دانشگاه الزهرا(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک

عنوان

اثرات مرز در نظریه میدان های کوانتومی

استاد راهنما

دکتر کامران کاویانی

دانشجو

راضیه ضامنی

شهریور ماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

کلیه دستاوردهای ناشی از پژوهش فوق متعلق به دانشگاه الزهراء (س) می باشد.

دانشگاه الزهرا(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک

عنوان

اثرات مرز در نظریه میدان های کوانتومی

استاد راهنما

دکتر کامران کاویانی

استاد مشاور

دکتر فاطمه شهشهانی

دانشجو

راضیه ضامنی

شهریور ماه ۱۳۸۹

عاشقانه و از صمیم قلب تقدیم به

دو گوهر یکتای زندگی

پدر دلسوز

و

مادر نازنینم

که در تمام مدت انجام این پایان نامه مرا یاری نمودند.

قدردانی

یگانه معبود هستی، با کمال لطف و بخشش و تمام مهربانی و سخاوتش بنده حقیر خویش را در مسیر تکامل نهاد و به او این مجال را عنایت کرد تا با علم خود قدم در راه سعادت و خودکفایی نهد. به درستی که ستایش از آن اوست، او که معین و مبین است. سجده کنم بر خاکش و بنازم معبودم را که تمسک بر او پیروزی در هر کاری است.

در ادامه جا دارد از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر کامران کاویانی در مقام استاد راهنما تشکر کنم. بی گمان حصول نتیجه در رسیدن بدین درجه مقدور نمی گشت مگر با مساعدت و هدایت ایشان.

چکیده

در این پایان نامه به بررسی نظریه میدان کوانتومی در یک فضای مرزدار با شرایط مرزی متناوب می پردازیم، با این فرض که ذراتی که در یک جعبه محدود زندگی می کنند به وسیله عملگرهای خلق و فنای مربوط به نوسانگر هماهنگ روی دایره، خلق و نابود می شوند. خواهیم دید که اثرات اعمال مرز در نظریه میدان کوانتومی روی ذرات مختلف یکسان نیست که ما در اینجا این اثر را برای ذرات بوزونی و فرمیونی و البته برای دو نظریه خاص $\phi^۴$ و یوکاوا بدست خواهیم آورد و در نهایت قوانین فاینمن را که با اعمال مرز تغییر کرده اند پیدا می کنیم.

فهرست مندرجات

فصل اوّل

نظریه میدان های کوانتومی و میدان کلین-گوردن[1]

در این پایان نامه قصد داریم به محاسبه سطح مقطع در یک فضای جدید بپردازیم و به این منظور به مقدماتی از نظریه میدان نیاز داریم، در نتیجه در سه فصل اول به بیان این مقدمات می پردازیم و از فصل چهارم به بعد از این مطالب استفاده می کنیم[1].

می دانیم که نظریه میدان های کوانتومی زمانی متولد شد که مکانیک کوانتومی از مواجهه با نسبیت خاص بازماند. مکانیک کوانتوم با نسبیت خاص ناسازگار بود و بنابراین برای مطالعه رفتار ذرات بنیادی و برهم کنش های بین آنها به جای مکانیک کوانتومی از نظریه میدان های کوانتومی استفاده شد. در این فصل ابتدا مرور کوتاهی بر پیدایش نظریه میدان های کوانتومی خواهیم داشت و پس از آن به بررسی معادله کلین-گوردن می پردازیم.

---
[1] *Klein-Gordon*

۱-۱ معادلات حرکت نسبیتی در مکانیک کوانتومی و معادله کلین-گوردن

در مکانیک کوانتومی برای یافتن تابع حالت یک سیستم کوانتـومی از معادله شرودینگر استفاده می کنیم، اما معادله شرودینگر که آن را معـادله حرکت سیستم می نامیم با استفاده از اصل تطابق و از روی رابـطه غیر نسبیتی $E = T+V$ برای انـرژی بدست می آید. بنابـراین جواب های این معادله نمی تواند توصیف گر یک سیستم کوانتومی نسبیتی باشد، پس ما نیاز داریم که مکانیک کوانتومی را نسبیتی کنیم و در این فرآیند اصول را تغییر نمی دهیم بلکه تنها معادله حرکتی را بدست می آوریم که با استفاده از اصل تطابق با معادلات نسبیتی سازگار باشد. چنین معادله حرکتی منحصر به فرد نیست و ساده ترین شکل آن معادله ای است که معادله کلین-گوردن نام دارد.

