بسمه تعالی

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

موضوع

خودریختی‌های غیرداخلی p-گروه‌های متناهی

تدوین

فرید‌ه شفیعی

استاد راهنما

آقای دکتر علیرضا جمالی

آذر ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادرم

تقدیر و تشکر

سپاس بیکران بر ایزد یکتا، آن یگانه هستی که حدی را بر لطف بیکرانش نتوان یافت.

بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس بی‌حدّ خود را از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر جمالی ابراز دارم که همواره و بی‌دریغ مرا مرهون آموزش‌ها و راهنماییهایشان قرارداده‌اند. تدوین این پایان‌نامه به مدد دانشی صورت گرفته است که ایشان در اختیار من قرارداده‌اند. قلم یارای تشکر و قدردانی از زحمات ایشان را ندارد. برای ایشان آرزوی کامیابی از درگاه حضرت حق مسألت می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر دوستی که زحمت داوری داخلی این پایان‌نامه را متقبل شده‌اند قدردانی می‌نمایم.

از سرکار خانم دکتر اخوان که با دقت نظر تمام، این پایان‌نامه را مطالعه فرموده‌اند کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه گروه خودریختی p–گروه‌های متناهی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک حدس قدیمی حاکی از این است که هر p–گروه متناهی غیرآبلی یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p دارد. ابتدا نشان خواهیم داد که هر p–گروه متناهی از مرتبه‌ی حداقل p^2 دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی توانی از p است. با استفاده از مفهوم p–گروه فراتینی ثابت خواهیم کرد که هر p–گروه متناهی غیرآبلی مانند G که در شرط $C_G(Z(\Phi(G))) \neq \Phi(G)$ صدق کند دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p است که $\Phi(G)$ را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد. سپس ثابت خواهیم کرد که حدس فوق برای بعضی از p–گروه‌های متناهی مانند p–گروه‌های پوچتوان از رده‌ی ۲ و p–گروه‌هایی که زیرگروه فراتینی آن‌ها دوری است برقرار می‌باشد.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰ : ۲۰D۱۵، ۲۰D۴۵، ۲۰D۲۵.

واژه‌های کلیدی: p–گروه متناهی، خودریختی، p–گروه فراتینی.

پیشگفتار

فرض کنیم p یک عدد اول، و G یک p−گروه متناهی غیرآبلی باشد. یک حدس قدیمی بیان می‌کند که G دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p است. بنابر قضیه‌ی مشهور گاشوتز[۱]، G دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی توانی از p می‌باشد. هم چنین لیبک[۲] در [۱۰] نشان داده است که هر p−گروه متناهی از رده‌ی پوچتوانی ۲ که p فرد است، دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p است که زیرگروه فراتینی را نقطه به نقطه ثابت نگه‌می‌دارد. دیاکونسکو[۳] و سیلبربرگ[۴] بررسی این حدس را به p−گروه‌هایی مانند G که در شرط $C_G(Z(\Phi(G))) = \Phi(G)$ صدق می‌کنند، محدود کرده‌اند.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد. در فصل اول تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی مورد نیاز بیان شده است. در فصل دوم ثابت می‌کنیم که هر p−گروه متناهی از مرتبه‌ی حداقل p^2 دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی توانی از p است. این قضیه ابتدا توسط گاشوتز در [۶] با استفاده از مفهوم گروه کوهمولوژی ثابت شد. سپس اشمید[۵] در [۱۴] برهانی ساده‌تر برای آن ارائه کرد. وب[۶] در [۱۷] قضیه‌ی فوق را با روش های مقدماتی بدون استفاده از مفهوم گروه کوهمولوژی ثابت کرد. در این فصل ما اثبات قضیه‌ی وب را که در مقاله‌ی زیر آمده است به تفصیل شرح می‌دهیم.

U. H. M. Webb. An elementary proof of Gaschütz' Theorem, *Arch. Math.* **35** (1980), 23-26.

---

[۱] W. Gaschütz.

