دانشگاه سمنان

**دانشکده ریاضی ، آمار و علوم کامپیوتر**

**« گروه ریاضی »**


پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

# پیوستگی خودکار همریختی های بین جبرهای باناخ و جبرهای فرشه


نگارنده

**فاطمه حسنی**

استاد راهنما

**دکتر فریدون حبیبیان دهکردی**

استاد مشاور

**دکتر مجیداسحقی گرجی**



مهر ۱۳۹۰

به نام یگانه ایزد بی‌همتا

تقدیم به:

## روح بلند پدرم و مادر مهربان و دلسوزم

**آنان که وجودشان برایم همه مهر و فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های زندگی من است.**

# سپاس!

من لم یشکر المخلوق لم یشکرالخالق

خداوند متعال را سپاسگزارم که توفیق اتمام این نوشته را به بنده عطا فرمود. بر خود لازم می‌دانم صمیمانه ترین قدردانی‌های خویش را از تمامی کسانی که در مدت انجام این پایان‌نامه مرا یاری نموده‌اند، بنمایم.

پس از تقدیر از پدر و مادرم که همواره وام‌دار مهرشان هستم. از استاد گرانقدر جناب آقای دکترحبیبیان که همواره مدیون راهنمایی و کمک‌های ایشان خواهم بود، سپاسگزارم که در تمام مراحل تدوین این مجموعه مرا از همراهی و نظرات روشنگرانه‌ی خود بهرمند ساختند و چه بسا بیش از آنچه بر عهده‌ی ایشان بود، قبول زحمت فرمودند.

همچنین از اساتید گرامی آقای دکتر اسحقی ( استاد مشاور ) و داوران محترم آقایان دکتر بید خام و دکتر معمارباشی نیز تشکر و قدردانی می‌کنم.

از درگاه خداوند متعال برای این اساتید طلب توفیق روزافزون و طول عمر باعزت خواستارم.

# چکیده

فرض کنید $A$ و $B$ جبرهای باناخ، $B$ نیم ساده و $T : A \to B$ یک همریختی با برد چگال باشد. مسئله پیوستگی $T$، مدتهای طولانی است که به عنوان یک مسئله باز مطرح است. در این پایان نامه این مسئله باقرار دادن فرضهای بیشتر بر $B$ حل خواهد شد. همچنین نتایج مشابهی را برای همریختی های با برد چگال روی جبرهای فرشه بدست می آوریم. در پایان نشان می دهیم که اگر مسئله پیوستگی همریختی های با برد چگال روی جبرهای باناخ دارای جواب مثبت باشد، آنگاه این مسئله برای جبرهای فرشه نیز جواب مثبت خواهد داشت.



**واژه‌های کلیدی :** جبرهای نیم ساده ، جبرهای باناخ ، جبرهای فرشه ، پیوستگی خودکار ، یکتایی نرم و توپولوژی ، همریختی با برد چگال ، شعاع طیفی

