بسم الله الرحمن الرحیم

# حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **ریاضی محض** گرایش **جبر** است که در بهمن ۱۳۹۱ در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر محمد بازیار** و مشاورهٔ **دکتر احسان ممتحن** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

**دانشکده علوم**

**گروه ریاضی**


**پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر**

# عدد تحمیل کننده خطی برای مدول‌ها


استاد راهنما

**دکتر محمد بازیار**

پژوهشگر

**نوشین رنجبر**


بهمن ۱۳۹۱

دانشگاه یاسوج

# عدد تحمیل کننده خطی برای مدول‌ها

## به وسیلهٔ

**نوشین رنجبر**

## پایان نامه

**ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد**

## در رشتهٔ:

## ریاضی محض

در تاریخ ................ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ ............. به تصویب نهایی رسید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱- استاد راهنما: | دکتر محمد بازیار | با مرتبهٔ علمی استادیار | امضاء |
| ۲- استاد مشاور: | دکتر احسان ممتحن | با مرتبهٔ علمی استادیار | امضاء |
| ۳- استاد داور داخل گروه: | دکتر علی طاهری فر | با مرتبهٔ علمی استادیار | امضاء |
| ۴- استاد داور خارج گروه: | دکتر حبیب شریف | با مرتبهٔ علمی استاد | امضاء |
| ۵- نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه: | دکتر زهرا رفیعی | با مرتبهٔ علمی استادیار | امضاء |

تقدیم به:

پدر و مادرم خوبم

و

همسرم یاور همیشگی ام

# قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و ریاضی را آفرید تا شاید عقل آدمی کمی از این دنیای فانی فاصله بگیرد که

*آدمی در عالم فانی نمی آید به دست　　عالمی دیگر بباید ساخت وز نو آدمی*

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد بازیار، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر احسان ممتحن که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم دکتر مهدی شریف‌زاده به پاس عاطفه سرشار و وجود پر ثمرشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

نوشین رنجبر

بهمن ۱۳۹۱

## چکیده

ایده عدد تحمیل کننده خطی روی مدولها از آنجایی پدید آمد که این سوال مطرح شد که چه زمانی یک تابع همگن تبدیل به یک همریختی مدولی می‌شود و سپس مجموعه تمام توابع همگن از یک مدول به خودش را $\mathcal{M}_R(V)$ نامیدند و در حقیقت این سوال مطرح بود که چه زمانی تساوی $\mathcal{M}_R(V) = \mathrm{End}(V)$ برقرار می‌شود. در مراحل بعدی این نتیجه حاصل شد که تنها کافیست موضوع را روی زیرمدول‌های یک مدول بررسی کرد و اینکار اکثر اوقات بسیار آسان‌تر از بررسی کل عناصر مدول اساسی است.

بنابراین عدد تحمیل کننده خطی یک نوع اندازه‌گیری است که نشان می‌دهد که چه مقدار خطی بودن موضعی لازم است تا خطی بودن عمومی نتیجه شود.

در این پایان‌نامه ابتدا یک تاریخچه کامل از کارهایی که از سال ۱۹۹۹ الی ۲۰۱۰ بر روی عدد تحمیل کننده خطی انجام شده ارائه می‌دهیم و در واقع یک دسته بندی جامع در مورد عدد تحمیل کننده خطی انجام می‌دهیم. سپس بعضی از مهمترین این مقالات، که اهمیت ویژه‌ای دارد، را مورد بررسی کامل قرار می‌دهیم.

