بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

محاسبه $S-$ انحنای فضای راندرز همگن

نگارش

سمیرادلاور

استاد راهنما

دکتر حمید رضا سلیمی مقدم

استاد مشاور

آقای سید رضا موسوی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به ...

تقدیم به همسر عزیزم که با عشقش مراهمراهی، و باگذشت وصبرش به من فداکاری آموخت .

و تقدیم به پدرم , بزرگ معلم زندگیم که شهامت را به من آموخت و مادرم که وجودش برایم همه صبر است و وجودم برایش همه رنج , توانش رفت تا به توانایی برسم , مویش سپیدی گرفت تا روی سپید بمانم . او که فروغ نگاهش , گرمی کلامش و روشنایی رویش سرمایه زندگانی من است . در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مالامال از عشق و محبت, بر دستانش بوسه می زنم .

تشکر و قدردانی

نخست بر خود می دانم که پروردگار خود را شکر گویم به پاس لبخندهای محبت بار، دستان یاری رسان، عشق و محبت و همه آنچه را که از رحمت او دریافت کرده ام و از او می خواهم که لیاقت تشکر از استاد را بر من ارزانی کند که

قدر استاد نکو دانستن، حیف ! استاد به من یاد نداد، . . .

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر حمید رضا سلیمی مقدم به خاطر راهنمایی‌های بی منتشان کمال تشکر را دارم،

همچنین از استاد پر تلاشم جناب آقای سید رضا موسوی به خاطر راهنمایی‌های بی دریغشان قدردانی می نمایم،

و برای هر دوی این عزیزان آرزوی سرافرازی و کمال انسانیت را دارم،

همچنین لازم می دانم از همسر، خانواده و تمامی دوستانی که مرا در این مهم یاری نمودند، تقدیر و تشکر کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ما با محاسبه الصاق لوی چویتا در منیفلد های ریمانی همگن، یک فرمول صریح از S-انحنای فضای راندرز همگن بدست می آوریم و اثبات خواهیم کرد که یک فضای راندرز همگن با S-انحنای ایزوتروپیک تقریبی ، S-انحنای صفر دارد.

واژه‌های کلیدی: فضای راندرز، S-انحنا، فضای بروالد، فضای همگن تحویلی، الصاق لوی چویتا، میدان برداری کیلینگ، S-انحنای ایزوتروپیک

فهرست مقالات مستخرج

مقاله "$The S - curvature of homogenous Matsumoto spaces$" در اولین همایش ملی الکترونیکی نقش ریاضی در توسعه علوم.

پیشگفتار

هندسه فینسلر اولین بار توسط پل فینسلر [۱] در سال ۱۹۱۸ در پایان نامه اش معرفی شد. این هندسه از انتگرال ساده شروع شده و بسیار نزدیک به حساب تغییرات می باشد.

هندسه فینسلری تعمیمی از هندسه ریمانی نیست بلکه توضیح بهتری از هندسه ریمانی بدون محدودیت درجه دوم می باشد داده های هندسی در هندسه فینسلری شامل خانواده های هموار از نرم های مینکوفسکی ،بجای خانواده ای از ضرب های داخلی می باشد.

این خانواده از نرم های مینکوفسکی ساختار فینسلر را معرفی می کند. با توجه به دیدگاه های مختلف هندسه کاربردی، الصاق های خطی متنوعی در هندسه فینسلر پدید آمده اند. تنوع الصاق ها در هندسه راهگشای حل بسیاری از مسائل پیچیده در کاربرداین هندسه بخصوص در برق ، کنترل، نسبیت عام، بیولوژی، اکولوژی، کریستال ها، صنعت ذوب فلزات، اخترشناسی، و اخیرا نحوه رشد سلول های سرطانی وزمین شناسی شده است. با توجه به این موضوع پیدایش هر گونه الصاق جالب دیگری می تواند موجب توسعه کاربرد هندسه فینسلری در شاخه های فوق گردد. مسئله ترافیک را می توان از دیدگاه هندسه فینسلر بررسی کرد و می توان نشان داد که متریک وابسته به آن متریک فینسلر از نوع راندرزی می باشد، بنابراین مسیر های بهینه زمانی برای مساله ترافیک ژئودزیک های متر راندرز هستند، و همچنین در مطالعه مساله حرکت هواپیما در گردباد از دیدگاه هندسه فینسلر، نشان داده شده است که هندسه حرکت هواپیما در گردباد از نوع راندرز می باشد و مسیر های بهینه زمانی آن هم ژئودزیک های متر راندرز خواهند بود. یک نوع خاص از متر های فینسلر ،(α,β)متریک ها هستند که کاربردهای فراوانی در مهندسی وفیزیک دارند. در سالهای اخیر مطالعه انحنای (α,β)متریک ها از جمله انحنای پرچمی بیشتر مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است، اما از آنجا که محاسبات مربوط به(α,β) متریک ها در حالت کلی بسیار پیچیده است این مسئله برای هر (α,β)متریک به طور جداگانه صورت می گیرد.