بـرای بدست آوردن معـادله کلین گـوردن از رابطه انـرژی شروع می کنیم. می دانیم که در سیستم های نسبیتی رابطه انرژی به صورت زیر است[۱]:

$$E^2 = p^2 + m^2 \qquad (۱-۱)$$

با جایگزینی عملگرهای $i\frac{\partial}{\partial t}$ و $-i\vec{\nabla}$ به جای E و p در این معادله و با در نظر گرفتن ϕ به عنوان تابع حالت داریم:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = o \qquad (۲-۱)$$

که در آن تکرار اندیس به معنی جمع است و منظور از ∂_μ چنین است:

$$\partial_\circ \equiv \frac{\partial}{\partial x^\circ} \ , \qquad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$$

و همچنین برای این عملگر داریم:

$$\partial^\circ = \partial_\circ \ , \qquad \partial^i = -\partial_i$$

این معادله که تحت تبدیلات لورنتس ناورداست، معادله کلین-گوردن نامیده می شود. در این معادله m جرم ذره و تابع $\phi(\vec{x},t)$ تابع اطلاعـات ذره است که آنـچه در مورد مکـان ذره، اندازه

---

[۱] در دستگاه واحدهای طبیعی که درکل این پایان نامه از آن استفاده می کنیم $\hbar = c = ۱$ است.در این دستگاه

$$[\text{طول}] = [\text{زمان}] = [\text{انرژی}]^{-1} = [\text{جرم}]^{-1}$$

حرکت ذره و ... را بخواهیم به ما می دهد. اما اگر با دید ذره ای به این معادله نگاه کنیم به اشکـالاتی بر می خوریـم، از جمله اینـکه با انـرژی و چگـالی احتمال منفی بـرای ذره روبرو می شویم و عـلاوه بر آن با تـوصیف ذره ای نمی توان خـلق ذرات و ضد ذرات را که در طبیعت مشاهده می شوند، توجیه کرد. بنابراین به جای اینکه $\phi(\vec{x},t)$ را (در معادله کلین-گوردن) یک تابع اطلاعات توصیفگر ذره بنامیم آن را به عنوان یک میدان معرفی می کنیم. وقتی می گوییم میدان منظورمان این است که به هر نقطه از فضا (منظور فضا- زمان چهار بعدی مینکوفسکی است) یک عدد نسبت می دهیم. چنین میدانی یک میدان اسکالر است. واضح است که اگر شکـل صریح $\phi(\vec{x},t)$ را بر حسب t و $\vec{x}$ داشتیـم می توانستیم مقدار ϕ را در هر نقطه از فضا – زمان پیدا کنیم اما در اینجا تنها معـادله دیفرانسیلی را داریم که ϕ در آن صدق می کند، پس قدم بعدی حل این معادله دیفرانسیل و یافتن ϕ (میدان کلین-گوردن) است. اما مفید است که قبل از آن اطلاعاتی در مورد لاگرانژی و هامیلتونی میدان کلین-گوردن بدست آوریم.

۱-۲ لاگرانژی و هامیلتونی میدان کلین-گوردن

همانطور که از مکانیک کلاسیک می دانیم کنش ، S ، به صورت انتگرال زمانی لاگرانژی تعریف می شود :

$$S = \int L\, dt \qquad (۳-۱)$$

از طرفی لاگرانژی می تواند به صورت انتگرال چگالی لاگرانژی که با $\mathcal{L}$ نشان داده می شود و تابعی از میدان $\phi(\vec{x},t)$ و مشتقات آن است، نوشته شود:

$$L = \int \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right) d^3x \qquad (۴-۱)$$

همانطور که گفته شد در این معادله L لاگرانژی و $\mathcal{L}$ چگالی لاگرانژی است، اما از این پس $\mathcal{L}$ را همان لاگرانژی می نامیم. بنابراین می توان کنش را به صورت زیر نوشت:

$$S = \int \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right) d^4x \qquad (۵-۱)$$