# فهرست مطالب

# فهرست علائم اختصاری

| | |
|---|---|
| عدد تحمیل کنندهٔ خطی برای مدول $V$ | $\mathrm{fln}(V)$ |
| رسته تمام $R$-مدولها | $R - Mod$ |
| $X - \{0\}$ | $X^*$ |
| پوچساز مدول $V$ روی حلقهٔ $R$ | $\mathrm{Ann}_R(V)$ |
| زیرمدول تکین $V$ | $Z(V)$ |
| مجموعه تمام همریختی‌ها روی $R$-مدول $V$ | $\mathrm{End}_R(V)$ |
| مجموعه تمام نگاشت‌های همگن روی $R$-مدول $V$ | $\mathcal{M}_R(v)$ |
| هستهٔ همریختی $f$ | $\ker(f)$ |

# فصل ۱

# نظریه عدد تحمیل کننده خطی

در این فصل ابتدا تاریخچه‌ای از عدد تحمیل کنندهٔ خطی و مراحل ایجاد و گسترش آن‌را بیان می‌کنیم و سپس به تعریف عدد تحمیل کنندهٔ خطی می‌پردازیم.
برای آشنایی با تعاریف مقدماتی همچون حلقه، ایده‌آل، مدول و زیرمدول به کتاب جبر هانگرفورد[۱] [۱] مراجعه کنید.

## ۱-۱ تاریخچه‌ای از پیدایش و گسترش نظریهٔ عدد تحمیل کنندهٔ خطی

اگر $V$ یک $R$-مدول باشد، همریختی مدولی $f : V \longrightarrow V$ برای $r \in R$ و $v, v_۱, v_۲ \in V$ با دو شرط زیر بیان می‌شود،

$$
\begin{aligned}
f(rv) &= rf(v) && (۱)\\
f(v_۱ + v_۲) &= f(v_۱) + f(v_۲) && (۲)
\end{aligned}
$$

[۱] Hungerford

به نگاشتی که شرط (۱) در مورد آن برقرار باشد یک تابع همگن و اگر شرط (۲) را دارا باشد یک تابع خطی می‌گویند.
حال این سوال پیش می‌آید که اگر تنها شرط نخست برای یک نگاشت برقرار باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟
در مقالات و کتب بسیاری این موضوع که مجموعهٔ توابع همگن بر روی یک مدول لزوماً یک حلقه نیست و یک حلقه‌واره (حلقه‌ای که خاصیت جابه‌جایی جمع را ندارد و خاصیت پخشی ضرب روی جمع آن یک‌طرفه است) است، بیان شده بود و این سوال مطرح بود که "این حلقه‌واره تحت چه شرایطی خود یک حلقه می‌شود؟".
پیشنهاد محاسبهٔ عدد تحمیل کنندهٔ خطی ابتدا توسط لازلو فوکس[۲] با طرح این سوال که " آیا اندازهٔ مطمئنی وجود دارد که معین کند چقدر یک تابع همگن از خطی بودن دور است" مطرح شد.
در سال ۱۹۹۱ این موضوع بدواً در مقاله‌ای تحت عنوان "در مورد حلقه‌هایی که نگاشت‌های همگن روی آنها خطی هستند[۱۳]" توسط فوکس و مکسون [۳] بررسی شد.
پس از آن در سال ۱۹۹۷ مکسون مقاله‌ای تحت عنوان "چه زمانی درون‌ریختی‌های موضعی سرتاسری می‌شوند[۱۸]" را به طبع رسانید. یک سال بعد مکسون به همراه مِروی [۴] کار را با چاپ مقاله‌ای تحت عنوان "حلقه‌های توابع همگن[۱۵]" ادامه دادند.
تا آن زمان نامی برای این ایده در نظر گرفته نشده بود.
در سال ۲۰۰۰ برای نخستین بار مفهوم "عدد تحمیل کننده خطی" در مقاله‌ای با همین نام[۴] توسط مکسون متولد گردید. در همین مقاله این عدد برای فضاهای برداری و همچنین برای مدول‌ها روی دامنهٔ صحیح و مدول‌ها روی حلقه‌های موضعی که دامنهٔ صحیح نباشند، محاسبه شد.
از سال ۲۰۰۰ میلادی به بعد کارهای زیادی در رابطه با عدد تحمیل کنندهٔ خطی انجام شد که در اینجا تنها تعدادی از مهمترین آنها را ذکر می‌کنیم.
در سال ۲۰۰۱ در مقاله‌ای تحت عنوان "عدد تحمیل کنندهٔ خطی برای مدول‌های انژکتیو