یکی از پر اهمیت ترین (α,β)-متریک ها، متر راندرز می باشد[۹] که ما قصد داریم در این پایان نامه کمیت S-انحنا را بر روی آن در حالت همگن بودن بررسی کنیم. در این راستا فصل اول به بیان تعاریف ومقدماتی می

[۱] Paul Finsler

پردازیم که در فصل های بعد مورد نیاز می باشندو در فصل دوم الصاق لوی چویتا را برای فضای راندرز همگن بررسی می کنیم و در فصل آخر به محاسبه فرمول S-انحنای این فضا می پردازیم وچند کاربرد از فرمول بدست آمده را بیان می کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیاز ها ومفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

علاوه بر روش های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه طول یک بردار روش های دیگری نیز موجود است که نظر به کاربرد بسیار زیاد آنها در علوم فنی مهندسی و فیزیک، در اینجا به یکی از آنها به نام متر فینسلری اشاره می کنیم. مطالعه ی متر فینسلری ابتدا توسط جی اف بی ریمان [۱] در سال [۱۸۵۴] آغاز گردید ولی از آنجائیکه او عقیده داشت که مفهوم متریکی که بعد ها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه ی مفاهیم هندسی و ادامه ی کارهای گاوس [۲] مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد.

اما نظر باینکه این تابع در تعابیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت، بعدهاتوسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله این افراد پل فینسلر بود که در سال [۱۹۱۸] با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری [۳] و قضیه ی اویلر توانست تعریف مدرن از این متر را ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت. وی ثابت کرد که این تابع در هر نقطه $x \in M$ یک ضرب داخلی به صورت $F^{۲} = g_{ij}(x,y)y^i y^j$ روی T_xM تعریف می کند.

متر راندرز به عنوان حالت خاصی از مترفینسلری توسط فیزیکدان ج. راندرز [۴] در سال [**۱۹۴۱**] معرفی

[۱] Georg Friedrich Berhnard Riemann 1826-1866.
[۲] Carl Friedrich Gauss 1777-1855
[۳] Constantin Caratheodory
[۴] G.Randers

شد [۹] . پس از آن، این متر ها در نظریه میکروسکوپ های الکترونی توسط اینگاردن [۵] در سال [۱۹۵۷] به کار گرفته و متر های راندرز نامیده شدند.

۲.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

ابتدا به بیان قرار دادهایی می پردازیم که در سراسر این پایان نامه بکار برده شده است:

۱-جمع بندی اینشتین، یعنی اگر اندیسی یک بار در بالا و یک بار در پایین تکرار شود،آنرا جمع بندی شده می نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ خودداری می نماییم.

۲-منیفلد ها در این پایان نامه، هموار و متناهی البعد می باشند.

۳-مجموعه ی توابع حقیقی مقدار روی M راکه از کلاس C^{∞} هستند را با $C^{\infty}(M)$ نمایش می دهیم.

لازم به ذکر است که مطالب ارجاع داده نشده در فصل یک به مرجع [۲] و در فصل های دو و سه، به مرجع [۱۶] باز می گردد.