## مقدمه

فرض کنید $A$ یک جبر باناخ نیم ساده باشد. دراین صورت یک نرم کامل یکتا دارد. این مسئله به قضیه یکتایی نرم جانسون معروف است و توسط جانسون در سال ۱۹۶۷ اثبات شد. رانسفورد[۱]، در سال ۱۹۸۹ اثبات کوتاهی برای قضیه یکتایی نرم جانسون ارائه داد، که بسیار ساده تر بیان شده بود.
دراین پایان نامه نشان می دهیم اگر $A$ و $B$ جبرهای فرشه، $B$ نیم ساده و $T : A \to B$ یک همریختی برو همراه بامفروضات دیگرباشد، آن گاه $T$ پیوسته است. بویژه نتیجه می گیریم که اگر $A$ یک جبر باناخ باشد، آن گاه هر بررویختی $T : A \to B$ بطور خودکار پیوسته است و بنابراین هر جبر باناخ نیم ساده به عنوان یک جبر، توپولوژی یکتادارد، که‌این توسیعی از قضیه یکتایی نرم جانسون می باشد.
کارپینتر[۲]،در سال ۱۹۷۱ با اثباتی مشابه برای یکتایی توپولوژی برای جبرهای فرشه نیم ساده و جابه جایی، قضیه جانسون را توسیع داد [2,4.10.17] .
آیا هر تابع خطی ضربی روی جبرهای فرشه نیم ساده جابه جایی ، به طور خودکار پیوسته است؟ این مسئله در سال ۱۹۵۲ توسط مایکل [۳] مطرح گردید و به نام‌خودش معروف شد. تلاشهای زیادی برای جواب به آن انجام شده ولی تاکنون جوابهای جزئی به آن داده شده است. به عنوان مثال آرنز[۴] نشان داد اگر $A$ یک جبرباتولید متناهی باشد،آن گاه هرمشخصه روی $A$ پیوسته است .
و یا جوابهای دیگر، که ازآن جمله می توان به جواب مصطفی لایونی[۵]اشاره کرد.که سال (۲۰۰۱) درمجله ریاضی [۶] منتشرشد . اما چند ماه بعد از آن نشان داده شد که جواب وی درست نیست، لذا تاکنون به این مساله جوابی داده نشده است .
در زیر به چند مساله باز درخصوص پیوستگی های خودکار روی همریختی های از $C^*-$ جبرها را بیان می کنیم :

۱) فرض کنید $A$ یک $C^*-$ جبر و $B$ یک جبرباناخ نیم ساده باشد. آیا هر همریختی با برد چگال $T : A \to B$ پیوسته است؟

۲) فرض کنید $A$ یک $C^*-$ جبر و $B$ یک جبرباناخ باشد. آیا هربروریختی $T : A \to B$ پیوسته است؟

---

[۱] T,J.Ransford
[۲] R.L.Carpenter
[۳] E. A. Michael
[۴] R.Arens
[۵] M.Layyouni
[۶] Bull.Belg.Math.Soc.Simon Steven 8(2001), No .1,105-108

پالاسیو[۷]در سال ۱۹۹۵ اثبات کرد که اگر $A$ یک جبر باناخ و $B$ یک $H^*-$ جبر همراه با پوچ ساز صفرباشد، آن گاه هر همریختی با برد چگال $T : A \to B$ پیوسته است[11].

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد.

فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم اولیه می باشد که در فصل های بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت.

فصل دوم شامل قضایا و مفاهیم مهمی درخصوص طیف ، رادیکال، جبرهای باناخ نیم ساده و تئوری گلفاند می باشد.

فصل سوم شامل قضایاومفاهیم مهمی چون فضای جداکننده همریختی ها،ایده آلهای پوچ ساز و...می باشد.و درادامه پیوستگی همریختی های روی جبرهای باناخ را بررسی می کنیم.

فصل چهارم شامل تعریف جبرفرشه، یکتایی توپولوژی برای جبرهای فرشه نیم ساده می‌باشد. و درادامه پیوستگی همریختی های بابرد چگال را بررسی می کنیم و با قراردادن مفروضات بیشتر بر روی مسائل باز به حل آنها خواهیم پرداخت.

بیشتر مطالب این پایان‌نامه از مراجع [۱] ، [۴] ، [٦] و [۱۵] آورده شده است.

---

[۷] A.Rodriguez Palacio

# فهرست مندرجات

# فصل ۱

# تعاریف و مفاهیم اولیه

دراین فصل خلاصه‌ای از تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز را بیان می‌کنیم. این فصل شامل پنج بخش است، که در بخش اول با جبرهای نرمدارآشنا می شویم و قضایا و نتایج مربوط به آنها را بیان می کنیم. در بخش دوم به تعریف اعضای معکوس پذیر در جبرهای باناخ پرداخته و درادامه با مفهوم شعاع طیفی آشنا می شویم، که از طریق آن بسیاری از نتایج مهم در جبرهای باناخ مطرح می شوند. دربخش سوم ایده آل ها سپس رادیکال هادر جبرهای باناخ را معرفی می کنیم که منجربه تعریف انواع دیگری ازجبرها مانند جبرهای نیم ساده و رادیکال خواهد شد. ودر بخش چهارم مشخصه ها و جبرهای تقسیم و در بخش پنجم به معرفی برگشت روی جبرها می پردازد.

