U_i\}$ آنرا می پوشانند.در نتیجه طبق لم ۱-۳-۲ افراز $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=1$ از $[0,1]$ وجود دارد که مجموعه $h([t_{i-1},t_i]\times[t_{j-1},t_j])$ در $U_{ij}\in\{U_i\}$ قرار می گیرد.

فرض کنیم α_{ij} منحنی در Σ باشد که از تحدید h به فلش نشان داده شده در شکل ۲-الف به دست آمده است و β_{ij} منحنی حاصل از تحدید h به فلش نشان داده شده در شکل ۲-ب باشد: