دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

عنوان :

بررسی مدول های مکمل پذیر گلدی *

استاد راهنما :

دکتر یحیی طالبی رستمی

استاد مشاور :

دکتر علی اصغر طالبی رستمی

نگارش :

سمیه ملاشاهی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم به پاس تلاش بسیار و مهر سرشارشان

و به برادر عزیزم که از فاو دنیا به وفای الهی رسید

قدردانی

الهی ادای شکر تو را هیچ زبان نیست و دریای فضل تو را هیچ کران نیست. الهی چون تو توانایی که را توان است، در ثنا تو را که توان است و بی مهر تو که را سر و جان است. از نزدیک نشانت می دهند و برتر از آنی و دورت می پندارند، نزدیک تر از جانی. ای داننده هر چیز ای سازنده هر کار و دارنده هر کس، سپاس می گویم تو را. سپاسم را پس از دفاع می نویسم تا رنگ اخلاصش کم نشود از این رو بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر یحیی طالبی که راهنمایم بودند بر این پایان نامه، صمیمانه تشکر کنم و نیز از استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی اصغر طالبی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشته اند، و از اساتید محترم داور جناب آقای دکتر تقوی و سرکار خانم آموزگار که برای ادامه راه مرا یاری نمودند تشکر می نمایم. از توجهات خانواده عزیزم که همواره همراه و همپایم هستند و از همیاری دوستانم سپاس گزارم.

چکیده

فرض کنید M یک R- مدول باشد. گوییم زیرمدول های X و Y از M، β^* - هم ارزند اگر و تنها اگر $\frac{X+Y}{X} \ll \frac{M}{X}$ و $\frac{X+Y}{Y} \ll \frac{M}{Y}$. هم چنین ثابت می کنیم که رابطه β^* روی زیرمدول های یک مدول یک رابطه هم ارزی است و نسبت به جمع مستقیم زیرمدول ها، تصاویر هم ریختی و مکمل ها خوش رفتار است. و از نتایج به دست آمده برای معرفی کلاسی از مدول های $\mathcal{G}^*$ - مکمل پذیر و $\mathcal{G}^*$ - بالابرنده استفاده می کنیم. و به بررسی این کلاس ها و کلاس مدول های H - مکمل پذیر می پردازیم و آن ها را با کلاس های متنوع شناخته شده دیگری از مدول ها که با مدول های بالابرنده در ارتباط هستند، مقایسه می کنیم. به خصوص برقراری استلزام های زیر را بررسی می کنیم.

بالابرنده $\Leftarrow$ $\mathcal{G}^*$- بالابرنده $\Leftrightarrow$ H - مکمل پذیر $\Leftarrow$ $\mathcal{G}^*$ - مکمل پذیر$\Leftarrow$ مکمل پذیر.

بالابرنده $\Leftarrow$ فرامکمل پذیر $\Leftarrow$ $\mathcal{G}^*$ - مکمل پذیر.

بالابرنده $\Leftrightarrow$ فرامکمل پذیر و $\oplus$ - مکمل پذیر قوی.

$\mathcal{G}^*$ - بالابرنده $\Rightarrow$ $\mathcal{G}^*$ - مکمل پذیر و $\oplus$ - مکمل پذیر قوی.

کلمات کلیدی: مدول $\mathcal{G}^*$ - مکمل پذیر، زیرمدول ناچیز، H - مکمل پذیر.