## ۱.۱ جبرهای نرمدار

در این بخش منظور از میدان $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است ، مگر آنکه یکی از آنها قید گردد.

**تعریف ۱.۱.۱** فرض کنید $X$ یک مجموعه ناتهی باشد. نگاشت $d : X \times X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{۰\}$ یک مترروی $X$ است هرگاه:

۱) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x,y) = ۰ \Longleftrightarrow x = y$ ،

۲) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x,y) = d(y,x)$ ،

۳) برای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ .

دراین حالت $(X, d)$ را یک فضای متریک و $d(x,y)$ را فاصله $x, y$ نامیم.

**تعریف ۲.۱.۱** تابع $||.|| : X \to [0, +\infty)$ یک نرم روی فضای بردار $X$ است، هرگاه

۱) برای هر $x \in X$ ، $||x|| = 0$ اگروتنهااگر $x = 0$ ،

۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$ ،

۳) برای هر $y, x \in X$ ، $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ .

در این صورت $(X, ||.||)$ را یک فضای نرمدار گوییم.

با در نظر گرفتن $d(x,y) = ||x-y||$، واضح است که هر فضای برداری یک فضای متریک است.

**تعریف ۳.۱.۱** اگر $(X, ||.||)$ یک فضای نرمدار باشد، $A \subseteq (X, ||.||)$ را کراندار گوییم، هرگاه

$$\exists M > 0 \qquad s.t. \qquad \forall x \in A \qquad ||x|| \leq M.$$

**تعریف ۴.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای نرمدار باشد. $X$ را یک فضای باناخ گوییم، هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

**تعریف ۵.۱.۱** دو نرم $||.||, ||.||'$ را در فضای نرمدار $X$ معادل گوییم، هرگاه

$$\exists K, M > 0 \qquad s.t \quad \forall x \in X \quad K||x|| \leq ||x||' \leq M||x||.$$

**تعریف ۶.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژیک باشد. $X$ را محدب موضعی گوییم، هر گاه صفر دارای پایه ای موضعی باشد که هر عضوش محدب است.

**تعریف ۷.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژیک باشد. $X$ را کراندار موضعی گوییم، هرگاه صفر دارای یک همسایگی کراندار باشد.

**تعریف ۸.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای توپولوژیک باشد. $X$ را فشرده موضعی گوییم، هرگاه صفر دارای یک همسایگی باشد که بستارش فشرده است.

**تعریف ۹.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای برداری و $\tau$ یک توپولوژی روی $X$ باشد. $X$ را یک فضای توپولوژیک $(T.V.S)$ گوییم، هرگاه

۱) تک نقطه‌ای ها بسته باشند،

۲) اعمال فضای برداری پیوسته باشند.

**تعریف ۱۰.۱.۱** فرض کنید $G$ یک گروه و $\tau$ یک توپولوژی روی $G$ باشد. $G$ رایک گروه توپولوژیک گوییم، هرگاه:

۱) نگاشت $G \times G \to G$ با ضابطه‌ی $(x,y) \to xy$ پیوسته باشد.

۲) نگاشت $G \to G$ با ضابطه‌ی $x \to x^{-1}$ پیوسته باشد.