بنابراین δS به شکل زیر در می آید:

$$\delta S=\int d^{۴}x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\big(\partial_\mu\phi\big)\right\}$$

$$=\int d^{۴}x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta\phi-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)\right\}$$

$$=\int d^{۴}x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right\}\delta\phi+\int\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)d^{۴}x$$

جمله آخر تبدیل به انتگرال سطحی روی مرزها می شود که صفر است و از طرف دیگر با توجه به اصل کمترین کنش[۱] $\delta S=o$ است، بنابراین

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=o \qquad (۶-۱)$$

که این همان معادله اویلر لاگرانژ است. اینک با استفاده از این معادله لاگرانژی میدان کلین-گوردن را بدست می آوریم:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi+m^{۲}\phi=o \quad\Rightarrow\quad \partial_\mu(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)+m^{۲}\phi=o$$

از مقایسه معادله فوق با معادله اویلر لاگرانژ می بینیم که:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=-m^{۲}\phi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

بنابراین لاگرانژی برای میدان کلین-گوردن به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L}=\frac{۱}{۲}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi-\frac{۱}{۲}m^{۲}\phi^{۲} \qquad (۷-۱)$$

حالا که لاگرانژی میدان کلین-گوردن را داریم پیدا کردن هامیلتونی کار ساده ای است. هامیلتونی به صورت زیر تعریف می شود :

[۱] اصل کمترین کنش بیان می کند که وقتی سیستمی از یک حالت اولیه در زمان $t_{۱}$ به یک حالت نهایی در زمان $t_{۲}$ می رود، مسیری را طی می کند که در آن S ، اکسترمم (اغلب مینیمم) باشد.

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L \qquad (۸-۱)$$

که در آن $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$. توجه کنید که هـامیلتونی به همان صورتـی که در مکانیـک کلاسیک داشتیم نوشته شده است با این فرق که چون در اینجا میدان داریم ϕ جای x_i را می گیرد. اما از طرفی $L = \int \mathcal{L}\, d^۳x$ بنابراین $p = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \int \mathcal{L}\, d^۳x = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} d^۳x$ که اصطلاحاً به $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ مومنتوم مزدوج میدان ϕ می گویند و آن را با π نشان می دهند (البته در اصل π دانسیته مومنتوم مزدوج میدان است، اما معمولا در نظریه میدان همان مومنتوم مزدوج میدان نامیده می شود) در این صورت هامیلتونی به شکل زیر خواهد بود:

$$H = \int d^۳\, x\big(\pi(\vec{x})\dot{\phi}(\vec{x}) - \mathcal{L}\big) = \int d^۳x\, \mathcal{H} \qquad (۹-۱)$$

و برای میدان کلین-گوردن

$$H = \int d^۳x \left\{\frac{۱}{۲}\pi^۲ + \frac{۱}{۲}\big(\vec{\nabla}\phi\big)^۲ + m^۲\phi^۲\right\} \qquad (۱۰-۱)$$

اهمیت پیدا کردن هامیلتونی در این است که در اینجا هم مانند مکانیک کلاسیک اطلاعات مربوط به تحول زمانی سیستم در H قرار دارد.

۱-۳ کوانتش میدان کلین-گوردن

بحث در مورد کوانتــش میدان را با مقدمـاتی از مکـانیک کوانتومی آغاز می کنیم. همانطور کـه می دانیم دو کمیت ناسازگار کمیاتی هستند که جابجـاگر عملگرهای متناظر آن ها صفر نمی شود و ایـن یعنی نمی توان این دو کـمیت را با هم اندازه گیـری کرد. وقتی صحبت از اندازه گیری هم زمـان دو کـمیت به میان می آید ناگـزیر به یاد اصـل عدم قـطعیت هـایزنبرگ می افتیم. در واقع این اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بود که بیان می کرد اطلاع داشتن از دو کمیت ناسازگار به صورت هم زمان غیر ممکن است، که آن را برای دو کمیت ناسازگار A و B به صورت $\Delta A\, \Delta B \geq \frac{۱}{۲}|\langle[A,B]\rangle|$ نشان می دادیم. مثـلاً در مـورد دو کمیت مکـان x و اندازه حرکت $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ داشتیم :

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i \qquad (۱۱-۱)$$

و بنابراین $\Delta x\, \Delta p \geq \frac{۱}{۲}$ که این رابطه به ما می گفت که در یک نقطه معین از فضا- زمان مؤلفه x مکان و اندازه حرکت p_x را هم زمان نمی توان اندازه گیری کرد.