تعریف ۱.۲.۱. تابع $H : R^n \setminus ۰ \longrightarrow R$ را همگن مثبت [۶] از درجه r نسبت به y گوییم، اگر به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم :

$$\forall\lambda > ۰ \qquad H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$$

وآن را همگن مطلق از درجه r گوییم اگر به ازای هر عدد حقیقی λ داشته باشیم:

$$\forall\lambda \in R \qquad H(\lambda y) = |\lambda|^r H(y)$$

تعریف ۲.۲.۱. منظور از یک میدان برداری روی منیفلد M نگاشتی هموار مانند $X : M \longrightarrow TM$ است به طوری که

$$M \longrightarrow^X TM \longrightarrow^P M \qquad PoX = id_M$$

$$\forall p \in M \quad X(p) \in T_pM$$

[۵] Ingarden
[۶] Positively homogenous

یا به عبارت دیگر، اگر U یک همسایگی از M باشد، X یک میدان برداری هموار روی U است اگروتنها اگر $X = x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ که در آن $x^i \in C^\infty(U)$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد، در این صورت مجموعه همه میدان های برداری روی M رابا $\chi(M)$ نمایش می دهیم.

برای تعمیم یک تعریف از فضای R^n به روی منیفلد ها باید به دو موضوع توجه داشت اول خاصیت خوش تعریف بودن به این معنی که آن مفهوم روی منیفلد ها قابل بیان باشد. دوم آن که اگر این تعریف به دستگاه مختصات مو ضعی یعنی چارت ها بستگی نداشته باشد آنگاه یک تعریف اساسی است. برای روشن شدن مورد اول فرض کنیم که $c(t)$ یک منحنی روی منیفلد باشد.

اگر شتاب این منحنی یعنی $c''(t)$ را با رابطه

$$Lim_{\triangle t \longrightarrow ۰} \frac{c'(t+\triangle t) - c'(t)}{\triangle t}$$

تعریف کنیم آنگاه این تعریف بی معنی است زیرا صورت کسر از تفاضل دو بردار در دو فضای برداری متفاوت یعنی T_tM و $T_{t+\triangle t}M$ تشکیل شده است.

لذا برای اینکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک منیفلد را تعمیم دهیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردار ها (یا میدان های برداری) در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم. به بیان ساده تر باید بتوانیم مقادیر دو بردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت رابا یکدیگر مقایسه نماییم یا به عبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "الصاق" [۷] نماییم. این موضوع اولین بار توسط لوی چویتا دانشمند ایتالیایی در سال [۱۹۱۷]مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۴.۲.۱. الصاق آفین ∇روی منیفلد مشتق پذیر M نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

[۷] Connection

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

می باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

$$i)\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$ii)\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Y$$

$$iii)\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

لم ۵.۲.۱. فرض کنیم (x,U) یک چارت در همسایگی نقطه p روی منیفلد n-بعدی M همراه با الصاق آفین ∇ باشد. آنگاه $\nabla_X Y$در این مختصات را می توان به صورت گسترده زیر نوشت.

$$\nabla_X Y = (X.Y^i + \Gamma^i_{jk}X^jY^k)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

که ضرایب Γ^k_{ij} توابعی حقیقی روی M هستند.

اثبات. در همسایگی هر نقطه $p \in M$ یک چارت موضعی (x,U) در نظر می گیریم که به هر نقطه p مختصات $(x_۱(p),...,x_n(p))$ را وابسته می کند. فرض کنیم $(\frac{\partial}{\partial x_۱},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$ پایه ای برای T_pM روی چارت موضعی (x,U) باشد. اگر $X = X^i\frac{\partial}{\partial x_i}$ و $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x_j}$، آنگاه چون $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(M)$ ،می توان فرض کرد که

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

که در آن فرض کرده ایم ضرایب Γ^k_{ij} توابعی حقیقی روی M هستند. از آنجا داریم :

$$\nabla_X Y = \nabla_X(Y^i\tfrac{\partial}{\partial x_i}) = Y^i\nabla_X\tfrac{\partial}{\partial x_i} + X(Y^i)\tfrac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= Y^iX^j\Gamma^k_{ji}\tfrac{\partial}{\partial x_k} + X(Y^i)\tfrac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= (X(Y^k) + Y^iX^j\Gamma^k_{ji}\tfrac{\partial}{\partial x_k}$$

در اینجا Γ^k_{ij} ها را ضرایب الصاق یا علائم کریستوفل می نامیم. ■

برای آنکه بتوان هندسه یک فضارا مطالعه کرد باید ببینیم خط راست را چگونه می توان روی آن فضا تعریف کرد. اگر منیفلد خمیدگی داشته باشد ممکن است آن چیزی که ما آن را با تعبیر اقلیدس واصول موضوعه آن خط راست می نامیم دیگر وجود نداشته باشد.