**تعریف ۱۱.۱.۱** فرض کنید $Y$ و $X$ دو فضای برداری باشند. $T : X \to Y$ را یک عملگر خطی گوییم، هرگاه :

$$\forall x, y \in X \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; ; \quad T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

**تعریف ۱۲.۱.۱** یک جبر برمیدان $\mathbb{F}$، فضای برداری $A$ بر میدان $\mathbb{F}$ همراه با نگاشت $A \times A \to A$ باضابطه $(x,y) \to xy$ است که برای هر $x, y, z \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$، دارای خواص زیر باشد :

۱) $x(yz) = (xy)z$ ،

۲) $x(y+z) = xy + xz$ ، $(x+y)z = xz + yz$ ،

۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$ .

**تعریف ۱۳.۱.۱** فرض کنید $A$ یک جبر باشد. در این صورت یک زیر نیم گروه از $A$ یک زیر مجموعه $S$ از $A$ است که اگر $x, y \in S$ باشد، آنگاه $xy \in S$ .

**تعریف ۱۴.۱.۱** یک زیر جبر از $A$ یک زیر فضای خطی از $A$ است که بعلاوه یک زیرنیم گروه $A$ نیز باشد.

**تعریف ۱۵.۱.۱** جبر $A$ روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر نرمدار گوییم، هرگاه $A$ به عنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $\|.\|$ در شرط زیر صدق کند:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A).$$

**تعریف ۱۶.۱.۱** جبر نرمدار $A$ روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر باناخ گوییم، هرگاه $A$ یک فضای باناخ باشد.

**تعریف ۱۷.۱.۱** عنصر $e \neq 0$ از جبر $A$ را یک عضو همانی یا یکانی نامیم، هرگاه

$$ex = xe = x \quad (x \in A).$$

**تعریف ۱۸.۱.۱** جبر A را یک جبر یکدار نامیم، اگر دارای یک عضو همانی باشد.

**تعریف ۱۹.۱.۱** جبر $A$ را یک جبر جابه‌جایی گوییم، اگر به ازاء هر $x$ و $y$ در$A$ ، $xy = yx$ .

**گزاره ۲۰.۱.۱** دریک جبر نرمدار $A$ نگاشت ضرب تواما پیوسته است.

**برهان .** فرض کنید $x_n \to x$ و $y_n \to y$ که $x, y \in A$. نشان می دهیم $x_n y_n \to xy$ که باتوجه به رابطه زیربدیهی است.

$$||x_n y_n - xy|| = ||(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + (x_n - x)y||$$

$$\leq ||x_n - x||||y_n - y|| + ||x||||y_n - y|| + ||x_n - x||||y||$$

■

به خصوص ، ضرب پیوسته چپ و پیوسته راست است. بدین معنی اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$، آن گاه $x_n y \to xy$ و $xy_n \to xy$ .

**گزاره ۲۱.۱.۱** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد. در این صورت بستار آن نیز چنین است.

**برهان .** بنا به پیوستگی اعمال فضای برداری واضح است که $\overline{A}$ نیز یک فضای برداری است. فرض کنید $a, b \in \overline{A}$ و قرار می دهیم $a.b = \lim_{n\to\infty} a_n.b_n$ که در آن $(a_n)$ و $(b_n)$ دنباله هایی در $A$ هستند که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ . به وضوح $A$ همراه با ضرب فوق یک جبر است . حال اگر$a \in \overline{A}$ و$||a|| = \lim_{n\to\infty} ||a_n||$ ، آن گاه برای اثبات کافیست نشان دهیم $||.||$ تعریف شده بر$\overline{A}$ یک نرم جبری است. اما $A$ یک جبر نرمدار است، لذا برای هر $n$ داریم

$$||a_n b_n|| \leq ||a_n||||b_n||.$$

باتوجه به تعریف نرم بر روی $\overline{A}$ و رابطه فوق داریم :

$$||a.b|| = \lim_n ||a_n.b_n|| \leq \lim_n ||a_n||||b_n|| = \lim_n ||a_n|| \lim_n ||b_n|| = ||a||||b||.$$

حال نشان می دهیم $\overline{A}$ یک جبرجابه جایی است.