فهرست مطالب

مقدمه

گلدی [۱۳] در سال(۱۹۶۰) ، رابطه β را روی ایده آل های راست یک حلقه تعریف کرد، سپس در جهت پاسخ به پرسش مطرح شده توسط محمد و مولر[۱۹] ، آکلان و همکاران [۲] رابطه β را روی زیرمدول های یک مدول بدین صورت معرفی نمودند که $X\beta Y$ اگر و تنها اگر $X \cap Y \leq^e X$ و $X \cap Y \leq^e Y$، نیز آن ها رابطه α را روی مجموعه زیرمدول های یک مدول بدین گونه تعریف کردند که $X\alpha Y$ اگر و تنها اگر $A \leq M$ وجود داشته باشد به طوری که $X \leq^e A$ و $Y \leq^e A$. و نیز مفهوم مدول های توسعه یافته و توسعه یافته گلدی را به وسیله این روابط بررسی کردند. اسمیت [۲۱]، رابطه ای هم ارز با رابطه β و با نام ρ روی شبکه زیرمدول های یک مدول مورد بررسی قرار داد. در فصل اول برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز بیان شده است. در فصل دوم مدول های مکمل پذیر و فرامکمل پذیر بررسی شده است. در فصل سوم ابتدا برخی از خواص مدول های H - مکمل پذیر که در [۱۴] و [۱۷] معرفی شده را بررسی می کنیم، سپس مدول های توسعه یافته گلدی را مورد بحث قرار می دهیم. در فصل پایانی به بررسی خواص رابطه β^* که توسط گلدی و همکارانش در [۶] به آن پرداخته شده می پردازیم، لازم به ذکر است که این رابطه مفهوم دوگان رابطه β را داراست. با استفاده از رابطه β^* مدول هایی با عنوان $\mathcal{G}^*$ - مکمل پذیر و $\mathcal{G}^*$- بالابرنده معرفی شده است، که مدول های $\mathcal{G}^*$- بالابرنده دوگان مدول های توسعه یافته گلدی می باشند. هم چنین نشان می دهیم که چگونه مدول های $\mathcal{G}^*$- بالابرنده با مدول های H - مکمل پذیر معادل اند. در این پایان نامه R نشان دهنده یک حلقه شرکت پذیر با عنصر همانی ضربی ناصفر است. مدول ها R- مدول های راست یکانی و حلقه ها ناجابجایی اند مگر این که خلاف آن بیان شود.

منابع اصلی این تحقیق برگرفته از:

Birkenmeier, G. F., Takil mutlu, F., Nebiyev, C., Sokmez, N. and Tercan, A., Goldie*-supplemented modules, Glasgow Math. J. 52A (2010) 41-52.

Keskin, D., Nematollahi, M. and Talebi, Y., on H- supplemented modules, Algebra colloquium 18 (spec1) (2011) 915-924.

Mohamed, S. H. and Müller, B. J., Continuous and discrete modules, London Mathematical Society Lecture Note Series, 147 (Cambridge Univ. press, Cambridge, 1990).

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم پایه مورد نیاز را بیان می کنیم که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرد.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه ی یکدار و M یک گروه جمعی جابجایی باشد. گوییم M یک R- مدول راست است، هرگاه تابع $\circ : M \times R \to M$ با ضابطه $(m,r) \to mr$، موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$(1)\ (m_1+m_2)r = m_1r + m_2r \qquad (3)\ m(rs) = (mr)s$$

$$(2)\ m(r+s) = mr + ms$$

و نیز اگر به ازای هر $m \in M$ داشته باشیم $m1_R = m$، آن گاه M را یک R- مدول راست یکانی گویند. R- مدول چپ نیز به همین نحو با تابعی چون $\circ : R \times M \to M$ تعریف می شود که با $(r,m) \to rm$ نموده شده و در مشابه های (۱) تا (۳) صدق می کند. R- مدول راست با نماد M_R و R- مدول چپ با نماد $_RM$ نمایش داده می شود.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید M یک R مدول و N زیر مجموعه ای ناتهی از M باشد، اگر به ازای هر دو عضو از N مانند x و y و هر عضو از R مانند r، داشته باشیم $x+y \in N$ و $xr \in N$ آن گاه به N زیر مدول M گفته می شود، و می نویسیم $N \leq M$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید M و N دو R - مدول راست باشند، دراین صورت تابع $f : M \to N$ را یک R - هم ریختی می گویند اگر برای هر $a, b \in R$ و هر $x, y \in M$ داشته باشیم :

$$f(xa + yb) = f(x)a + f(y)b$$

به این هم ریختی R- بروریختی گفته می شود در صورتی که پوشا باشد. اگر یک به یک باشد آن را R- تک ریختی، و هرگاه یک به یک و پوشا باشد به آن R - یک ریختی می گویند.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید M یک R- مدول باشد، در این صورت اگر f یک R - هم ریختی از M به M باشد. به آن یک R - درون ریختی از M گفته می شود. مجموعه تمام چنین هم ریختی هایی با عمل جمع توابع و ضرب معمولی (ترکیب توابع) تشکیل یک حلقه می دهند.

$$(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$$
$$(f_1 f_2)(m) = f_1(f_2(m))$$

تعریف ۵.۱.۱ حلقه درون ریختی های R - مدول M، را با $End_R(M)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید M_0، ...، M_n $(n \geq 2)$ R - مدول هایی دلخواه باشند. در این صورت دنباله ی زیر $0 : M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$، را که دنباله ای از R- هم ریختی های f_1، ...، f_n است، دنباله دقیق می گوییم هر گاه برای هر $2 \leq i \leq n$، $Imf_{i-1} = kerf_i$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید M،N،K، R- مدول هایی دلخواه باشند، در این صورت اگر دنباله $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K \to 0$ دقیق باشد، آن را دقیق کوتاه می گویند.