برای تعمیم خط راست روی منیفلد ها که آن را ژئودزیک می نامیم باید از خواص خط راست استفاده کنیم. بارزترین خاصیت خط راست طبیعت کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه است که استفاده از آن کمی پیچیده به نظر می رسد، لذا از خاصیت خط راست به عنوان یک منحنی با شتاب صفر استفاده می کنیم. استفاده از این خاصیت خط راست روی منیفلد ها احتیاج به یک نوع مشتق گیری موسوم به عمل مشتق گیری کوواریان دارد.

تعریف ۶.۲.۱. مشتق کوواریان: فرض کنید M یک منیفلد مشتق پذیر با الصاق آفین ∇ باشد، وجود دارد یک تناظری که وابسته می کند هر میدان برداری V در طول منحنی مشتق پذیر $c : I \longrightarrow M$ را به میدان برداری $\frac{DV}{dt}$ در طول c که مشتق کوواریان V در طول c نامیده می شود بطوریکه:

$$\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt} \qquad (a$$

$$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt} \qquad (b$$

c) اگر V بوسیله میدان برداری $Y \in \chi(M)$ القا شودیعنی $V(t) = Y(c(t))$ ، سپس $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$

مشتق کوواریان تعمیمی از مشتق سویی یا اثر یک میدان برداری X روی یک تابع f است. به عبارت دقیق تر مشتق سویی $X.f$ میزان تغییرات تابع f در سوی بردار X را ارزیابی می کند، در صورتی که مشتق کوواریان میزان تغییرات توابع، میدان های برداری، ۱-فرم ها و یا به طور کلی یک میدان تانسوری را در سوی یک بردار محاسبه می نماید.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باالصاق خطی ∇ باشد. میدان برداری V را در طول منحنی $C : I \longrightarrow M$ موازی [8] گوئیم، اگر به ازای هر $t \in I$ داشته باشیم $\frac{DV}{dt} = 0$. بعلاوه اگر $V(t_0) = V_0$ آنگاه میدان برداری V را انتقال موازی V_0 در طول C می نامیم.

[8] Parallel

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد مشتق پذیر با الصاق آفین ∇ و متریک ریمانی g باشد. الصاق سازگار با متر می باشد، در صورتی که برای هر منحنی هموار C وهر جفت از میدان های برداری موازی P, P' در طول C داشته باشیم:

$$< P, P' >= canstant$$

تعریف ۹.۲.۱. الصاق آفین ∇ روی منیفلد هموار M متقارن نامیده می شود، اگر

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \chi(M)$$

نتیجه ۱۰.۲.۱. در دستگاه مختصات موضعی (x, U) از متقارن بودن ∇ نتیجه می شود که برای هر $i, j = 1, ..., n$

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \qquad\qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

واین معادل با اینست که $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمانی باشد. الصاق آفین∇ روی M یک الصاق لوی چویتا [۹] می باشد، اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف)∇متقارن باشد.

ب)∇سازگار با متر ریمانی باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. انحنا R از منیفلد ریمانی M تناظری است که به هر $X, Y \in \chi(M)$ نگاشت

$R(X, Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ را وابسته می کندکه

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad Z \in \chi(M)$$

که ∇ الصاق ریمانی از M می باشد.