اما$A$ یک جبرجابه‌جایی است لذا برای هر $n$ داریم، $a_n b_n = b_n a_n$. لذا $\lim_{n\to\infty} b_n a_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n$ و درنتیجه $ab = ba$ . ■

**تذکر ۲۲.۱.۱** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای خطی برمیدان $\mathbb{F}$ باشند. فضای خطی تمام نگاشت های خطی از $X$ به توی $Y$ رابا $L(X,Y)$ نمایش می دهیم. در حالت خاص اگر $X = Y$ آنگاه $L(X,X)$ را با $L(X)$ نمایش می دهیم.

**مثال ۲۳.۱.۱** اگر $X$ یک فضای خطی برمیدان $\mathbb{F}$ باشد، آن گاه $L(X)$ با ضرب

$$ST(x) = S(Tx)$$

که در آن $S,T \in L(X)$ و $x \in X$ ، یک جبر است .

**تعریف ۲۴.۱.۱** فرض کنید $A$ و $B$ دو جبر با میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت نگاشت خطی $\phi : A \to B$ را یک همریختی گوییم، هرگاه :

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \qquad (x, y \in A).$$

یک همریختی یک به یک را یک تکریختی، یک همریختی برو را یک بروریختی و یک همریختی یک به یک و برو را یک یکریختی می نامیم.

**تعریف ۲۵.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای خطی بر میدان $\mathbb{F}$ و $A$ یک جبربرمیدان $\mathbb{F}$ باشد. دراین صورت یک شبه نرم روی $X$ نگاشت $P : X \to \mathbb{R}$ است ، به‌طوری که برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم :

۱) $P(x) \geq 0$ ،

۲) $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$ ،

۳) $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$ .

اگر $P$ یک نیم نرم بر $X$ بوده وبعلاوه

$$P(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

آن گاه $P$ یک نرم بر $X$ است.

**تعریف ۲۶.۱.۱** فرض کنید $X$ و $Y$ و $Z$ فضاهای نرمدار بر میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت $\varphi : X \times Y \to Z$ رادو خطی گوییم، هرگاه :

۱) برای هر $y \in Y$ نگاشت $x \to \varphi(x, y)$ خطی باشد ،

۲) برای هر $x \in X$ نگاشت $y \to \varphi(x,y)$ خطی باشد .

**تعریف ۲۷.۱.۱** فرض کنید $A$ و $B$ دو جبر نرمدار باشند. در این صورت یک یکریختی طولپااز $A$ به $B$ یکریختی $T : A \to B$ است به طوری که برای $x \in A$ داشته باشیم :

$$||T(x)|| = ||x||.$$

**تعریف و نمادگذاری ۲۸.۱.۱** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای برداری بر میدان $\mathbb{F}$ باشند. فضای تمام نگاشت های خطی و کراندار از $X$ به توی $Y$ را با$BL(X,Y)$ نمایش داده و $BL(X,X)$ را با $BL(X)$ نمایش می دهیم .

فرض کنید$X$ و$Y$ دو فضای نرمدار و $T \in BL(X,Y)$ . در این صورت $BL(X,Y)$ با نرم زیر یک فضای نرمداراست.

$$||T|| = \sup\{||Tx|| \quad ; \quad x \in X \quad , \quad ||x|| \leq ۱\}.$$

**گزاره ۲۹.۱.۱** اگر $X$ یک فضای نرمدار و $Y$ یک فضای باناخ باشند، آنگاه $BL(X,Y)$ یک فضای باناخ است.

**برهان .** به مرجع [۱] رجوع کنید. ■

**تعریف ۳۰.۱.۱** $BL(X,\mathbb{F})$ را با $X'$ نمایش داده و آنرا دوگان $X$ می نامیم. همچنین عناصر $X'$، تابعک های خطی پیوسته نامیده می شوند.