[۲] H. Liebeck

[۳] M. Deaconescu

[۴] G. Silberberg

[۵] P. Schmid

[۶] U. H. M. Webb

در فصل سوم ابتدا به معرفی خانواده‌ی مهمی از $p-$گروه‌های متناهی موسوم به $p-$گروه‌های فراتینی خواهیم پرداخت. $p-$گروه متناهی G را $p-$گروه فراتینی می‌نامیم در صورتی که برای هر زیرگروه ماکسیمال G مانند M داشته باشیم $Z(M) \neq Z(G)$. در این فصل ساختار $p-$گروه‌های فراتینی را مشخص می‌کنیم. گروه فراتینی G را که در شرط $C_G(Z(\Phi(G))) = \Phi(G)$ صدق کند یک $p-$گروه فراتینی قوی گوییم. سپس $p-$گروه‌های ردی را معرفی نموده و ثابت می‌کنیم که هر $p-$گروه ردی دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p است که مرکز گروه را ثابت نگه می‌دارد. سپس با استفاده از خواص گروه‌های فراتینی و گروه‌های ردی ثابت می‌کنیم که هرگاه G یک $p-$گروه متناهی غیرآبلی باشد که در شرط $C_G(Z(\Phi(G))) \neq \Phi(G)$ صدق کند آنگاه G دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p است که $\Phi(G)$ را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد. این فصل تفصیل مقاله‌های زیر است:

1. P. Schmid, Frattinian p-groups, *Geom. Dedicata* **36** (1990), 359-364.

2. M. Deaconescu, G. Silberberg, Noninner automorphisms of order p of finite p-groups, *J. Algebra* **250** (2002), 283-287.

درفصل چهارم با استفاده از نتایج به دست آمده از فصل سوم و مقاله‌ی [۵] ثابت می‌کنیم که برخی از $p-$گروه‌های متناهی مانند $p-$گروه‌های خیلی خاص، $p-$گروه‌های پوچتوان از رده‌ی ۲، $p-$گروه‌هایی که زیرگروه فراتینی آن‌ها دوری می‌باشد دارای یک خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p اند که $\Phi(G)$ یا $Z(G)$ را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد. این فصل تفصیل مقاله‌ی زیر است:

A. Abdollahi, Finite p-groups of class 2 have noninner automorphisms of order p, *J. Algebra* **312** (2007), 876-879.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ تعریف‌ها و قضیه‌های بنیادی

دراین فصل قضیه‌ها و لم‌های کلاسیک در نظریه‌ی گروه‌ها را که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان می‌کنیم. در بیشتر موارد برهان‌ها را به کتاب‌ها ارجاع داده‌ایم، در برخی موارد برای سهولت بیشتر برهان را بیان نموده و نیز از اثبات حکم‌های متعارف صرف نظر کرده‌ایم.

۱.۱.۱ قرارداد. در این فصل و فصل‌های بعد گروه دوری از مرتبه‌ی n را با C_n، مرتبه‌ی هر عضو G مانند g را با $|g|$ و اثر خودریختی G مانند α را بر عضو g به صورت g^α نشان می‌دهیم. هم‌چنین p همواره یک عدد اول است.

۲.۱.۱ تعریف. (i) فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت هر همریختی α بر G به‌توی G را یک درون‌ریختی G می‌نامیم و مجموعه‌ی همه‌ی درون‌ریختی‌های G را با علامت $\mathrm{End}(G)$ نشان می‌دهیم. $\mathrm{End}(G)$ با عمل ترکیب توابع تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهد.

(ii) فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت هر یکریختی α بر G به‌توی G را یک خودریختی G می‌نامیم و مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های G را با $\mathrm{Aut}(G)$ نشان می‌دهیم، و آن را گروه خودریختی‌های G می‌نامند. $\mathrm{Aut}(G)$ با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد.