مثال ۱ فرض کنید M و N دو R - مدول باشند و $f : M \longrightarrow N$ یک R - هم ریختی باشد دنباله های زیر دقیق کوتاه هستند.

$$\circ \to kerf \xrightarrow{j} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{kerf} \to \circ$$

$$\circ \to Imf \xrightarrow{j} N \xrightarrow{\pi} \frac{N}{Imf} \to \circ$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{U}$ کلاسی از R- مدول ها باشد، R - مدول M توسط $\mathcal{U}$ (به طور متناهی) تولید[۱] می شود، اگر مجموعه اندیس گذار (متناهی) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ موجود باشد به طوری که هم ریختی زیر پوشا باشد.

$$_A \oplus \mathcal{U}_\alpha \to M \to \circ$$

تبصره در تعریف بالا اگر مجموعه $\mathcal{U}$ تک عضوی باشد مدول M دوری نامیده می شود.

مثال ۲ برای عدد اول p، $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}_P$ دوری است.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید M، R - مدول باشد. M را نوتری (آرتینی) می گوییم، هر گاه هر زنجیر صعودی (نزولی) از زیرمدول های M مانند ...... $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq$ (..... $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq$) سرانجام متوقف شود، یعنی عدد طبیعی مانند n موجود باشد که به ازای هر i، $i \geq n$، $M_i = M_n$.

مثال ۳ $\mathbb{Q}$ روی خودش به عنوان مدول هم نوتری و هم آرتینی می باشد، زیرا تعداد زیرمدول هایش متناهی است.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید $M_۱$ و $M_۲$ زیرمدول های M باشند، هر گاه $M = M_۱ + M_۲$ و $M_۱ \cap M_۲ = \circ$ سپس می گوییم M جمع مستقیم[۲] از زیر مدول های $M_۱$ و $M_۲$ است، و می نویسیم $M = M_۱ \oplus M_۲$.

تعریف ۱۱.۱.۱ زیر مدول $M_۱$ از M یک جمعوند مستقیم[۳] از M نامیده می شود در صورتی که زیر مدول $M_۲$ از M وجود داشته باشد به طوری که $M = M_۱ \oplus M_۲$.

تعریف ۱۲.۱.۱ به مدول غیر صفر M، هر گاه صفر و M تنها جمعوندهای مستقیم از آن باشند، تجزیه ناپذیر[۴] گفته می شود.

[۱] (finitely) generated
[۲] direct sum
[۳] direct summand
[۴] indecomposable

قضیه ۱۳.۱.۱ [۳] اگر M یک مدول نوتری ناصفر باشد، آن گاه M یک جمع مستقیم متناهی از مجموعه زیرمدول های تجزیه ناپذیر می باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ R - مدول غیرصفر M را ساده [۵]گوییم هرگاه زیرمدول غیر بدیهی نداشته باشد.

مثال ۴ $\mathbb{Z}$ - مدول $\mathbb{Z}_p$، برای هر عدد اول p ساده می باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید M یک R - مدول باشد M را نیم ساده می گویند، هرگاه هر زیر مدول از M یک جمعوند مستقیم از آن باشد.

تذکر هر مدول ساده، نیم ساده است. اما عکس آن همیشه درست نیست.

مثال ۵ مدول صفر نیم ساده است اما ساده نیست.

تعریف ۱۶.۱.۱ مدول M را موضعی [۶]گویند، هرگاه تنها یک زیرمدول ماکسیمال داشته باشد که شامل تمام زیرمدول های محض آن باشد.

مثال ۶ مدول های ساده مدول های موضعی اند.

تعریف ۱۷.۱.۱ به خانواده $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ از زیر مدول های مدول M یک جمعوند موضعی گفته می شود اگر $\sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ مستقیم و $\sum_{\lambda\in F} X_\lambda$ برای هر زیرمجموعه متناهی $F \subseteq \Lambda$ یک جمعوند از M باشد.