و خواص زیر را دارا می باشد:

[۹] Levi-Civita

الف- R در $\chi(M)\times\chi(M)$ دو خطی می باشد، بنابراین:

$$\forall f,g\in C^{\infty}(M),\qquad X_1,X_2,Y_1,Y_2\in\chi(M)$$

$$R(fX_1+gX_2,Y_1)=fR(X_1,Y_1)+gR(X_2,Y_1)$$

$$R(X_1,fY_1+gY_2)=fR(X_1,Y_1)+gR(X_1,Y_2)$$

ب-برای هر $X,Y\in\chi(M)$، عملگر انحنای $R(X,Y):\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$ خطی می باشد، بطوریکه:

$$\forall f\in C^{\infty}(M),\quad Z,W\in\chi(M)$$

$$R(X,Y)(Z+W)=R(X,Y)Z+R(X,Y)W$$

$$R(X,Y)fZ=fR(X,Y)Z$$

واضح است که اگر $M=R^n$، سپس $R(X,Y)Z=0$ برای هر $X,Y,Z\in\chi(R^n)$.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n-بعدی، $p\in M$ و $X,Y\in T_pM$ پایه هایی داخواه از یک زیر فضای ۲-بعدی π از T_pM باشد، آنگاه عدد

$$K(\pi)=K(X,Y)=\frac{R_m(X,Y,Y,X)}{<X,X><Y,Y>-<X,Y>^2}$$

را انحنای برشی [۱۰] در نقطه p می نامیم.

انحنای برشی $K(X,Y)$ مستقل از انتخاب بردارهای $X,Y\in\pi$ است.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی باشد. می گوییم M با انحنای ثابت [۱۱] است، اگر انحنای برشی K در تمام نقاط $P\in M$ ثابت باشد.

[۱۰] Sectional curvature
[۱۱] Canstant curvature

تعریف ۱۵.۲.۱. متر ریمانی : [۱۲] فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی باشد. متر ریمانی هموار g روی M خانواده $\{g_x\}_{x\in M}$ از ضرب های داخلی روی هر فضای مماس T_xM می باشد، بطوریکه توابع

$$g_{ij}(x) = g_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$$

، c^∞ میباشد.

چون هر g_x ضرب داخلی می باشد، ماتریس g_{ij}در هر نقطه $x \in M$ مثبت معین می باشد.

به عبارتی دیگر متر ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از یک تانسور g از نوع $\binom{2}{0}$ روی M بطوریکه در هر نقطه p از M ، g_p متقارن - یعنی $\forall X, Y \in T_pM, g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$ -و معین مثبت -یعنی $g_p(X,X) > 0 \ \forall X \neq 0$ - باشد.

به راحتی می توان بررسی نمود که این تانسور در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی T_pM تعریف می کند . این ضرب داخلی را توسط $< X, Y >_p$ یا تانسور $g_p(X,Y)$ نمایش می دهیم.

اگر (x,U) یک چارت در همسایگی نقطه p از منیفلد M ، $x(p) = (x^1, \ldots, x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ پایه ای در همسایگی p روی T_pM باشد داریم:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \quad , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود.

$$g_p(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j (X,Y).$$

اگر $X, Y \in T_pM$ ، آنگاه متریک ریمانی $g(X,Y)$ یا ضرب داخلی بین دو بردار X و Y را می توان به صورت زیر نوشت:

$$< X, Y > = < \sum_{i=1} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} > = \sum_{i,j} X^i X^j < \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} > .$$

$$g(X,Y) = < X, Y > = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j.$$

[۱۲] Riemannian metric

گزاره ۱۶.۲.۱. روی هر منیفلد دیفرانسیل پذیر (هاسدورف با پایه شمارا) می توان یک متر ریمانی تعریف نمود.