(**iii**) فرض کنیم G یک گروه و $g \in G$ باشد. در این صورت تابع $\tau_g : G \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $x\tau_g = x^g$ یک خودریختی G است. این خودریختی را خودریختی داخلی G القا شده با g می‌نامند. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های داخلی G، که آن را با علامت $\mathrm{Inn}(G)$ نشان می‌دهیم، یک زیرگروه نرمال $\mathrm{Aut}(G)$ است. هر خودریختی G را که داخلی نباشد خودریختی غیرداخلی (خارجی) G می‌گوییم و تعریف می‌کنیم $\mathrm{Out}(G) = \dfrac{\mathrm{Aut}(G)}{\mathrm{Inn}(G)}$.

۳.۱.۱ لم. فرض کنیم H و K زیرگروه‌های گروهی مانند G باشند به طوری که اندیس K در G متناهی باشد. در این صورت

(**i**) اندیس $H \cap K$ در H متناهی است، و $|H : H \cap K| \leq |G : K|$، و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $G = HK$؛

(**ii**) هرگاه اندیس H در G نیز متناهی باشد آنگاه $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$، و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $G = HK$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۶. ■

۴.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و $N \lhd G$ به طوری که $N \cap G' = 1$. در این صورت $N \leq Z(G)$ و $Z(G/N) = Z(G)/N$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۷. ■

۵.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه باشد، و $A, B \leq G$. در این صورت

(**i**) $[A, B] = [B, A]$ ؛

(**ii**) اگر $A_1 \leq A$ و $B_1 \leq B$ آنگاه $[A_1, B_1] \leq [A, B]$ ؛

(**iii**) اگر $A \lhd G$ آنگاه $[A, B] \leq A$ ؛

(**iv**) اگر $A \lhd G$ و $B \lhd G$ آنگاه $[A, B] \lhd G$ ؛

(**v**) $[A, B] \leq B$ اگروتنها اگر $A \leq N(B)$ ؛

(**vi**) اگر $B \leq A$ و $G \lhd A$، آنگاه شرط لازم و کافی برای آن که $B/A \leq Z(G/A)$ آن است که $[G, B] \leq A$ ؛

(**vii**) اگر θ یک همریختی گروه G باشد آنگاه $[A\theta, B\theta] = [A, B]\theta$ ؛

(**viii**) اگر K گروهی دلخواه باشد، و $C \leq K$ آنگاه $[G \times K, A \times C] = [G, A] \times [K, C]$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۲۰. ■

۶.۱.۱ لم. فرض کنیم H، K، و L زیرگروه‌های نرمال از گروه G باشند.در این صورت $[HK, L] = [H, L][K, L]$ و $[H, KL] = [H, L][H, K]$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۲۸. ■

۷.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه باشد، و x، y، z اعضایی از G باشند. در این صورت

(**i**) $[x, y]^{-۱} = [y, x]$؛

(**ii**) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$؛

(**iii**) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۰. ■

۸.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه باشد، و اعضای x، y از آن چنان باشند که x و y هر دو با $[x, y]$ تعویض‌پذیر باشند. در این صورت به ازای هر m از $\mathbb{Z}$ و $n \geq ۰$ ،

(**i**) $[x^m, y] = [x, y]^m$؛

(**ii**) $(xy)^n = x^n\, y^n\, [y, x]^{\binom{n}{r}}$.

برهان. [۱۲] صفحه‌ی ۱۱۹. ■

۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و N یک زیرگروه نرمال واقعی G باشد. گوییم N یک زیرگروه نرمال ماکسیمال واقعی G است در صورتی که N در مجموعه‌ی مرتب جزیی همه‌ی زیرگروه‌های نرمال واقعی G با ترتیب جزیی $\subsetneqq$ ، یک عضو ماکسیمال باشد.

۱۰.۱.۱ لم. فرض کنیم H و K دو زیرگروه نرمال ماکسیمال واقعی و متمایز گروه G باشند. در این صورت $H \cap K$ یک زیرگروه نرمال ماکسیمال واقعی H و هم‌چنین K است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۰. ■

۱۱.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت اگر $M < G$ و $|G : M| = p$، آنگاه M زیرگروه ماکسیمال G است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۰. ■

۱۲.۱.۱ قضیه. D_8 و Q_8 تنها گروهای غیرآبلی از مرتبه‌ی ۸ می‌باشند.