حال همین بحث را در مورد میدان ها مطرح می کنیم. فرض می کنیم که یک میدان اسکالر $\phi(\vec{x})$ داریم که از معادله کلین-گوردن تبعیت می کند. اینک دو نفر می خواهند در یک زمان معین یکی در نقطه $\vec{x}$ و دیگری در نقطه $\vec{y}$ روی میدان ϕ اندازه گیری انجام دهند. چون این عمل هم زمان انجام می شود اندازه گیری در نقطه $\vec{x}$ روی اندازه گیری در نقطه $\vec{y}$ اثری نخواهد داشت، اما اگر این کار با اختلاف زمانی انجام شود و این اختلاف زمانی آنقدر باشد که اطلاعات مربوط به اختلال در اثر اندازه گیری در نقطه $\vec{x}$ به نقطه $\vec{y}$ برسد آنگاه شخص اندازه گیر در نقطه $\vec{y}$ اطلاعات مختل شده ای را در اختیار خواهد داشت. بنابراین رابطه ای شبیه رابطه جابجایی مکان و مومنتوم برای میدان ها نیز خواهیم داشت. برای نوشتن این رابطه جابجایی ابتدا باید به میدان ϕ یک عملگر $\hat{\phi}$ نسبت دهیم، همانطور که به x مکانیک کلاسیک یک عملگر مکان $\hat{x}$ نسبت دادیم. همچنین به همان صورت که عملگر اندازه حرکت را به صورت $\hat{p}_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ نوشتیم عملگر مومنتوم میدان را به صورت $\hat{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ خواهیم داشت و از آنجایی که در یک زمان معین اگر $\vec{x} \neq \vec{y}$ باشد دو اندازه گیری بر هم اثری ندارند، رابطه جابجایی به صورت زیر در خواهد آمد :

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\delta^{۳}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] = [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = o \qquad (۱۲-۱)$$

در واقع در اینجا میدان را کوانتیزه کرده ایم. که به این مطلب گاهی کوانتش دوم[۱] نیز می گویند.(کوانتش اول کوانتیزه کردن مکان و مومنتوم است که در رابطه (۱ – ۱۱) نشان داده شده است) .

---

[۱] *second quantization*

۱-۴ حل معادله کلین-گوردن و یافتن میدان ϕ

حالا که میدان کلین-گوردن را کوانتیزه کردیم به عنوان مرحله بعدی معادله کلین-گوردن را حل می کنیم. برای حل این معادله و پیدا کردن تابع حالت ϕ از تبدیل فوریه استفاده می کنیم :

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}.\vec{x}}\, \phi(\vec{p},t) \qquad (۱-۱۳)$$

که با جاگذاری آن در معادله کلین-گوردن به رابطه زیر می رسیم:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\vec{p}|^2 + m^2\right] \phi(\vec{p},t) = 0 \qquad (۱-۱۴)$$

که این همان معادله حرکت برای نوسانگر هماهنگ ساده با فرکانس $\omega_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ است، که هامیلتونی به شکل زیر دارد:

$$H_{SHO} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 \qquad (۱-۱۵)$$

از مکانیک کوانتومی می دانیم که برای پیدا کردن مقادیر ویژه هامیلتونی، باید ϕ و p را بر حسب عملگرهای نردبانی بنویسیم:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \qquad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \qquad (۱-۱۶)$$

بنابراین برای یک زمان مشخص مثلاً $t = 0$ داریم:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}.\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}.\vec{x}}\right) \qquad (۱-۱۷)$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}.\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}.\vec{x}}\right) \qquad (۱-۱۸)$$