[۲] Laszlo Fuchs
[۳] P.Fuchs & C.J.Maxson
[۴] A.B.van der Merwe

روی دامنه‌های ایده‌آل اصلی[۶]” توسط کروزر [۵] و مکسون کار محاسبهٔ عدد تحمیل کنندهٔ خطی ادامه یافت و در همان سال تحقیقاتی نیز بر روی مدول‌های تصویری[۹] انجام گرفت.
در سال ۲۰۰۲ مدول‌های روی حلقه‌های دارای خودتوان‌های نابدیهی[۸] توسط مکسون و مروی بررسی شدند و سه سال بعد در سال ۲۰۰۵ مدول‌های متناهیاً تولید شده[۵] کاملاً مورد مطالعه قرار گرفتند.
در سال ۲۰۰۶ سانوانگ [۶] بر روی عدد تحمیل کنندهٔ خطی برای مدول‌های ضربی[۷] کار کرد.
هم اکنون نیز چند سوال بی‌جواب در زمینهٔ عدد تحمیل کنندهٔ خطی وجود دارد که مجالی برای تحقیقات بیشتر در این زمینه را فراهم می‌کند.

## ۱–۲ تعریف عدد تحمیل کنندهٔ خطی

فرض کنید $R$ یک حلقه و $V$ یک $R$–مدول باشد. $\mathcal{M}_R(V)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{M}_R(V) = \{f : V \to V | f(rv) = rf(v) \quad \forall r \in R, \forall v \in V\}$$

که مجموعهٔ تمام توابع همگن روی $V$ می‌باشد.
همچنین $\mathrm{End}_R(V)$ را که حلقه $R$–همریختی‌های $V$ نامیده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathrm{End}_R(V) =$$
$$\{f : V \to V | f \in \mathcal{M}_R(V) \text{ و } f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \;\; \forall v_1, v_2 \in V\}$$

کلاسهای زیادی از مدول‌ها هستند که برای آنها داریم $\mathrm{End}_R(V) = \mathcal{M}_R(V)$. به عنوان مثال، اگر $R$ یک حلقه ماتریسی کامل از اندازه حداقل دو روی حلقهٔ دلخواه $S$ ($M_2(S)$) و $V$ یک $R$–مدول دلخواه باشد، یک نتیجه جالب به دست می‌آید و آن این است که

[۵] A.Kreuze
[۶] J.Sanwong

$\mathcal{M}_R(V) = \mathrm{End}_R(V)$. به این معنی که هر تابع همگن روی $V$، خطی است. (در فصل آخر مثالی از این مورد همراه با اثبات آمده است.)

به عبارت دیگر، کلاس‌های زیادی از حلقه‌ها وجود دارند که در آنها $\mathcal{M}_R(V) = \mathrm{End}_R(V)$.
بنابراین به یک مساله می‌رسیم که مشخص کردن این است که چه تعداد از زیر مدول‌های $V$ خاصیت خطی را دارند.

می‌گوییم یک مجموعه ناتهی $\mathcal{C} = \{C_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ از زیر مدول‌های سرهٔ $V$ خطی بودن را تحمیل می‌کند، اگر برای $f \in \mathcal{M}_R(V)$ که $f$ روی هر $C_\alpha \in \mathcal{C}$ خطی باشد، آن‌گاه $f \in \mathrm{End}_R(V)$.