اثبات. در حقیقت می خواهیم شرایطی فراهم نمائیم که متریک القائی توسط چارت های موضعی تشکیل یک متر ریمانی روی M بدهد. فرض کنیم $\{f_\alpha\}$ یک افراز یکانی دیفرانسیل پذیر وابسته به پوشش $\{V_\alpha\}$ از M بوسیله همسایگی های مختصاتی باشد. یعنی $\{V_\alpha\}$ پوشش موضعا متناهی داشته باشد(یعنی هر نقطه از M یک همسایگی U دارد بطوریکه $U \cap V_\alpha \neq \phi$ در حداکثر تعداد متناهی از اندیس). و $\{f_\alpha\}$ هایک خانواده از توابع دیفرانسیل پذیر روی M باشد که در خواص زیر صدق می کند:

۱) $f_\alpha \geq \circ$ و $f_\alpha = \circ$ روی متمم مجموعه بسته ی $\overline{V}_\alpha$

۲) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = ۱$ به ازای هر $p \in M$

واضح است که ما می توانیم متر ریمانی $<,>^\alpha$ روی هر V_α تعریف کنیم. متر به وسیله دستگاه مختصات موضعی القا می شود. فرض کنیم $(V_\alpha, \varphi_\alpha = (x_۱, ..., x_n))$ یک دستگاه مختصات موضعی برای M باشد. می توان متر ریمانی را به صورت $< \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} >^\alpha = \delta_{ij}$ تعریف کرد.

اکنون با استفاده از متر ریمانی و افراز یکانی یک متر ریمانی روی کل M به صورت $< u, v, >_p = \sum_\alpha f_\alpha(p) < u, v >_p^\alpha$ تعریف می کنیم.

برای هر $p \in M$، $u, v \in T_pM$ که این ساختار یک متر ریمانی روی M تعریف می کند. ■

قضیه ۱۷.۲.۱. (قضیه اساسی هندسه ریمانی) روی هر منیفلد ریمانی (M, g) یک وتنها یک الصاق ریمانی وجود دارد.

اثبات. (اثبات وجود)فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی بوده و X و Y دو میدان برداری روی M باشند.

عملگر $\nabla : (X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ را توسط رابطه زیر تعریف نموده نشان می دهیم که به ازای هر میدان برداری دلخواه Z یک الصاق ریمانی روی M است.

$$۲ < \nabla_X Y, Z >= X < Y, Z > +Y < X, Z > -Z < X, Y >$$

$$+ < [X, Y], Z > + < [Z, X], Y > + < X, [Z, Y] >$$

براحتی می توان نشان داد که عملگر در شرایط الصاق خطی صدق می کند.

(اثبات یکتایی).برای اثبات یکتایی کافی است توجه کنیم که سمت راست رابطه بالا به ∇ بستگی ندارد و هر عملگر دیگری مانند ∇' که توسط این رابطه تعریف شود با ∇ برابر است. ■

برای محاسبه طول برداری مانند X در فضای اقلیدسی از ضرب داخلی دو بردار یعنی $< X, X >^{\frac{1}{2}}$ استفاده می کنیم . این ضرب داخلی یک متر موسوم به متریک اقلیدسی در فضای R^n تعریف می کند، $< X, Y >= \delta_{ij} X^i Y^j$ که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است. به همین صورت در منیفلد ریمانی (M, g) طول یک بردار مماس X با ارائه یک ضرب داخلی روی فضای مماس T_pM به صورت $g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$ ، محاسبه می گرددکه در آن $g_{ij}(x)$ها توابعی حقیقی روی M هستند، که بستگی به نقطه $x \in M$ دارند.

حال می خواهیم ضرب داخلی تعریف کنیم که در آن طول یک بردار علاوه بر نقطه $x \in M$، به جهت آن نیز بستگی داشته باشد. متریک بر خاسته از این ضرب داخلی را متریک فینسلری می نامیم و با $g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$ نمایش می دهیم. در اینجا $g_{ij}(x, y)$ها توابعی حقیقی روی TM هستند، که علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن یعنی $y \in T_pM$ بستگی دارند.

تعریف ۱.۲.۱۸. یک ساختار فینسلر روی TM تابعی است چون $F : TM \longrightarrow [0, \infty)$ که در شرایط زیر صدق می کند :

منظم بودن : F روی $TM \setminus 0$ هموار است.

همگن مثبت: به ازای هر $\lambda > 0$، $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$

تحدب قوی: ماتریس زیر موسوم به ماتریس هیسن در تمام نقاط $TM \setminus 0$ معین مثبت باشد.

$$(g_{ij}) = (\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j})$$

به این صورت که برای هر $v \neq 0$ داشته باشیم $g(v, v) > 0$.