برهان. [۱۲] صفحه‌ی ۸۳. ■

۱۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. کوچکترین مضرب مشترک مرتبه‌ی اعضای G را توان G گویند و با علامت $\exp(G)$ نشان می‌دهند. بنابراین اگر $\exp(G) = n$، آنگاه به ازای هر g از G، داریم $g^n = 1$.

۱۴.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه، $H \lhd G$، و $\exp H = m$. اگر $\exp(G/H) = n$، آنگاه $\exp(G) \leq mn$.

برهان. فرض کنیم $g \in G$. چون $\exp(G/H) = n$، در این صورت $(Hg)^n = H$. یعنی $g^n \in H$. چون $\exp H = m$، پس $g^{mn} = 1$. بنابراین به ازای هر g از G، داریم $g^{mn} = 1$. در نتیجه $\exp(G) \leq mn$. ■

۲.۱ گروه جایگشتی و عمل گروه بر مجموعه

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرخالی باشد. هر تناظر یک به یک مانند

$f : X \longrightarrow X$ را یک جایگشت X گوییم. مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌های X با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را گروه متقارن بر X می‌خوانیم و آن را با S_X نشان می‌دهیم.

۲.۲.۱ **تعریف.** فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی غیرخالی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعه‌ی

$$\{g \in G | xg = x\}$$

را پایدارساز x در G می‌نامیم و آن را با علامت $\mathrm{St(x)}$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین مجموعه‌ی $\{xg | g \in G\}$ را رده‌ی هم‌ارزی شامل x یا مدار x در G می‌نامیم و آن را با علامت $\mathrm{Orb}_G(x)$ نشان می‌دهیم.

۳.۲.۱ قضیه. (قضیه‌ی مدار– پایدارساز). فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی غیرخالی X عمل کند و $x \in X$. دراین صورت تناظری ۱–۱ بین $\mathrm{Orb}_G(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی همدست‌های راست $\mathrm{St}(x)$ درG وجود دارد. بالاخص، اگر $\mathrm{Orb}_G(x)$ متناهی باشد آنگاه

$$|G : \mathrm{St}(x)| = |\mathrm{Orb}_G(x)|$$

برهان. [۱] صفحه‌ی ۳۴. ■

واضح است که اگر گروه متناهیِ G بر مجموعه‌ی X عمل کند آنگاه به ازای هر x از X، مجموعه‌ی $\mathrm{Orb(x)}$ متناهی است و $|\mathrm{Orb(x)}| \;\Big|\; |\mathrm{G}|$.

۴.۲.۱ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه باشد و $U \leq G$. مرکزساز U در G یعنی مجموعه‌ی

$$C_G(U) = \{g \in G |\ ug = gu \quad \text{به ازای هر u از U}\}.$$

که آن را مختصراً با $C(U)$ نشان خواهیم داد.

۵.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H, K \leq G$. در این صورت

(i) $C(H) \leq N(H)$؛

(ii) اگر $H \leq K$، آنگاه $C_K(H) = C_G(H) \cap K$؛

(iii) $H \leq Z(G)$ اگر وتنها اگر $G = C_G(H)$؛

(iv) H آبلی است اگرو تنها اگر $H \leq C_G(H)$.

برهان. [١] صفحه‌ی ٣٧. ■

٦.٢.١ **لم.** فرض کنیم G گروهی متناهی مولد باشد که با k عضو تولید شود و $|G'| = m$. در این صورت $|G : Z(G)| \leq m^k$.