**گزاره ۳۱.۱.۱** فرض کنید $A$ یک جبر نرمدار باشد. در این صورت یک یکریختی طولپا از $A$ به یک زیر جبر چگال از یک جبر باناخ $B$ وجود دارد. بعلاوه جبرهای باناخ $B$ باهم یکریخت طولپا هستند. جبر باناخ $B$ را کامل شده جبر باناخ $A$ گوییم .

**برهان .** به گزاره(۱.۱۲) از مرجع [۱] رجوع کنید . ■

**تعریف ۳۲.۱.۱** فرض کنید $E \neq \varnothing$ و $X$ یک فضای نرمدار و $f : E \to X$ کراندار باشد. دراین صورت نرم یکنواخت $f$ را با $||f||_\infty$ نمایش داده و به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$||f||_\infty = \sup\{||f(s)||; s \in E\}.$$

**تعریف ۳۳.۱.۱** فرض کنید $E \neq \varnothing$ و $X$ یک فضای خطی نرمدار باشد. مجموعه تمام نگاشت های کراندار از $E$ به $X$ همراه بانرم یکنواخت، یک فضای خطی نرمدار است که آن را با $\ell^\infty(E, X)$ نمایش می دهیم.

**تذکر ۳۴.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای خطی نرمدار کامل باشد. دراین صورت $\ell^\infty(E, X)$ کامل است.

**برهان .** به مرجع [۱] رجوع کنید . ■

**تعریف و نمادگذاری ۳۵.۱.۱** فرض کنید $E \neq \varnothing$ و $X$ یک فضای خطی نرمدار باشد. فضای خطی تمام نگاشت های پیوسته از $E$ به $X$ را با $C(E, X)$ نمایش می دهیم.

**تذکر ۳۶.۱.۱** فرض کنید $E$ فشرده باشد. دراین صورت $C(E, X)$ یک زیرفضای خطی بسته از $\ell^\infty(E, X)$ است.

**برهان .** به مرجع [۱] رجوع کنید . ■

**مثال ۳۷.۱.۱** فرض کنید $C(K)$ فضای باناخ تمام توابع پیوسته بر فضای هاسدورف فشرده و ناتهی $K$ با نرم $||.||_\infty$ باشد . ضرب نقطه ای را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\forall f, g \in C(K) \;\; ; \;\; (fg)(p) = f(p)g(p)$$

$C(K)$ با ضرب و نرم فوق یک جبرباناخ جابه جایی است ، که درآن عنصرهمانی ، تابع ثابت ۱ می باشد .

**مثال ۳۸.۱.۱** فرض کنید $G$ یک گروه و $f$ نگاشتی از $G$ به $\mathbb{C}$ با این شرط که $\sum_{s\in G} |f(s)| < \infty$ باشد. دراین صورت مجموعه تمام چنین نگاشت های $f$ را با $\ell^1(G)$ نمایش می دهیم. نرم و ضرب پیچشی روی $\ell^1(G)$ را بصورت زیرتعریف می کنیم:

$$||f|| = \sum_{s\in G} |f(s)|$$

$$f, g \in \ell^{1}(G) \quad ; \quad (f * g)(s) = \sum_{t \in G} f(t) g(t^{-1} s) \quad s \in G$$

$\ell^{1}(G)$ باجمع و ضرب اسکالر، ضرب پیچشی و نرم فوق یک جبرباناخ است که به آن جبرگروهی گسسته گوییم.

**تعریف ۳۹.۱.۱** ( مجموعه‌ی جهت‌دار ): فرض کنید $\leq$ رابطه‌ای روی $D$ باشد. $(D, \leq)$ را جهت‌دارگوییم، هرگاه:

۱) $\leq$ انعکاسی باشد.

۲) $\leq$ متعدی باشد.