نکته ای که قابل توجه است این است که در اینجا هر مد فوریه یک نوسانگر مستقل با a و $a^\dagger$ مربوط به خودش است. با این نتیجه برای ϕ و π و با استفاده از رابطه جابجایی (۱ – ۱۲) خواهیم داشت :

$$\left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^{\dagger}\right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \qquad (1-19)$$

و با استفاده از روابط $(1-10)$ ، $(1-17)$ و $(1-18)$ هامیلتونی برحسب عملگرهای خلق و فنا به صورت زیر در می آید:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \left[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^{\dagger} \right] \right) \qquad (1-20)$$

جمله دوم که در هامیلتونی نمایان شده برابر است با $\delta(o)$ ،که یک مقدار نامتناهی است. خوشبختانه این مقدار نامتناهی برای انـرژی به صورت تجربی مشاهده نشده است، چون چیزی که در آزمایش اندازه گیری می شود اختلاف انرژی از انرژی حالت پایه است، بنابراین به راحتی می توان از این مقدار بینهایت چشمپوشی کرد. با در دست داشتن هامیلتونی برحسب عملگرهای a و $a^{\dagger}$ به دست آوردن روابط زیر کار ساده ای است :

$$\left[H, a_{\vec{p}}^{\dagger}\right] = \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^{\dagger} \qquad \left[H, a_{\vec{p}}\right] = -\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \qquad (1-21)$$

قدم بعدی به دست آوردن عملگر اندازه حرکت کل به صورت زیر است :

$$\hat{\vec{P}} = -\int d^3x \ \pi(\vec{x}) \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ \vec{p} \ a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} \qquad (1-22)$$

حال یک حالت $|o\rangle$ در نظر می گیریـم به طوری که $a_{\vec{p}}|o\rangle = o$ ، که به ازای هر $\vec{p}$ برقرار است. به این حالت که برای آن $H|o\rangle = o$ حالت پایه یا خلأ می گوییم. در واقع خلأ حالتی است با کمترین انـرژی که در اینجـا کـمترین انرژی مقدارش صفر است. بقیه ویژه حالت ها را می توان با اثر دادن یک عملگر خلق کننده روی حالت $|o\rangle$ بدست آورد. اگر اثر هامیلتونی را روی حالت $a_{\vec{p}}^{\dagger}|o\rangle$ بدست آوریم خواهیم دید که مقدار ویژه ای برابر با $\omega_{\vec{p}}$ خواهد داشت که نشان می دهد انرژی سیستم $\omega_{\vec{p}}$ است (در دستگاه واحدهای طبیعی $E_{\vec{p}} = \omega_{\vec{p}}$) . برای اندازه حرکت نیز داریم:

$$\hat{\vec{P}} \left(a_{\vec{p}}^{\dagger}|o\rangle \right) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \ \vec{p}' a_{\vec{p}'}^{\dagger} a_{\vec{p}'} \left(a_{\vec{p}}^{\dagger}|o\rangle \right) = \vec{p} \ a_{\vec{p}}^{\dagger}|o\rangle \qquad (1-23)$$

و از آنجایی که رابطه $\vec{p}$ و $\omega_{\vec{p}}$ به صورت $\omega_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ است می توان $a_{\vec{p}}^{\dagger}|o\rangle$ را معرف ذره ای با اندازه حرکت $\vec{p}$ و انرژی $\omega_{\vec{p}}$ دانست. به سادگی می توان دید که انرژی سیستمی با