برهان. ابتدا گوییم اگر G گروهی باشد که G' متناهی بوده و $|G'| = m$، آنگاه هر عضو G حداکثر m مزدوج دارد. حال فرض می‌کنیم $G = \langle x_1, \cdots, x_k \rangle$. بنابراین $|G : C_G(x_i)| \leq m$. چون $Z(G) = \bigcap_{i=1}^{k} C_G(x_i)$، لذا خواهیم داشت:

$$|G : Z(G)| \leq \bigcap_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)| \leq m^k. \quad \blacksquare$$

٣.١ حاصلضرب مستقیم گروه‌ها و حاصلضرب مرکزی

١.٣.١ قضیه. فرض کنیم G_1 ، … ، G_n ، n گروه باشند و $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. در این صورت G زیرگروه‌هایی مانند H_1 ، … ، H_n دارد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \cong G_i$، و

(i) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \lhd G$؛

(ii) $G = H_1 \cdots H_n$؛

(iii) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$ ، $H_i \cap H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n = 1$.

برهان. [١] صفحه‌ی ١٠١. ■

٢.٣.١ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد، و G_1 ، … ، G_n زیرگروه‌هایی از آن باشند به طوری که

(i) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \lhd G$؛

(ii) $G = G_1 \cdots G_n$؛

(iii) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \cap G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_n = 1$.

در این صورت $G \cong G_1 \times \cdots \times G_n$.

برهان. [1] صفحه‌ی ۱۰۱. ■

۳.۳.۱ لم. فرض کنیم G_1 و G_2 دو گروه باشند و $H_1 \lhd G_1$ و $H_2 \lhd G_2$. در این صورت $\frac{G_1 \times G_2}{H_1 \times H_2} \cong \frac{G_1}{H_1} \times \frac{G_2}{H_2}$.

برهان. [1] صفحه‌ی ۱۲۰. ■

۴.۳.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد، و G_1 ، ... ، G_n زیرگروه‌هایی از G باشند. G را یک حاصلضرب مرکزی G_1 ، ... ، G_n می‌نامیم در صورتی که

(۱) $G = G_1 \ldots G_n$؛

(۲) به ازای هر i و j که $1 \leq i < j \leq n$، $[G_i, G_j] = 1$.

۵.۳.۱ تبصره. با نمادگذاری فوق خواهیم داشت:

(۱) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \lhd G$.

(۲) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $Z(G_i) \leq Z(G)$. بنابراین $Z(G) = Z(G_1) \ldots Z(G_n)$.

(۳) به ازای هر i و j که $1 \leq i < j \leq n$، $G_i \cap G_j \leq Z(G_i) \cap Z(G_j)$.

۶.۳.۱ لم. فرض کنیم G_1 ، ... ، G_n زیر گروه‌هایی از گروه G باشند، و $D = G_1 \times \cdots \times G_n$. در این صورت دو گزاره‌ی زیر هم‌ارزند.

(i) G حاصلضرب مرکزی گروه‌های G_1 ، ... ، G_n است.

(ii) یک بروریختی مانند $\varphi : D \longrightarrow G$ موجود است که $\bar{G}_i \varphi = G_i$ که در آن

$$\bar{G}_i = \{(1, 1, \ldots, , g_i, 1, \ldots, 1) | g_i \in G_i \qquad 1 \leq i \leq n\}.$$

برهان. [۱۵] صفحه‌ی ۱۳۷. ■

۷.۳.۱ لم. فرض G یک حاصلضرب مرکزی زیرگروه‌های G_1 ، ... ، G_n باشد و $N = N_1 \dots N_n$ که در آن به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$ ، $Z(G_i) \leq N_i \lhd G_i$. در این صورت

$$\frac{G}{N} = \frac{G_1 N}{N} \times \frac{G_2 N}{N} \times \cdots \times \frac{G_n N}{N} \cong \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2} \times \cdots \times \frac{G_n}{N_n}.$$

برهان. اثبات آسان است. ■

۸.۳.۱ تبصره. با مفروضات لم قبل، قرار می‌دهیم $N_i := Z(G_i)$. در این صورت داریم

$$\frac{G}{Z(G)} = \frac{G_1 Z(G)}{Z(G)} \times \frac{G_2 Z(G)}{Z(G)} \times \cdots \times \frac{G_n Z(G)}{Z(G)} \cong \frac{G_1}{Z(G_1)} \times \frac{G_2}{Z(G_2)} \times \cdots \times \frac{G_n}{Z(G_n)}.$$

