بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

زیرگروههای باخاصیت نیمه پوشش متناهی

از

مرتضی حسین زاده

استاد راهنما

دکترمنصور هاشمی

بهمن 89

تقدیم به

پدر بزرگوار ومادر مهربان

تشکر وقدردانی

حمد وسپاس بی پایان خداوند متعال که توفیق انجام این پژوهش را به من ارزانی داشت. برخود لازم می دانم از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر منصور هاشمی که انجام این تحقیق بدون راهنمایی های علمی و مساعدت همه جانبه ایشان امکان پذیر نبود، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر ابراهیمی و جناب آقای دکتر درستکار که به عنوان داور، زحمت بازخوانی پایان نامه را به عهده داشته و نظرات ارزنده ای در هر چه بهتر شدن آن ارایه نموده اند سپاسگزارم.

در پایان از کلیه عزیزانی که به هر نحوی در جهت پیشبرد این پژوهش گام برداشته اند کمال تشکر و قدر دانی را داشته و موفقیت روز افزون این عزیزان را از خداوند منان خواستارم.

فهرست مطالب

چکیده:

عنوان پایان نامه: زیرگروههای باخاصیت نیمه پوشش متناهی

نگارنده: مرتضی حسین زاده

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد که $N \trianglelefteq G$ و M به طوری که $N \leq M$. گوییم زیرگروه H از G، عامل M/N را می پوشاند هرگاه $HM = HN$. همچنین گوییم H از عامل M/N اجتناب می کند هرگاه $H \cap N = H \cap M$.

در این پایان نامه چند نتیجه مهم درمورد زیرگروههایی که دارای خاصیت نیمه پوشش-اجتناب در گروه متناهی هستند، بدست می آوریم.

کلید واژه: خاصیت نیمه پوشش-اجتناب، زیرگروه فیتینگ، گروههای زبرحلپذیر

Abstract:

Title: some semi cover –avoiding finite subgroups
Author: Morteza Hossein Zadeh

Let M and N be normal subgroups of a group G with $N \leq M$. Then the quotient group M/N is called a normal factor of G. It is clearthat every chief factor of a group is a normal factor of the group. A subgroup H of G is said to cover M/N if HM = HN. On the other hand, if $H \cap M = H \cap N$, then H is said to avoid M/N.

In this thesis, some new results are obtained based on the assumption that some subgroups have the semi cover-avoiding property in the group.

Keywords: semi-cover-avoiding property, fitting subgroups, supersolvable groups

مقدمه:

در این پایان نامه قصد داریم زیرگروههایی از یک گروه متناهی را تعریف کنیم که دارای خاصیت نیمه پوشش- اجتناب می باشند. اولا یک زیرگروه با خاصیت مذکور، بر زیرگروههای نرمال یک گروه اثر می گذارد. همچنین به بررسی ارتباط این خاصیت با دیگر خواص گروه می پردازیم.

در فصل اول، به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز خواهیم پرداخت([2],[1]) .

در فصل دوم ساختار گروههای پوچتوان را بررسی می کنیم، که رابطه تنگاتنگی بین این رده از گروهها و خاصیت نیمه پوشش-اجتناب وجود دارد.

در فصل سوم، به بیان ساختار گروههای حلپذیر و زبرحلپذیر خواهیم پرداخت. و خواهیم گفت که یک گروه که دارای زیرگروه باخاصیت نیمه پوشش-اجتناب می باشد، در چه صورتی زبر حلپذیر است.

فصل چهارم، اختصاص به اثر خاصیت نیمه پوشش-اجتناب بر ساختار گروههای متناهی دارد.

در فصل، پنجم، زیرگروههای باخاصیت نیمه پوشش-اجتناب در گروههای p-پوچتوان را مورد مطالعه قرار می دهیم.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

1-1) p–گروه ها و قضایای سیلو

1-1-1 تعریف: فرض کنیم Gیک گروه، و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p-گروه می نامیم در صورتی که مرتبه هر عضو غیربدیهی G، توان مثبتی از p باشد. زیرگروه H از G را یک p-زیرگروه G گوییم در صورتی که H یک p-گروه باشد.