بردار حالت $a_{\vec{p}}^{\dagger}a_{\vec{q}}^{\dagger}\dots|o\rangle$ برابر با $\omega_{\vec{p}}+\omega_{\vec{q}}+\cdots$ و اندازه حرکت آن $\vec{p}+\vec{q}+\cdots$ می باشد که معنای آن یک سیستم چند ذره ای با ذراتی به انرژی $\omega_{\vec{p}}$ و $\omega_{\vec{q}}$ و ... و اندازه حرکت $\vec{p}$ و $\vec{q}$ و ... می باشد. بنابراین بردارهای فضای برداری که $\hat{\phi}$ روی آنها اثر می کند به نحوی معرف تعدادی ذره با اندازه حرکت و انرژی مشخص اند. اینک در نظـر بگیـرید بردار $|\vec{p}\rangle$ را که معرف حالت ذره ای با اندازه حرکت $\vec{p}$ و انرژی $\omega_{\vec{p}}$ باشد. واضح است که $|\vec{p}\rangle\propto a_{\vec{p}}^{\dagger}|o\rangle$. ضریب تناسب را با استفاده از شرط نرمالیزاسیون بـدست می آوریم. ابتدا بـردار خلأ را چنان می گـیریم کـه $\langle o|o\rangle=۱$ ، سپـس به سراغ $\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle$ می رویم. چون می خواهیم $|\vec{p}\rangle$ و $|\vec{q}\rangle$ از هم مستقل باشند، حاصـل ضرب داخلی را چنان انتـخاب می کنیم که در صورتی که $\vec{p}\neq\vec{q}$ این دو بردار حالت بر یکـدیگر عمود باشند. یعنی :

$$\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle=o\qquad\qquad\vec{p}\neq\vec{q}$$

لذا طبیعی ترین حدس برای $\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle$ به صورت زیر است :

$$\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle=۲E_{\vec{p}}(۲\pi)^{۳}\delta^{(۳)}(\vec{p}-\vec{q})\qquad(۲۴-۱)$$

که اضافه شدن ضریب $E_{\vec{p}}$ در آن برای این است که رابطه ناوردای لورنتسی باشد.

با اطلاعاتی که تا اینـجا کسب کرده ایم در مرحله ای هستیم که بتوانیم تحول زمانی میدان کلین-گوردن را بدست آوریم. تا زمانی که در چارچوب مکانیک کوانتومی بودیم و $\phi(\vec{x})$ یک بردار در فضای هیلبرت بود، تحول زمانی میدان توسط عملگر e^{-iHt} که در آن H هامیلتونی سیستم است، به صورت زیر بدست می آمد :

$$\phi(x)=\phi(\vec{x},t)=e^{-iHt}\phi(\vec{x})$$

اما از هنگامی که با $\phi(\vec{x})$ به عنوان یک عملگر برخورد می کنیم باید تحول زمانی آن را به صورت زیر در نظر بگیریم :

$$\hat{\phi}(x)=\hat{\phi}(\vec{x},t)=e^{iHt}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-iHt}\qquad(۲۵-۱)$$

به طور مشابه برای π داریم $\pi(x)=\pi(\vec{x},t)$. از طرفی از معادله حرکت هایزنبرگ به صورت

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O}=[\mathcal{O},H]\qquad(۲۶-۱)$$

برای میدان کلین-گوردن داریم :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t)=\left[\phi(\vec{x},t),\int d^{۳}x'\left\{\frac{۱}{۲}\pi^{۲}(\vec{x}',t)+\frac{۱}{۲}\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}m^{۲}\phi^{۲}(\vec{x},t)\right\}\right]$$

$$=\int d^{۳}x'\left(i\delta^{(۳)}(\vec{x}-\vec{x}')\pi(\vec{x}',t)\right)$$

$$=i\pi(\vec{x},t)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\pi(\vec{x},t)=\left[\pi(\vec{x},t),\int d^{۳}x'\left\{\frac{۱}{۲}\pi^{۲}(\vec{x}',t)+\frac{۱}{۲}\phi(\vec{x}',t)\left(-\vec{\nabla}^{۲}+m^{۲}\right)\phi(\vec{x}',t)\right\}\right]$$

$$=\int d^{۳}x'\left(-i\delta^{(۳)}(\vec{x}-\vec{x}')\left(-\vec{\nabla}^{۲}+m^{۲}\right)\phi(\vec{x}',t)\right)$$

$$=-i\left(-\vec{\nabla}^{۲}+m^{۲}\right)\phi(\vec{x},t)$$

با استفاده از دو رابطه فوق بدست می آید :

$$\frac{\partial^{۲}}{\partial t^{۲}}\phi=\left(\vec{\nabla}^{۲}-m^{۲}\right)\phi \qquad (۲۷-۱)$$