قضیه ۱۸.۱.۱ [۱۹] اگر هر جمعوند موضعی از R - مدول M یک جمعوند باشد، سپس M جمع مستقیم از مدول های تجزیه ناپذیر است.

تعریف ۱۹.۱.۱ مدول M را توزیع پذیر [۷] می نامیم، هرگاه برای هر سه زیر مدول L،K و N از M داشته باشیم:

$$N \cap (K+L) = (N\cap K) + (N \cap L) \text{ یا } N + (K\cap L) = (N+K)\cap(N+L)$$

[۵] simple
[۶] local
[۷] distributive

لم ۲۰.۱.۱ **(قانون مدولی)** فرض کنید L، K و N زیرمدول های M باشند، و $N \subseteq K$ در این صورت داریم:

$$K \cap (N + L) = N + K \cap L$$

برهان: $(\subseteq)$ فرض کنید $k \in K \cap (N + L)$، در این صورت $n \in N$ و $l \in L$ وجود دارد به طوری که $k = n + l$ و از این که $N \subseteq K$ لذا $n \in k$ و بنابراین $l = k - n \in K + N \subseteq K + K = K$، در نتیجه $l \in K \cap L$ و داریم $k = n + l \in N + K \cap L$.

$(\supseteq)$ بدیهی است.

■

۲.۱ زیر مدول های اساسی و بسته

تعریف ۱.۲.۱ با استفاده از لم زرن[۸] می توان نشان داد برای هر زیر مدول از M مانند K، خانواده زیر مدول های N که در شرط $K \cap N = 0$ صدق می کند، یک عضو ماکسیمال دارد که این عضو ماکسیمال متمم [۹] از K در M نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید M یک R- مدول و $N \leq M$. N در M متمم نامیده می شود هرگاه N متمم یک زیرمدول از M باشد.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید M یک R- مدول غیر صفر باشد، زیر مدول K از M را اساسی [۱۰]در M می گوییم و با نماد $K \leq^e M$ نمایش می دهیم، اگر برای هر زیر مدول غیر صفر از M مانند L داشته باشیم $K \cap L \neq 0$ در این حالت به M توسیع اساسی [۱۱]از K گفته می شود.

[۸] zorn's lemma
[۹] complement
[۱۰] essential
[۱۱] essential extension

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید M یک R - مدول باشد، $Soc(M)$ مجموع زیرمدول های مینیمال و یا به طور معادل اشتراک زیرمدول های اساسی از M است.

مثال ۷ $Soc_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = 0$، زیرا $\mathbb{Z}$ زیرمدول مینیمال ندارد.

تعریف ۵.۲.۱ یک R مدول غیر صفر M را یکنواخت [۱۲] می گوییم اگر هر زیرمدول غیر صفر از M در M اساسی باشد.

مثال ۸ اگر p عدد اول باشد، $\mathbb{Z}$ - مدول $\mathbb{Z}_{P^\infty}$، مدول یکنواخت است. زیرا اگر K, L زیرمدول های این مدول باشند، آن گاه $L \subseteq K$ یا $K \subseteq L$.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم M یک R- مدول باشد، گوییم B زیرمدول بسته[۱۳] از M است، هرگاه B در M دارای توسیع اساسی محض نباشد و با علامت $B \leq^c M$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید $A \subseteq B \subseteq M$، زیرمدول B را یک بستار [۱۴] A در M گوییم، اگر A زیرمدول اساسی در B و B در M بسته باشد.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید M یک مدول باشد. M را UC- مدول می گویند، اگر هر زیرمدول از M یک بستار یگانه [۱۵] در M داشته باشد.

لم ۹.۲.۱ [۲۱] احکام زیر برای مدول M معادل اند:

(۱) M یک UC - مدول است.

(۲) اگر N_1 و N_2 زیرمدول های بسته ای از M باشند، آن گاه $N_1 \cap N_2$ نیز در M بسته است.

گزاره ۱۰.۲.۱ [۹] فرض کنید M یک مدول باشد، سپس یک زیرمدول در M متمم است، اگر و تنها اگر در آن بسته باشد.