2-1-1 قضیه(کوشی): فرض کنیم $\boldsymbol{G}$ یک گروه متناهی باشد و $p\,|\,|\boldsymbol{G}|$، که در آن p یک عدد اول است. دراین صورت G عضوی از مرتبه p دارد.

3-1-1 نتیجه: اگر G یک p-گروه متناهی باشد آنگاه مرتبه G به صورت $\boldsymbol{p^n}$ است که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است.

4-1-1 تعریف: p-گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی می گوییم در صورتی که مرتبه هر عضو غیر بدیهی G عدد اول p باشد.

5-1-1 مثال: فرض کنیم $G=Z_{27}$ آنگاه داریم $G=Z_3\oplus Z_3\oplus Z_3$ که هرعضو G از مرتبه p می باشد، بنابراین G آبلی مقدماتی است.

6-1-1 تعریف: فرض کنیم G یک گروه و $X\neq\phi$ یک مجموعه باشد. گوییم G روی X عمل می کند هرگاه تابعی

مانند $\theta: X \times G \rightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که

1) به ازای هر x متعلق به X داریم $\theta(x, e) = x$.
2) به ازای هر x متعلق به X و به ازای هر g_1وg_2 متعلق به G داریم $\theta(\theta(x, g_1), g_2) = \theta(x, g_1 g_2)$.

قرار می دهیم $\theta(x, g)=xg$. بنابراین شرطهای بالا به شروط زیر تبدیل می شود

1) $\forall x \epsilon X ; xe = x$.
2) $x(g_1 g_2)=(xg_1)g_2 \quad \forall x \epsilon X , \forall g_1$ و $g_2 \epsilon G$.

7-1-1 تذکر: فرض کنیم G روی X عمل کند. رابطه هم ارزی ~ را روی X به صورت زیر تعریف می کنیم

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists g \epsilon G ;\ x_2 = x_1 g .$$

8-1-1 تعریف: با مفاهیم تذکر بالا مدار x را با علامت Orb(x) نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{Orb}(x)=\{y|y\sim x\} =\{y\epsilon X|\exists g\epsilon G ;\ y = xg\} = xG = \{xG|g\epsilon G\}.$$

9-1-1 قضیه: فرض کنیم G یک p-گروه متناهی غیر بدیهی باشد و $N \lhd \boldsymbol{G}$. در این صورت اگر $N \neq \mathbf{1}$ آنگاه $1 \neq N \cap \boldsymbol{Z(G)}$.

برهان.چون $N \lhd \boldsymbol{G}$، گروه G بر N با تزویج عمل می کند. بنابراین،

$$|\boldsymbol{N}| = \sum_{x\in \boldsymbol{X}} |\boldsymbol{Orb}(\boldsymbol{x})| = 1 + \sum_{x\in \boldsymbol{N}-\{\mathbf{1}\}} |\boldsymbol{Orb}(\boldsymbol{x})|.$$

حال گوییم چون $|\boldsymbol{Orb}(\boldsymbol{x})|$ توانی صحیح و نامنفی از P است و$p\,||\boldsymbol{N}|$، بنابر تساوی اخیر، طول یکی از G-مدارها باید برابر یک باشد. پس عضوی غیر بدیهی مانند $\boldsymbol{x_0}$ ازN هست به قسمی که $\mathrm{Orb}(\boldsymbol{x_0}) = \{\boldsymbol{x_0}\}$. از آنجا، به ازای هر g از G، $\boldsymbol{x_0}^{g} = \boldsymbol{x_0}$. یعنی $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{Z(G)} \cap \boldsymbol{N}$ و حکم ثابت می شود.

10-1-1 تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد، دراین صورت $H \le G$ را یک p-زیرگروه سیلوی G نامیم هرگاه

1) H یک p-زیرگروه G باشد.

2) اگر K یک p-زیرگروه G باشد به قسمی که $H \le K$ آنگاه $H = K$.

به عبارت دیگر یک p-زیرگروه ماکسیمال را یک p-زیرگروه سیلوی G می نامیم.