**تعریف ۱-۲-۱.** عدد تحمیل کننده خطی مدول ${}_RV$، که با $\mathrm{fln}({}_RV)$ و یا برای سادگی با $\mathrm{fln}(V)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از یک عدد صحیح نامنفی، یا $\infty$، که به صورت یکتایی به شکل زیر محاسبه می‌شود،

الف) اگر $\mathcal{M}_R(V) = \mathrm{End}_R(V)$ آن‌گاه $\mathrm{fln}({}_RV) = 0$؛

ب) اگر $\mathcal{M}_R(V) \neq \mathrm{End}_R(V)$ آن‌گاه اگر یک مجموعهٔ متناهی $\mathcal{C}$ از زیر مدول‌های سره $V$ وجود داشته باشد، مثلاً $|\mathcal{C}| = s$، که خطی بودن را ایجاب کند، و هیچ گردایهٔ $\mathcal{C}'$ از زیر مدول‌های سرهٔ $V$ که $|\mathcal{C}'| < s$ خطی بودن را ایجاب نکند، آن‌گاه $\mathrm{fln}({}_RV) = s$؛

ج) اگر هیچکدام از (الف) و (ب) برقرار نباشد، آن‌گاه $\mathrm{fln}({}_RV) = \infty$؛

# فصل ۲

# مروری بر تحقیقات انجام شده

در این فصل مهمترین تحقیقاتی را که از ابتدای ایجاد نظریه عدد تحمیل کنندهٔ خطی تا کنون در این زمینه انجام شده را جهت روشن شدن موضوع مورد بررسی قرار می‌دهیم.
یادآوری می‌کنیم که $R$-مدول $V$ *دوری* نامیده می‌شود هرگاه یک $v \in V$ وجود داشته باشد که $V = Rv$. به عنوان مثال $۲\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول دوری است،
همچنین $V$ *موضعاً دوری* نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو عنصر دلخواه $x$ و $y$ در $V$ یک $a \in V$ وجود داشته باشد که $x, y \in Ra$. به عنوان مثال هر مدول دوری موضعاً دوری است.

گزارهٔ زیر در اکثر بخشهای این فصل پر کاربرد است، بنابراین در همین ابتدای فصل آنرا بیان می‌کنیم،

**گزاره ۲-۰-۲.** *اگر $V$ یک $R$-مدول دوری باشد، آن‌گاه داریم $\mathcal{M}_R(V) = \mathrm{End}_R(V)$ و بنابراین هر زیر مدول آن تحمیل کنندهٔ خطی است.*

***برهان.*** اگر $V$ دوری باشد، یک $v \in V$ وجود دارد که $V = Rv$. بنابراین برای هر $x, y \in V$، $r_۱, r_۲ \in R$ چنان وجود دارند که $x = r_۱v$ و $y = r_۲v$. و اگر $f \in \mathcal{M}_R(V)$ دلخواه باشد، داریم:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(r_۱v + r_۲v) = f((r_۱ + r_۲)v) = (r_۱ + r_۲)f(v) \\ &= r_۱f(v) + r_۲f(v) = f(r_۱v) + f(r_۲v) = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

و بنابراین $f$ روی $V$ خطی است. $\square$

از آنجایی که مدول‌ها تعمیمی از فضاهای برداری هستند، پس بررسی عدد تحمیل کنندهٔ خطی برای فضاهای برداری در ابتدا طبیعی به نظر می‌رسد.

## ۲–۱ عدد تحمیل کنندهٔ خطی برای فضاهای برداری

می‌دانیم که اگر حلقهٔ $R$ میدان باشد به $R$–مدول $V$ یک *فضای برداری* و به زیرمدول‌های آن *زیرفضا* می‌گویند، همچنین اگر بعد فضای برداری $q < \infty$ باشد، زیرفضایی را که بعد آن $q - ۱$ باشد، *ابرصفحه* نامند.

در این بخش تنها یک قضیهٔ مهم می‌آوریم که در ساختن مثال‌ها بسیار کاربردی می‌باشد.

**قضیه ۲–۱–۱.** *فرض کنیم $F$ یک میدان و $V$ یک فضای برداری روی $F$ باشد. داریم،*

*الف)* $\dim_F V = ۱$ *اگر و تنها اگر* $\text{fln}(V) = ۰$.