۳) برای هر $\alpha$ و $\beta$ از $D$، $\gamma \in D$ ای موجود باشد که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

**تعریف ۴۰.۱.۱** یک تور در فضای توپولوژیک $X$، یک نگاشت از یک مجموعه‌ی جهت‌دار به داخل $X$ است. اگر $D$ مجموعه‌ای جهت‌دار باشد تابع $x : D \to X$ یک تور است که برای راحتی کار $x : D \to X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۴۱.۱.۱** تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در $X$ همگرا به $x$ است هرگاه به ازای هر $G$ باز شامل $x$ یک $\alpha_{\circ}$ در $D$ موجود باشد به طوری که برای $\alpha \geq \alpha_{\circ}$، $x_\alpha \in G$.

**تعریف ۴۲.۱.۱** فرض کنید $X$ یک فضای باناخ و $X'$ دوگان $X$ باشد به طوری که $X'$ نقاط $X$ را جدا کند . کوچکترین توپولوژی روی $X$ که همه اعضای $X'$ پیوسته است را توپولوژی ضعیف روی $X$ گوییم و با $\tau_w$ نمایش می دهیم .

**تعریف ۴۳.۱.۱** فرض کنید $X$ یک $T.V.S$، $X'$ دوگان $X$ و برای هر $x \in X$، $\hat{x} : X' \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$ تعریف شده باشد . بدیهی است $\hat{x}$ خطی است. فرض کنید

$$\hat{X} = \{\hat{x} \quad ; \quad x \in X\}.$$

اگر $\Lambda_۲ \neq \Lambda_۱$ پس $x \in X$ ای هست که $\Lambda_۱(x) \neq \Lambda_۲(x)$ یعنی $\hat{x}(\Lambda_۱) \neq \hat{x}(\Lambda_۲)$. پس $\hat{X}$ نقاط $X'$ را جدا می کند . حال کوچکترین توپولوژی روی $X'$ که همه اعضای $\hat{X}$ روی آن پیوسته است را توپولوژی ضعیف ستاره یا به اختصار $w^*-$ توپولوژی روی $X'$ گوییم و با $\sigma(X', X)$ نمایش می دهیم.

**قضیه ۴۴.۱.۱** ( هان —باناخ ): فرض کنید $Y$ یک زیر فضای نرم بسته از $X$ و $T$ یک تابعک خطی پیوسته روی $Y$ باشد . در این‌صورت می‌توان $T$ را به یک تابعک خطی پیوسته چون $\widehat{T}$ روی $X$ توسیع داد به طوریکه $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

**برهان .** به مرجع [۱۵] رجوع کنید. ■

**قضیه ۴۵.۱.۱** (باناخ — آلاگلو)

اگر $X$ یک $T.V.S$ و $V$ یک همسایگی از صفر باشد، آن گاه $K = \{\Lambda \in X' \;;\; \forall x \in V \;\; |\Lambda(x)| \leq ۱\}$ با $w^*-$ توپولوژی فشرده است.

**برهان:** به قضیه (۱۵.۳) از مرجع [۱۵] رجوع کنید.

## ۲.۱ معکوس

درابتدای این بخش بامفهوم عناصر معکوس پذیر در جبرهای باناخ آشنا شده و سپس قضایایی که در فصل های بعد به آنها نیاز داریم را بیان و اثبات می کنیم .

**تعریف ۱.۲.۱** فرض کنید $A$ یک جبر یکدار با عضو همانی ۱ و $a \in A$ باشد. در این صورت معکوس چپ $a$، عنصر $b \in A$ است به طوری که، $ba = ۱$. بطورمشابه معکوس راست تعریف می شود.

**تعریف ۲.۲.۱** فرض کنید $A$ یک جبریکدار با عضو همانی ۱ و $a \in A$ باشد. دراین صورت عضوی از $A$ را که هم معکوس راست و هم معکوس چپ $a$ باشد، معکوس $a$ گوییم. و با $a^{-۱}$ نمایش می دهیم. عضو $A$ رامعکوس پذیر نامیم، هرگاه دارای معکوس باشد. مجموعه اعضای معکوس پذیر $A$ رابا $Inv(A)$ نمایش می دهیم.