11-1-1 تذکر: فرض کنیم $|G|=p^n \times m$ که $(p, m)=1$. می توان نشان داد که H یک p-زیرگروه سیلوی G است اگروتنهااگر $|H|=p^n$.

12-1-1 قضیه اول سیلو: فرض کنیم G یک گروه باشد و $|G|=p^n \times m$ که $n\ge 1$ و $(p, m)=1$ در این صورت

به ازای هر $1\le i \le n$ گروه G دارای زیرگروهی مانند H_i است که $|H_i| =p^i$.

به ازای هر $1 \le i \le n$ گروه G دارای زیرگروه نرمالی مانند $\mathbf{K_i}$ است که $|\mathbf{K_i}| =p^{i+1}$ به طوری که $H_i \trianglelefteq \mathbf{K_i}$.

یعنی G دارای p-زیرگروه هایی به صورت زیر می باشد:

$$P_0 \trianglelefteq P_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq P_n$$

13-1-1 قضیه دوم سیلو: فرض کنیم G یک گروه باشد که $|G|= p^n \times m$ و $(p , m)=1$. در این صورت

1) هر دو p-زیرگروه سیلوی G مزدوجند.

2) اگر H یک p-زیرگروه سیلوی G باشد، آنگاه $H \trianglelefteq G$ است اگر و تنها اگر H تنها p-زیرگروه سیلوی G باشد.

برهان. فرض کنیم که p_1 و p_2 دو p-زیرگروه سیلوی G باشند. قرار می دهیم $R=\{p_1x \mid x\epsilon G\}$ و در نتیجه

$$p\nmid (G : p_1) = m$$

حال عمل p_2 روی R را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$R\times p_2 \longrightarrow R$$

$(p_1 x\ , g\ ) \longrightarrow p_1 x g$

$|R|=(G : p_1) \equiv |R_{p_2}|\ \ (\bmod p)$

$p \nmid (G : p_1) \Longrightarrow p \nmid |R_{p_2}|$

پس $\quad |R_{p_2}| \neq 0$.

وجود دارد $p_1 x$ متعلق به R به طوری که $p_1 x g = p_1 x$ (به ازای هر $g \in p_2$)

پس به ازای هر $g \in p_2$ ، $x g x^{-1} \in p_1$ و در نتیجه $x p_2 x^{-1} \subseteq p_1$. حال چون

$|x p_2 x^{-1}|=|p_2|=|p_1|=p^n$ بنابر این $p_1 = p_2^{x^{-1}}$.

برهان2) فرض کنیم H منحصر به فرد باشد. به ازای هر $g \in G$، H^g یک p-زیرگروه سیلوی G باشد. چون فقط یک p-زیرگروه دارد پس $H = H^g$ یعنی H نرمال است.

1-1-14 قضیه سوم سیلو: فرض کنیم G یک گروه باشد که $|G|=p^n \times m$ و $(p\ , m)\ =\ 1$. و فرض کنیم که L، برابر تعداد p-سیلوزیرگروه های G باشد، در این صورت

1) $L \mid |G|$؛

2) $L \equiv 1 (\bmod p)$.

1-1-15 قضیه(استدلال فراتینی): فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، و $H \lhd G$. در این صورت اگر P یک p-سیلو زیرگروه H باشد آنگاه: $\qquad G = N(P)H$.

برهان. فرض کنیم g عضو دلخواهی از G باشد.چون $P \leq H$ و $H \lhd G$، داریم $P^g \leq H^g = H$. حال بنابر قضیه دوم سیلو P و P^g دو p-زیرگروه سیلوی H اند. بنابر این در H مزدوجند. یعنی h ای از H است که $P^g=P^h$. از آنجا $P^{gh^{-1}}=P$. بنا بر این $gh^{-1} \in N(P)$؛ در نتیجه $G = N(P)H$.

16-1-1 قضیه: فرض کنیم G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. به علاوه فرض کنیم P یک p-زیرگروه سیلوی G و $N \lhd G$. در این صورت $P \cap N$ یک p-زیرگروه سیلوی N است.