*ب)* *اگر* $\dim_F V = ۲$، *آن‌گاه* $\text{fln}(V) = \infty$.

*ج)* *اگر $F$ یک میدان نامتناهی باشد و* $\dim_F V > ۱$، *در این صورت* $\text{fln}(V) = \infty$.

*د)* *اگر* $|F| = q < \infty$ *، که در آن $q$ توانی از یک عدد اول باشد و* $\dim_F V > ۲$، *آن‌گاه* $\text{fln}(V) = q + ۲$.

***برهان.*** الف) اگر $\dim_F V = ۱$، نتیجه با توجه به گزاره (۲–۰–۲) واضح است، زیرا هر فضای برداری از بعد یک، در حقیقت یک $F$–مدول دوری است. برعکس فرض کنیم $\text{fln}(V) = ۰$، در این صورت هر تابع همگن روی $V$ خطی است.

اما اگر فرض کنیم $\dim_F(V) \neq ۱$، می‌توان تابعی ساخت که روی $V$ همگن باشد، ولی خطی نباشد.

زیرا اگر فرضاً $\dim_F V = ۲$ و یا $V \cong F \oplus F$، می‌توان $f : F \oplus F \longrightarrow F \oplus F$ را

به صورت زیر تعریف کرد،

$$f(x,y)=\begin{cases}(x,0), & y\neq 0\\ (0,0), & y=0\end{cases} \qquad (۲-۱)$$

در این صورت $f\in\mathcal{M}_F(V)$ اما $f$ روی $V$ خطی نیست،
زیرا اگر برای $x,y\neq 0$، $X=(x,y), Y=(0,-y)$ و $r\in F$ را در نظر بگیریم، داریم،

$$f(r(x,y))=f(rx,ry)=rf(x,y)$$

اما

$$\begin{aligned}(0,0) &= f(x,0)=f((x,y)+(0,-y))=f(X+Y)\\ &\neq f(X)+f(Y)=f(x,y)+f(0,-y)=(x,0)\end{aligned}$$

ب) اگر $\dim_F V=2$ و یا $V\cong F^2$، آن‌گاه $\mathrm{fln}(V)=\infty$. زیرا مجموعهٔ

$$\mathcal{M}_F(V)\setminus\mathrm{End}_F(V)$$

(بر اساس مثال بند الف) مخالف تهی است. همچنین هیچ گردایه‌ای از زیرفضاهای سرهٔ $V$ تحمیل کنندهٔ خطی نیست، زیرا هرگاه تابع دلخواه

$$f\in\mathcal{M}_F(V)\setminus\mathrm{End}_F(V)$$

را در نظر بگیریم، این تابع روی تمام زیرفضاهای سرهٔ $V$ خطی است (زیرا هر زیرفضای سرهٔ $V$ از بعد یک است و بر اساس قسمت الف) هر تابع همگن روی فضای یک بعدی خطی است)، اما لزوماً روی $V$ خطی نیست.

ج) اگر $F$ یک میدان نامتناهی باشد و $\dim_F V>1$، در این صورت هیچ گردایهٔ متناهی از زیرفضاهای $V$ نمی‌تواند $V$ را بپوشاند و بنابراین اگر

$$\varphi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

که در آن $W_\alpha$ زیرفضای $V$ باشد و $\mathcal{A}$ یک مجموعه اندیس دلخواه باشد ، $\varphi$ تحمیل کنندهٔ خطی نیست زیرا تابع $f : V \longrightarrow V$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$f(v) = \begin{cases} v, & v \in \cup W_\alpha \\ \circ, & \text{در غیر صورت این} \end{cases}$$

دقت کنید که $f \neq \circ$ و برای $r \in F$ داریم،

$$v \in \cup_\alpha W_\alpha \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad rv \in \cup_\alpha W_\alpha$$