که همان معـادله کلین-گوردن است. یعنی معـادله حرکت هایـزنبرگ در این حـالت به معـادله کلین-گوردن منجر می شود. در نهایت با استفاده از رابطه (۱ − ۲۵) تابعیت صریح زمانی ϕ و π به شکل زیر خواهد بود :

$$\phi(\vec{x},t)=\int\frac{d^{۳}p}{(۲\pi)^{۳}}\frac{۱}{\sqrt{۲E_{\vec{p}}}}\left(a_{\vec{p}}e^{-ip.x}+a_{\vec{p}}^{\dagger}e^{ip.x}\right)\Big|_{p^{o}=E_{\vec{p}}}$$

$$\pi(\vec{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) \qquad (۲۸-۱)$$

۱-۵ انتشارگر کلین-گوردن

در ابتدای این بخش به تعبیر حالت $\phi(\vec{x})|o\rangle$ می پردازیم و سپس انتشارگر کلین-گوردن را معرفی می کنیم. دیدیم که :

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^۳p}{(۲\pi)^۳} \frac{۱}{\sqrt{۲E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}.\vec{x}} + a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i\vec{p}.\vec{x}} \right)$$

بنابراین

$$\phi(\vec{x})|o\rangle = \int \frac{d^۳p}{(۲\pi)^۳} \frac{۱}{\sqrt{۲E_{\vec{p}}}} e^{-i\vec{p}.\vec{x}} a_{\vec{p}}^{\dagger} |o\rangle = \int \frac{d^۳p}{(۲\pi)^۳} \frac{۱}{۲E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}.\vec{x}} |\vec{p}\rangle \qquad (۲۹-۱)$$

این رابـطه می گوید که $\phi(\vec{x})|o\rangle$ حالتی است که می تـوان آن را بـرحسب حالت های تک ذره ای $|\vec{p}\rangle$ با اندازه حرکت های مشخص، به صورت خطی بسط داد. اما در مکانیک کوانتومی دیده بودیم که تابع حالت ذره ای که در مکان $\vec{x}$ متمرکز گردیده به صورت زیر است :

$$|\vec{x}\rangle = \int \frac{d^۳p}{(۲\pi)^۳} e^{-i\vec{p}.\vec{x}} |\vec{p}\rangle$$

که این رابطه خیلی شبیه رابطه ای است که برای $\phi(\vec{x})|o\rangle$ بدست آورده ایم و صرفاً یک ضریب $\frac{۱}{۲E_{\vec{p}}}$ با آن اختلاف دارد و در واقع در حد غیر نسبیتی داریم : ثابت $= \frac{۱}{۲m} \approx \frac{۱}{۲E_{\vec{p}}}$.
بنابراین در حد غیر نسبیتی آنچه که برای $\phi(\vec{x})|o\rangle$ بدست آوردیم (جدا از یک ثابت) همان است که برای $|\vec{x}\rangle$ داریم. بنابراین به تبعیت از مکانیک کوانتومی این تعبیر را برای $\phi(\vec{x})|o\rangle$ ارائه می دهیم که $\phi(\vec{x})|o\rangle$ معرف ذره ای در نقطه $\vec{x}$ است، یا به عبارت بهتر $\phi(\vec{x})$ در نقطه $\vec{x}$ ذره ای را از خلأ خلق می کند. بنابراین دامنه احتمال آنکه میدان $\phi(\vec{x})$ ذره ای با اندازه حرکت $\vec{p}$ را در نقطه $\vec{x}$ از خلأ خلق کند برابر است با :

$$\langle o|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle = \langle o| \int \frac{d^۳p'}{(۲\pi)^۳} \frac{۱}{\sqrt{۲E_{\vec{p}'}}} \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'.\vec{x}} + a_{\vec{p}'}^{\dagger} e^{-i\vec{p}'.\vec{x}} \right) \sqrt{۲E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{\dagger} |o\rangle$$

$$= e^{i\vec{p}.\vec{x}} \qquad (۳۰-۱)$$

که این رابطه یادآور رابطه $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}.\vec{x}}$ در مکانیک کوانتومی است. حال که معنای $\phi(\vec{x})|o\rangle$ را فهمیدیم به بررسی مفهوم عبارت $\langle o|\phi(x)\phi(y)|o\rangle$ می پردازیم :