برهان.گوییم چون $P \cap N$ یک p -زیرگروه سیلوی N است، $P \cap N$ جزء یک p-زیرگروه سیلوی N مانند $\boldsymbol{P_1}$ است. از طرفی، g ای از G هست که $\boldsymbol{P_1} \le \boldsymbol{P^g}$. در نتیجه $P \cap N \le \boldsymbol{P_1} \le \boldsymbol{P^g}$. بنابر این،

$$P \cap N \le \boldsymbol{P_1} \le \boldsymbol{P^g} \cap N = \boldsymbol{P^g} \cap \boldsymbol{N^g} = (\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{N})^g$$

زیرا $N \lhd \boldsymbol{G}$. ازآنجا نتیجه می شود که $P \cap N = \boldsymbol{P_1}$ و حکم ثابت می شود.

2-1) گروه های آبلی متناهی مولد

در این بخش به بیان و اثبات قضیه اساسی گروه های آبلی متناهی مولد می پردازیم. بر طبق این قضیه هر گروه آبلی متناهی مولد را می توان به یک و تنها یک صورت به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیر گروه های دوری غیر بدیهی اش تجزیه کرد. موضوع را با تعریف زیر آغاز می کنیم.

1-2-1 تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد.

گروه G را تابدار گویند هرگاه مرتبه هر عضو آن متناهی باشد. همچنین گروه G را بی تاب گویند هرگاه مرتبه هر عضو غیر بدیهی آن نا متناهی باشد.

مثلا هر گروه متناهی تابدار است ولی Z یک گروه بی تاب می باشد.

2-2-1 قضیه: فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد غیر بدیهی باشد. در این صورت اگر G بی تاب باشد آنگاه G را می توان به حاصلضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیر گروه های دوری غیر بدیهی اش تجزیه کرد.

برهان. فرض کنیم r کوچکترین عددی طبیعی باشد که G با r عضو تولید شود.فرض کنیم $G=\langle \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r} \rangle$ که درآن

a_i ها اعضایی غیر بدیهی از G اند. ثابت می کنیم $G = \langle a_1\rangle \times \ldots \times \langle a_r\rangle$. چون a_i ها G را تولید می کنند، کافی است ثابت کنیم که اگر $a_1^{m_1} \ldots a_r^{m_r} =1$ ، که در آن m_i ها اعدادی صحیح اند آنگاه به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، $a_i^{m_i} =1$. بنا بر این حد اقل یکی از m_i ها ناصفر است. میدانیم G مجموعه مولدی مانند $\{b_1 \ldots b_r\}$ دارد به طوری که به ازای عدد صحیح نا صفری مانند n، $b_r^n=1$. حال گوییم چون G بی تاب است، $b_r =1$. از اینجا نتیجه میشود که G با b_1 ، ... b_r تولید می شود که متناقض با انتخاب r است.

3-2-1 قضیه: فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد غیر بدیهی باشد. در این صورت اگر G بی تاب باشد و

$$G= \langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_r\rangle \quad :(1)$$

$$G= \langle b_1 \rangle \times \ldots \times \langle b_s\rangle \quad :(2)$$

دو تجزیه G به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیر گروه های دوری غیر بدیهی اش باشد آنگاه $r = s$، و به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ داریم: $\langle b_i\rangle \cong \langle a_i\rangle$.

برهان. فرض می کنیم $N=G^2$، و گروه G/N را در نظر می گیریم، چون هر عضو G به صورت $a_1^{k_1} \ldots a_r^{k_r}$ است که در آن k_i ها اعدادی صحیح اند، هر عضو G/N را می توان به صورت $N\, a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_r^{\varepsilon_r}$ نوشت که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq r$، $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$، ثابت می کنیم که چنین اعضایی دو به دو متمایزند. فرض کنیم

$$N\, a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_r^{\varepsilon_r} = N\, a_1^{\delta_1} \ldots a_r^{\delta_r}$$