و بنابراین برای هر $v \in V$، $f(rv) = rf(v)$ و این نتیجه می‌دهد که $f \in \mathcal{M}_F(V)$ و $f$ روی هر $W_\alpha$ در $\varphi$ خطی است. اما $f$ روی $V$ خطی نیست زیرا اگر $\circ \neq x \in W_\alpha$ و $\circ \neq y \notin \cup_\alpha W_\alpha$ را در نظر بگیریم، یا $x + y \in \cup_\alpha W_\alpha$ و یا $x + y \notin \cup_\alpha W_\alpha$ که در هر دو صورت داریم $f(x+y) \neq f(x) + f(y) = x$.

د) بر اساس قضیهٔ ۹.۳ از منبع [۴] داریم اگر $|F| = q$ هر $q + ۲$ ابرصفحه‌ای که فضای برداری $V = F^m$ (برای $m \geq ۳$) است را می‌پوشانند، تحمیل کنندهٔ خطی روی $V$ هستند و هیچ $q + ۱$ ابرصفحه تحمیل کنندهٔ خطی نیستند. همچنین در قضیهٔ ۱۰.۳ از منبع [۴] ثابت شده است که اگر $V$ یک فضای برداری از بعد $m \geq ۳$ روی میدان $F$ با $|F| = q$ باشد، $\operatorname{fln}(V) = q + ۲$. $\square$

مثالی مربوط به موضوع این بخش را می‌توانید در فصل پایانی ملاحظه کنید.

## ۲-۲ عدد تحمیل کنندهٔ خطی برای مدول‌ها روی حلقه‌های تجزیه‌پذیر

مطالب این بخش با استفاده از مقاله‌ای تحت عنوان "عدد تحمیل کنندهٔ خطی برای مدول‌های تصویری" اثر مکسون [۹] تدوین شده است.

در این بخش فرض بر این است که کلیهٔ حلقه‌ها یکدار هستند.

مجموعهٔ تمام $R$-مدول‌های چپ را با $\mathrm{R-Mod}$ نمایش می‌دهیم.
یادآوری می‌شود، اگر $R$ یک حلقهٔ یکدار دلخواه باشد و $V \in \mathrm{R-Mod}$، *پوچساز* $V$ *در* $R$، که با $\mathrm{Ann}_R(V)$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ کلیهٔ عناصری از $R$ هستند که حاصلضرب آنها در $V$ صفر می‌شود و اگر $\mathrm{Ann}_R(V) = \{0\}$، $V$ را *وفادار* می‌نامند.
به عنوان مثال اگر $R = \mathbb{Z}$ و $V = \mathbb{Z}_2$، در این صورت $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2) = 2\mathbb{Z}$ و بنابراین $V$ یک $R$-مدول وفادار نیست.
اما اگر $R = \mathbb{Z}_2$ و $V = \mathbb{Z}_2$ در این صورت $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2) = \{0\}$ و بنابراین $V$ یک $R$-مدول وفادار می‌باشد.

می‌دانیم که $\mathcal{M}_R(V) = \mathcal{M}_{R/\mathrm{Ann}(V)}(V)$ و بنابراین بدون از دست دادن کلیت موضوع در این بخش فرض می‌کنیم $V$ یک $R$-مدول وفادار است.

می‌دانیم ایده‌آل سرهٔ $M$ از $R$ *ماکسیمال* نامیده می‌شود هرگاه بین $M$ و $R$ ایده‌آل دیگری نباشد،
همچنین ایده‌آل‌های $L_1$ و $L_2$ از $R$، *هم-ماکسیمال* هستند هرگاه $L_1 + L_2 = R$. به عنوان مثال ایده‌آل‌های $2\mathbb{Z}_6$ و $3\mathbb{Z}_6$ در حلقهٔ $\mathbb{Z}_6$ هم-ماکسیمال هستند.