۴.۱ p−گروه‌های متناهی و گروه‌های آبلی

۱.۴.۱ قضیه. فرض کنیم G یک p−گروه متناهی غیربدیهی باشد، و $N \lhd G$. در این صورت اگر $N \neq 1$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۰. ■

۲.۴.۱ قضیه. فرض کنیم G یک p−گروه متناهی غیربدیهی باشد، و $H \leq G$. در این صورت H زیرگروه ماکسیمال G است اگر وتنها اگر $H \lhd G$ و $|G/H| = p$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۱. ■

۳.۴.۱ لم. فرض کنیم G یک p−گروه متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت هرگاه G تنها یک زیرگروه ماکسیمال داشته باشد آنگاه G دوری است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۹۳. ■

۴.۴.۱ **لم.** فرض کنیم G یک p–گروه غیرآبلی از مرتبه‌ی p^3 باشد. دراین صورت $Z(G) = \Phi(G) = G' \cong C_p$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۹۳. ■

۵.۴.۱ **لم.** فرض کنیم G یک p–گروه متناهی غیرآبلی باشد. در این صورت هرگاه هر زیرگروه G نرمال باشد، آنگاه $p = 2$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۹۳. ■

۶.۴.۱ **تعریف.** p–گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی (یا مختصراً مقدماتی) می‌گوییم در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد. اگر $|G| = p^n$، آنگاه $G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n \rangle$، که در آن a_i ها اعضایی غیربدیهی از Gاند؛ و در نتیجه

$$G \cong \underbrace{C_p \times \cdots \times C_p}_{n}.$$

۷.۴.۱ **لم.** فرض کنیم G یک گروه متناهی غیرآبلی باشد، و p کوچکترین عدد طبیعی باشد که $p \,\big|\, |G|$. اگر H و K دو زیرگروه آبلی متمایز G باشند به طوری که $|G:H| = |G:K| = p$، آنگاه $G/Z(G) \cong C_p \times C_p$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۰. ■

۸.۴.۱ **لم.** اگر p–گروه متناهی غیر آبلی G دارای بیش از یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه G درست $p+1$ زیرگروه ماکسیمال آبلی دارد.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۰. ■

۹.۴.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. دراین صورت G به حاصلضرب مستقیم

زیرگروه‌های سیلویش تجزیه می‌شود، به عبارت دیگر، اگر $\{ p_1, \ldots, p_n \}$ مجموعه‌ی همه‌ی اعداد اولی باشد که در تجزیه‌ی $|G|$ ظاهر می‌شوند، و $G_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ آنگاه $G = G_1 \times \cdots \times G_n$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۶. ■

۱۰.۴.۱ قضیه. فرض کنیم G یک p–گروه آبلی متناهی غیربدیهی، و $a \in G$. در این صورت اگر مرتبه‌ی a از مرتبه‌ی هر عضو G ناکمتر باشد آنگاه G زیرگروهی مانند H دارد به طوری که $G = \langle a \rangle \times H$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۶. ■

۱۱.۴.۱ قضیه. فرض کنیم G یک p–گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروه‌های دوری غیربدیهی‌اش تجزیه می‌شود. به عبارت دیگر، G اعضایی غیربدیهی مانند a_1، …، a_n دارد به طوری که $G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n \rangle$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۷. ■

۱۲.۴.۱ قضیه. (یکتایی تجزیه در p–گروه‌های آبلی متناهی). فرض کنیم G یک p–گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت، G را به یک و تنها به یک صورت می‌توان به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروه‌های دوری غیربدیهی‌اش تجزیه کرد. به عبارت دیگر، اگر

$$G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_r \rangle$$

$$G = \langle b_1 \rangle \times \cdots \times \langle b_s \rangle$$

دو تجزیه‌ی G باشد که در آن $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s \in G$ و

$$|a_1| \geq \ldots \geq |a_r| > 1, \qquad |b_1| \geq \ldots \geq |b_s| > 1,$$

آنگاه $r = s$، و به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $\langle a_i \rangle \cong \langle b_i \rangle$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۹. ■