که در آن به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$، ثابت می کنیم که چنین اعضایی دو به دو متمایزند. فرض کنیم δ_i و $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. از آنجا خواهیم داشت $a_1^{\varepsilon_1-\delta_1} \ldots a_r^{\varepsilon_r-\delta_r} \in N$ بنابراین $a_1^{\varepsilon_1-\delta_1} \ldots a_r^{\varepsilon_r-\delta_r}= x^2$ که در آن $x \in G$. اینک با فرض $x= a_1^{m_1} \ldots a_r^{m_r}$ که در آن m_i ها اعداد صحیح اند. از تساوی اخیر، با توجه به تجزیه (1)، معلوم می شود که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، $\frac{a_i^{\varepsilon_i}}{a_i^{\alpha_i}}=a_i a_i^{2m_i}$. حال چون مرتبه هر a_i نا متناهی است، $\varepsilon_i - \delta_i = 2m_i$ ، و در نتیجه به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $\varepsilon_i = \delta_i$. از بحثی که گذشت به آسانی می توان دید که $|G/N|=2^r$. حال از تجزیه (2)، به طور مشابه، نتیجه می شود که $|G/N|=2^s$. پس r=s و حکم ثابت

می شود.

1-2-4 لم: فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد باشد. در این صورت G زیر گروه بی تابی مانند S دارد به طوری که $G = T(G) \times S$. که در آن $T(G)$ عناصر تابدار G می باشد.

1-2-5 لم: فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد باشد و $G = K \times R$ که در آن $\boldsymbol{K \leq G}$ وR. در این صورت، اگر K تابدار وR بی تاب باشد آنگاه $K = T(G)$.

برهان. فرض کنیم $g \in T(G)$ و $g=xy$، که در آ ن $x \in K$ و $y \in R$. از g^{-1} $y=\boldsymbol{x}^{-1}$ معلوم می شود که مرتبه y متناهی است. بنا بر این $y=1$، ودر نتیجه $g=x$. پس $T(G) \leq \boldsymbol{K}$. از طرفی چون $K \leq T(G)$، حکم ثابت می شود.

1-2-6 قضیه (قضیه اساسی گروه های آبلی متناهی مولد): فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد غیر بدیهی باشد. در این صورت G را می توان به حاصلضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیر گروه های دوری اش که مرتبه هر یک از آنها نامتناهی یا توان مثبتی از یک عدد اول است تجزیه کرد. به علاوه این تجزیه قطع نظر از ترتیب عوامل مستقیم (نسبت به یکریختی این عوامل) یکتاست.

برهان. به موجب لم 1-2-4، G زیر گروه بی تابی مانند S دارد که $G=T(G) \times \boldsymbol{S}$. اگر $S=1$ یا $T(G)=1$ آنگاه حکم نتیجه می شود. فرض کنیم $S \neq \boldsymbol{1}$ و $T(G) \neq 1$. اینک وجود تجزیه به سهولت از قضیه 1-2-2 ثابت می شود. برای اثبات یکتایی فرض می کنیم $G = \boldsymbol{K_1} \times \boldsymbol{R_1}$ و $G = \boldsymbol{K_2} \times \boldsymbol{R_2}$ دو تجزیه G باشد که در آن هر یک از $\boldsymbol{K_1}$ و $\boldsymbol{K_2}$ حاصلضربی از گروه های دوری Gاند. که مرتبه هر کدام از آنها توان مثبتی از یک عدد اول است و هر یک از $\boldsymbol{R_1}$ و $\boldsymbol{R_2}$ حاصلضربی از زیر گروه های دوری G اند که مرتبه هر کدام از آنها نا متناهی است واز لم قبلی معلوم می شود که $\boldsymbol{K_1} = \boldsymbol{K_2} = \boldsymbol{T(G)}$. واضح است که $\boldsymbol{G/T(G)} \cong \boldsymbol{R_1}$. با به کار بستن قضیه 1-2-3 ، خواهیم داشت

$$r(\boldsymbol{R_1})=r(R_2)$$

3-1) سری اصلی

دراین بخش به ذکر چند نتیجه بنیادی می پردازیم که در بررسی زنجیرهایی از زیرگروه های نرمال یک گروه، موردنیاز است.