[۱۲] uniform
[۱۳] closed
[۱۴] closure
[۱۵] unique closure

۳.۱ زیرمدول های ناچیز و هم- بسته

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید M یک R- مدول باشد، به زیرمدول K در M ناچیز یا کوچک[۱۶] گفته می شود، اگر برای هر $L \leq M$ از $K + L = M$، نتیجه شود $L = M$، که با نماد $K \ll M$ نشان داده می شود.

مثال ۹ فرض کنید $R = \mathbb{Z}$ و $M = \mathbb{Q}$ در این صورت برای $m \in \mathbb{Z}^+$ داریم $\frac{1}{m}\mathbb{Z} \ll \mathbb{Q}$.
فرض کنید $U \leq \mathbb{Q}$، به طوری که $\frac{1}{m}\mathbb{Z} + U = \mathbb{Q}$ در این صورت $\langle\{\frac{1}{m}\} \cup U\rangle = \mathbb{Q}$، از طرفی اگر از یک مجموعه مولد، تعداد متناهی عنصر کم کنیم مجموعه باقی مانده هم چنان یک مجموعه مولد به جا خواهد ماند. لذا $\langle U\rangle = \mathbb{Q}$ پس $U = \mathbb{Q}$، بنابراین $\frac{1}{m}\mathbb{Z} \ll \mathbb{Q}$.

مثال ۱۰ هیچ زیرمدول غیرصفر از $\mathbb{Z}$ در آن ناچیز نیست. زیرا برای $(n, m) = 1$ داریم $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ اما $n\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$.

قضیه ۲.۳.۱ فرض کنید M یک R - مدول باشد.

(۱) $H, K \ll M$ اگر و تنها اگر $H + K \ll M$

(۲) مجموع تعداد متناهی زیرمدول ناچیز از M، یک زیرمدول ناچیز M است.

برهان: (۱) $(\Leftarrow)$ فرض کنید $H, K \ll M$ و X زیر مدول M، به طوری که $H + K + X = M$ اکنون از این که $H \ll M$ لذا $K + X = M$ و با توجه به ناچیز بودن K در M پس $X = M$، بنابراین $H + K \ll M$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید $K + X = M$ سپس $H + K + X = M$، و با توجه به فرض لذا $X = M$ بنابراین $K \ll M$. حال فرض کنید $H + X' = M$، در این صورت $H + K + X' = M$ طبق فرض $H + K \ll M$، بنابراین $X' = M$ در نتیجه $H \ll M$.

(۲) با استفاده از قسمت ۱ و استقراء به راحتی به دست می آید.

---
[۱۶] small

■

تعریف ۳.۳.۱ مدول غیرصفر M را میان تهی [۱۷] گوییم هرگاه هر زیرمدول محض از M در آن ناچیز باشد.

مثال ۱۱ برای هر عدد اول p، $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ - مدول، میان تهی است.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنید M یک R - مدول باشد، $Rad(M)$ اشتراک زیرمدول های ماکسیمال و یا به طور معادل مجموع تمام زیرمدول های ناچیز در M است.

مثال ۱۲ $Rad({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = ۰$، زیرا $\mathbb{Z}$ زیرمدول ناچیز ندارد.

گزاره ۵.۳.۱ فرض کنید هر زیرمدول محض از M مشمول در یک زیرمدول ماکسیمال از M باشد، در این صورت $Rad(M) \ll M$.

برهان: فرض کنید $X \leq M$، به طوری که $Rad(M) + X = M$ و $X \neq M$، بنابراین زیرمدول ماکسیمال N از M وجود دارد چنان که $N \lneqq M$ و $X \leq N$ لذا $RadM + N = M$، از طرفی $Rad(M) \subseteq N$ پس $N = M$ و این با ماکسیمال بودن N در M متناقض می باشد، در نتیجه $Rad(M) \ll M$.

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید M یک R - مدول و N، L زیرمدول های آن باشند، به N مکمل L در M گفته می شود، هرگاه $N + L = M$ و N نسبت به این خاصیت مینیمال باشد.

تعریف ۷.۳.۱ فرض کنید N و K زیر مدول هایی از مدول M باشند، در این صورت می گوییم N در M روی K قرار می گیرد[۱۸] اگر داشته باشیم $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$.

گزاره ۸.۳.۱ زیرمدول N در M ناچیز است اگر و تنها اگر N در M روی صفر قرار گیرد.

برهان: بدیهی است.