۱۳.۴.۱ قضیه. (قضیه اساسی گروه‌های آبلی متناهی). فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی

غیربدیهی باشد. در این صورت، G را می‌توان به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروه‌های دوری‌اش که مرتبه‌ی هر یک از آنها توان مثبتی از یک عدد اول است تجزیه کرد. به علاوه این تجزیه قطع‌نظر از ترتیب عوامل مستقیم (نسبت به یکریختی این عوامل) یکتاست.

۱۴.۴.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه آبلی، و m عددی طبیعی باشد. دراین صورت زیرگروه‌های G^m و G_m از G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G^m = \{g^m | g \in G\},$$
$$G_m = \{g | g^m = ۱\}.$$

۱۵.۴.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد، و $G = \langle a_۱ \rangle \times \cdots \times \langle a_r \rangle$ تجزیه‌ای از G (با فرض وجود) به حاصل‌ضرب مستقیم r زیرگروه دوری غیربدیهی G باشد در این صورت، به ازای هر عدد طبیعی مفروض m،

$$G^m = \langle {a_۱}^m \rangle \times \cdots \times \langle {a_r}^m \rangle.$$

به علاوه اگر G متناهی باشد، وبه ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$ ، $m|n_i$ که در آن $|a_i| = n_i$ آنگاه

$$G_m = \langle {a_۱}^{n_۱/m} \rangle \times \cdots \times \langle {a_r}^{n_r/m} \rangle;$$

بنابراین $|G_m| = m^r$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۲۸. ■

۱۶.۴.۱ تعریف. فرض کنیم $\mathbb{P}$ مجموعه‌ای از اعداد اول باشد. به ازای هر n از $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$\pi(n) := \{p \in \mathbb{P} |\ p \mid n\}.$$

اینک به ازای هر گروه متناهی G خواهیم داشت که

$$\pi(G) := \pi(|G|).$$

یک عضو x از G را $p-$عضو نامیم هرگاه $|x|$ توانی از p باشد.

۱۷.۴.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی آبلی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر دو به دو هم‌ارزند.

(i) G دوری است.

(ii) به ازای هر p از $\pi(G)$، G دقیقاً یک زیرگروه از مرتبه‌ی p دارد.

(iii) به ازای هر p از $\pi(G)$، $p-$زیرگروه سیلوی G دوری است.

برهان. [۹] صفحه‌ی ۴۶. ■

۱۸.۴.۱ قضیه. فرض کنیم G یک $p-$گروه متناهی باشد که فقط یک زیرگروه از مرتبه‌ی p دارد. در این صورت G دوری است یا $p = ۲$ و G گروه کواترنیون است.

برهان. [۹] صفحه‌ی ۱۱۴. ■

۱۹.۴.۱ **تعریف.** فرض کنیم K زیرگروه نرمالی از گروه G باشد. گوییم G بر K شکافته می‌شود، اگر زیرگروهی مانند H از G وجود داشته باشد به طوری که $G = HK$ و $H \cap K = ۱$. هرچنین زیرگروهی مانند H را یک متمم برای K در G می‌خوانیم.

۲۰.۴.۱ **لم.** فرض کنیم G یک گروه آبلی مقدماتی باشد. در این صورت اگر $N \leq G$، آنگاه N یک عامل مستقیم G است.

برهان. به وضوح $N \lhd G$. اینک اگر $G/N = ۱$، آنگاه $G = N$ و حکم برقرار است. حال اگر $G/N \neq ۱$، آنگاه G/N آبلی مقدماتی است. لذا اعضایی مانند $a_۱$، ...، a_n از G موجودند که $G/N = \langle Na_۱\rangle \times \cdots \times \langle Na_n\rangle$. در نتیجه $G = N \times \langle a_۱\rangle \times \cdots \times \langle a_n\rangle$. ■