1-3-1 تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد، یک سری زیر نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه های G مانند $1 = \boldsymbol{G_0} \leq \boldsymbol{G_1} \leq \ldots \leq \boldsymbol{G_r} = \mathbf{G}$ به طوری که به ازای هرi که $1\leq \boldsymbol{i} \leq n$، $\boldsymbol{G_{i-1}} \trianglelefteq \boldsymbol{G_i}$. در این صورت، گاهی از اوقات سری زیر نرمال فوق را به صورت زیر هم نشان می دهند:

$$1 = \boldsymbol{G_0} \trianglelefteq \boldsymbol{G_1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \boldsymbol{G_r} = \mathrm{G}$$

2-3-1 تعریف: : فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیر گروه های نرمال G مانند

$$1 = \boldsymbol{G_0} \leq \boldsymbol{G_1} \leq \ldots \leq \boldsymbol{G_r} = \mathrm{G}.$$

در هر دو تعریف فوق، هر $\boldsymbol{G_i}$ را یک جمله سری و r را طول سری می نامند. معلوم است که هر سری به طول r دارای r+1 جمله است. واضح است که هری سری نرمال یک سری زیر نرمال است.

3-3-1 مثال: فرض کنیم $\mathrm{G}=\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x^2} = \boldsymbol{y^4} = (\boldsymbol{xy})^2 = \mathbf{1} \rangle$، می دانیم $\mathrm{G} \cong \boldsymbol{D_8}$. هر یک از سری های زیر، یک سری زیر نرمال G است:

$$1 \lhd \langle \boldsymbol{y^2} \rangle \lhd \langle \boldsymbol{y} \rangle \lhd \mathrm{G}$$

$$1 \lhd \langle x \rangle \lhd \langle x, y^2 \rangle \lhd G$$

4-3-1 تعریف: فرض کنیم

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G \qquad (1)$$

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_s = G \qquad (2)$$

دو سری زیر نرمال G باشند. در این صورت سری (2) را یک تظریف زیر نرمال سری (1) می نامند در صورتی که هر جمله سری (1) جمله ای از سری (2) باشد. به همین قیاس اگر (1) و (2) سری های نرمال G باشند، دومی را یک تظریف نرمال سری اول نامند در صورتی که هر جمله سری (1) جمله ای از سری (2) باشد.

5-3-1 تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت سری نرمال

$$1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_r = G$$

را یک سری اصلی G می نامیم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، G هیچ زیر گروه نرمالی مانند N_i نداشته باشد به طوری که $G_{i-1} < N_i < G_i$. هر گروه خارج قسمتی G_i / G_{i-1} را یک عامل اصلی G می نامند.

هر گروه متناهی دارای یک سری اصلی است. بعضی از گروه ها فاقد سری اصلی اند. مثلا گروه دوری نامتناهی سری اصلی ندارد.

6-3-1 تعریف: فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه G باشد. گوییم H یک زیرگروه مشخصه G است هرگاه به ازای هر ϕ متعلق به Aut(G) داشته باشیم $\phi(H) = H$. واضح است که هر زیرگروه مشخصه یک زیرگروه نرمال می باشد.

7-3-1 تعریف: گروه غیر بدیهی G را مشخصا ساده گوییم در صورتی که زیرگروههای مشخصه آن 1 و G باشند.

1-3-8 قضیه: فرض کنیم گروه G دارای یک سری اصلی باشد. در این صورت عامل های اصلی G به طور مشخص ساده اند.

برهان. فرض کنیم $G_r = G > \dots > G_1 > G_0 = 1$ یک سری اصلی G باشد. عدد طبیعی i را دلخواه درنظر می گیریم به طوری که $1 \leq i \leq r$ و فرض می کنیم K/G_{i-1} یک زیرگروه مشخص G_i/G_{i-1} باشد. گوییم چون $G_i/G_{i-1} \lhd G/G_{i-1}$ ، خواهیم داشت $K/G_{i-1} \lhd G/G_{i-1}$ ؛و در نتیجه $K \lhd G$. حال از $G_{i-1} < N_i < G_i$، نتیجه می شود که $K = G_i$ یا $K = G_{i-1}$. بنابراین زیرگروه های مشخص G_i/G_{i-1} بدیهی یا غیر واقعی اند. حال بنا بر قضیه یکتایی تجزیه در گروه های آبلی متناهی اثبات کامل است.