**قضیه ۲-۲-۱.** *اگر $R$ یک حلقهٔ دارای ایده‌آل‌های چپ هم-ماکسیمال $L_1$ و $L_2$ و $V$ یک $R$-مدول باشد، به‌طوری‌که برای $i = 1, 2$، $L_iV \subsetneq V$ باشد، آن‌گاه داریم* $\mathrm{fln}(V) \leq 2$.

***برهان.*** مجموعهٔ $\{L_1V, L_2V\}$ تحمیل کنندهٔ خطی است، زیرا داریم $L_1 + L_2 = R$ و بنابراین $l_1 \in L_1$ و $l_2 \in L_2$ چنان وجود دارد که $l_1 + l_2 = 1$. حال اگر $f \in \mathcal{M}_R(V)$ روی $L_1V$ و $L_2V$ خطی باشد، برای هر $x, y \in V$، چون $f$ روی $L_1V$ و $L_2V$ خطی است، داریم:

$$l_1 f(x+y) = f(l_1(x+y)) = f(l_1x) + f(l_1y) = l_1 f(x) + l_1 f(y)$$

و
$$l_2 f(x+y) = f(l_2(x+y)) = f(l_2x) + f(l_2y) = l_2 f(x) + l_2 f(y)$$

و با جمع دو رابطهٔ بالا خواهیم داشت $f(x+y) = f(x) + f(y)$، پس $\mathrm{fln}(V) \leq 2$. □

حلقهٔ $R$ را موضعی نامیم هر گاه یک ایده‌آل ماکسیمال یکتا داشته باشد.

**نتیجه ۲-۲-۲.** *حال به عنوان یک نتیجه می‌توان گفت اگر $R$ حلقه‌ای جابه‌جایی و $V$ یک $R$-مدول دلخواه باشد، اگر $R$ موضعی نباشد، در این صورت دارای ایده‌آل‌های ماکسیمال $I_2 \neq I_1$ است، حال اگر $I_1V \neq V \neq I_2V$، بر اساس قضیهٔ فوق داریم* $\mathrm{fln}(V) \leq 2$.

**تعریف ۲-۲-۳.** برای $V \in \mathrm{R-Mod}$ تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{Z}(V) := \{r \in R | rv = 0 \quad , \quad 0 \neq v \in V \text{ برای}\}$$

اگر $V$ آزاد باشد، آن‌گاه $\mathcal{Z}(V) = \mathcal{Z}(R)$، که $\mathcal{Z}(R)$ همان مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ $R$ است.

همچنین مجموعهٔ عناصر یکه $R$ را با $\mathcal{U}(R)$ نشان می‌دهیم.

**قضیه ۲-۲-۴.** *اگر یک* $d \in (R \setminus \mathcal{U}(R)) \setminus \mathcal{Z}(V)$ *چنان وجود داشته باشد که در آن* $(Rd)V \subsetneq V$، *در این صورت* $\mathrm{fln}(V) \leq 1$.

***برهان.*** زیرمدول $(Rd)V$ تحمیل کنندهٔ خطی می‌باشد، زیرا اگر فرض کنیم $x, y \in V$ دلخواه باشند، داریم،

$$df(x+y) = f(d(x+y)) = f(dx+dy) = f(dx) + f(dy) = d(f(x) + f(y))$$

و چون

$$d \in (R \setminus \mathcal{U}(R)) \setminus \mathcal{Z}(V)$$

بنابراین می‌توان آنرا از دو طرف معادله فوق حذف کرد و نتیجه حاصل می‌شود. □

یاد آوری می‌کنیم که عنصر $x$ از حلقهٔ $R$ را *خودتوان* گوییم هرگاه $x^2 = x$. همچنین حلقهٔ $R$ را *تجزیه‌ناپذیر* گوییم، هرگاه نتوان آنرا بصورت حاصلجمع مستقیم زیرحلقه‌های سره‌اش نوشت و در غیر این صورت $R$ را *تجزیه‌پذیر* نامیم.