[۱۷] hollow
[۱۸] lies above

تعریف ۹.۳.۱ [۸]،[۲۳] فرض کنید M یک R- مدول و $A \subseteq B \subseteq M$. اگر $\frac{M}{A} \ll \frac{B}{A}$، آن گاه A را زیرمدول هم - اساسی [۱۹]از B گویند و با علامت $A \overset{ce}{\hookrightarrow} B$ مشخص می شود.

مثال ۱۳ اگر $M = \mathbb{Z} = R$ و $A = ۲\mathbb{Z}$ سپس برای هر $k \in \mathbb{N}$، $۲^k\mathbb{Z}$ یک زیرمدول هم - اساسی از A در M است.

لم ۱۰.۳.۱ [۱۱] فرض کنید M یک R- مدول باشد و $A \subseteq B \subseteq C$، سپس $A \overset{ce}{\hookrightarrow} C$ اگر و تنها اگر $B \overset{ce}{\hookrightarrow} C$ و $A \overset{ce}{\hookrightarrow} B$.

تعریف ۱۱.۳.۱ فرض کنید M یک R - مدول باشد، با استفاده از [۱۲]،گوییم A زیرمدول هم - بسته [۲۰]در M است، هر گاه A دارای زیرمدول هم - اساسی محض در M نباشد، و با نماد $A \overset{cc}{\hookrightarrow} M$ نمایش می دهیم. پس اگر $A \overset{cc}{\hookrightarrow} M$ و به ازای $B \leq A$ داشته باشیم $\frac{M}{A} \ll \frac{A}{B}$، آن گاه $A = B$.

لم ۱۲.۳.۱ فرض کنید $K \subset L \subset M$، در این صورت اگر L در M هم - بسته باشد، و $K \ll M$ آن گاه $K \ll L$.

برهان: فرض کنید $K' \subset L$ و $K + K' = L$، حال در نظر بگیرید $K' \subset L' \subset M$، به طوری که $\frac{M}{K'} = \frac{L}{K'} + \frac{L'}{K'}$، پس $M = L + L' = K + K' + L'$ اینک از فرض چون $K \ll M$، پس $M = L'$ بنابراین $\frac{L}{K'} \ll \frac{M}{K'}$، از طرفی L در M هم - بسته فرض شده است یعنی L زیرمدول هم - اساسی محض ندارد، در نتیجه $L = K'$.

■

تعریف ۱۳.۳.۱ فرض کنید M یک R - مدول و $L \leq M$، به $K \leq L$ یک هم - بستار [۲۱]ازL درM می گوییم، هر گاه$K \overset{ce}{\hookrightarrow} L$ و$K \overset{cc}{\hookrightarrow} M$.

[۱۹] co-essential
[۲۰] co-closed
[۲۱] co-closure

نکته به طور کلی هم - بستار زیرمدول ها همیشه وجود ندارند، به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ - زیرمدول $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ هیچ هم - بستاری در $\mathbb{Z}$ ندارد.

تعریف ۱۴.۳.۱ فرض کنید M یک R- مدول باشد. M را UCC - مدول گوییم هر گاه هر زیرمدول M یک هم - بستار یگانه[۲۲] در M داشته باشد.

قضیه ۱۵.۳.۱ فرض کنید M یک R - مدول باشد و $K \leq L \leq M$. در این صورت

(۱) $L \ll M$ اگر و تنها اگر $K \ll M$ و $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$.

(۲) اگر $K \ll L$، آن گاه $K \ll M$.

(۳) اگر M' یک R -مدول و $f: M \to M'$ یک هم ریختی باشد و $L \ll M$ سپس $f(L) \ll M'$.

برهان: (۱) $(\Leftarrow)$ فرض کنید $N \leq M$ و $K + N = M$. از این که $K \leq L$ پس $L + N = M$ و چون $L \ll M$، لذا $N = M$ بنابراین $K \ll M$.

حال فرض کنید $T \leq M$ و $K \leq T$، به طوری که $\frac{L}{K} + \frac{T}{K} = \frac{M}{K}$، در این صورت $L + T = M$ و از این که $L \ll M$ پس $T = M$، که نتیجه می دهد $\frac{T}{K} = \frac{M}{K}$ بنابراین $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید $N \leq M$ و $L + N = M$ لذا $\frac{L}{K} + \frac{N+K}{K} = \frac{M}{K}$ و از این که $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$، بنابراین $\frac{N+K}{K} = \frac{M}{K}$ لذا $N + K = M$ و با توجه به این که $K \ll M$، پس $N = M$ در نتیجه $L \ll M$.

(۲) فرض کنید $U \leq M$، به طوری که $K + U = M$ لذا $L + U = M$. اکنون با توجه به قانون مدولی $L = L \cap M = L \cap (K + U) = K + L \cap U$ و چون $K \ll L$ پس $L = L \cap U$ در نتیجه $L \leq U$ و البته $K \leq U$ بنابراین $U = M$، در نتیجه $K \ll M$.

(۳) فرض کنید $K \leq M'$، به طوری که $f(L) + K = M'$، برای هر $m \in M$ داریم $f(m) \in M'$، لذا $k \in K$ و $l \in L$ وجود دارد چنان که $f(l) + k = f(m)$ بنابراین $f(m - l) = k$ یعنی $m - l \in f^{-1}(K)$، و از اینجا $m \in L + f^{-1}(K)$ در نتیجه $M = L + f^{-1}(K)$. حال با توجه به این که $L \ll M$، لذا $M = f^{-1}(K)$ پس $L \subseteq f^{-1}(K)$، لذا $f(L) \subseteq f(f^{-1}(K)) \subseteq K$، بنابراین

[۲۲] unique co-closure

$K = M'$ و $f(L) \ll M'$.

■

قضیه ۱۶.۳.۱ فرض کنید $K \subset L \subset M$، سپس شرایط زیر هم ارزند:

(۱) $K \overset{ce}{\hookrightarrow} L$.

(۲) برای هر $X \subset M$، $L + X = M$ نتیجه دهد $K + X = M$.

برهان: (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنید برای $X \subseteq M$، $L + X = M$، در این صورت $\frac{M}{K} = \frac{L}{K} + \frac{K+X}{K}$، با توجه به این که $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$، لذا $\frac{M}{K} = \frac{K+X}{K}$ بنابراین $M = K + X$.

(۲ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنید $K \subset X \subset M$ طوری باشد که $\frac{L}{K} + \frac{X}{K} = \frac{M}{K}$، در این صورت $L + X = M$ و با توجه به فرض $K + X = M$، بنابراین $\frac{X}{K} = \frac{M}{K}$ در نتیجه $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$ $(K \overset{ce}{\hookrightarrow} L)$.

■

لم ۱۷.۳.۱ فرض کنید $K \subset L \subset M$ و $L = K + S$ که $S \ll M$، در این صورت $K \overset{ce}{\hookrightarrow} L$.

برهان: فرض کنید $X \subset M$ به طوری که $M = L + X$، در این صورت $M = K + S + X = K + X$ زیرا $S \ll M$، بنابراین از قضیه قبل نتیجه می شود که $K \overset{ce}{\hookrightarrow} L$.

■

۴.۱ مدول های تصویری و شبه تصویری

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید $M = K \oplus K'$. سپس تصویر M [۲۳] روی K در امتداد K' یک هم ریختی پوشای یکتای $p_k : M \to K$ است، به طوری که $Kerp_k = K'$ و $p_k \mid K = i_K$.

[۲۳] projection

لم ۲.۴.۱ [۳] هر جمعوند مستقیم از مدول M تصویر یک درون ریختی خودتوان از M است و برعکس.

تعریف ۳.۴.۱ فرض کنید M،N،P، R - مدول باشند. مدول P را تصویری [۲۴]می گویند، هر گاه به ازای هر هم ریختی پوشای $M \xrightarrow{f} N \to 0$ و هر هم ریختی $g : P \to N$، یک هم ریختی $h : P \to M$ موجود باشد. به طوری که نمودار (۱.۱)جابجایی باشد ($foh = g$).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

شکل ۱.۱: P، تصویری است

تعریف ۴.۴.۱ مدولP را A - تصویری گویند، هرگاه به ازای هر زیرمدول X ازA، هر هم ریختی $\varphi : P \to \frac{A}{X}$ را بتوان به یک هم ریختی $\psi : P \to A$ گسترش داد.

تعریف ۵.۴.۱ مدولM را تصویری گویند، هرگاه به ازای هر R - مدول A، A - تصویری باشد.

گزاره ۶.۴.۱ [۱۹] فرض کنیدM،N،P، R - مدول باشند و M، P- تصویری باشد. اگر $N \leq P$ آن گاه M، N- تصویری و $\frac{P}{N}$- تصویری است.

[۲۴] projective