
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران

دانشکدهٔ علوم پایه

پایان نامه :

حل رسته‌ای دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی وابسته به زمان معمولی و جزیی به‌کمک توابع کنترل

جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

اساتید راهنما :

دکتر علی وحیدیان کامیاد (استاد دانشگاه فردوسی مشهد)

دکتر حسن حسین‌زاده (استادیار دانشگاه مازندران)

تحقیق و تدوین:

سیدمهدی ربانی جلالی

پاییز ۱۳۸۰

«بسمه تعالی»

دانشگاه مازندران
معاونت آموزشی
تحصیلات تکمیلی

«ارزشیابی پایان‌نامه در جلسه دفاعیه»

دانشکده علوم پایه

نام و نام‌خانوادگی : سیدمهدی ربانی جلالی **شمارهٔ دانشجوئی :** ۹ ۷۸۵۲۴۷۷

رشته تحصیلی : ریاضی کاربردی **مقطع :** کارشناسی ارشد **سال تحصیلی :** ۸۱ - ۸۰

عنوان پایان‌نامه: حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی غیر خطی با کمک توابع کنترل به وسیله برنامه ریزی غیر خطی

تاریخ دفاع: ۸۰/۷/۱۵

نمره پایان‌نامه (به عدد): ۱۸٫۸۵

نمره پایان‌نامه (به حروف): هیجده و هشتاد و پنج صدم

هیأت داوران

استاد راهنما : آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد امضاء

استاد راهنما : آقای دکتر حسن حسین‌زاده امضاء

استاد مدعو : آقای دکتر قاسم علیزاده‌افروزی امضاء

استاد مدعو : آقای دکتر رضا عامری امضاء

نماینده تحصیلات تکمیلی: آقای دکتر دوستعلی مژده امضاء

تشکر و قدردانی :

خدای را سپاس، که سرانجام پس از ماه‌ها و روزها تلاش، موفق به انجام این مهم شدم.

در اینجا لازم می‌دانم از استاد عزیز جناب آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد به‌خاطر ارائۀ کلی روند کار کمال تشکر را داشته باشم همچنین از آقای دکتر حسن حسین‌زاده به خاطر راهنمایی و پشتگرمی نهایت تشکر را دارم.

از دوستان عزیزی که در رفع و ارائه عناوین کمک زیادی کرده‌اند از جمله آقایان مصطفی محققی‌نژاد، محمد استاد رحیمی، مهندس عباس اسماعیل‌جامی قدردانی می‌نمایم.

با تشکر از آقای حسین مکرم که زحمت حروفچینی این پایان‌نامه را به عهده داشتند.

در آخر از مادر و همسر مهربانم به خاطر دلگرمی‌هایشان و بازنگری مطالب تشکر می‌نمایم.

کشتی شکستگانیم ای باد شرطه برخیز

باشد که باز بینیم دیدار آشنا را

تقدیم به روح بزرگ شهید محمد جواد ساده

فهرست مطالب

عنوان

فصل اول : تعاریف و مقدمات

صفحه

۱-۱- برنامه‌ریزی خطی ۱
۱-۲ - برنامه‌ریزی غیرخطی ۴
۱-۳ - کنترل و کنترل بهینه ۶
۱-٤ - معادلات دیفرانسیل معمولی ۹
۱-٥ - دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی ۱۵
۱-٦ - مطالبی از آنالیز عددی ۱۸

فصل دوم :

۲-۱- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی باکمک تابع کنترل ۲۱
۲-۲- گسسته‌سازی مسئله ۲-۱-۲ ۲۴
۲-۳- ساختار زوجهای قابل قبول ۲۶
۲-٤ - حل دو مثال با ارائهٔ برنامهٔ کامپیوتری ۲۶

فصل سوم :

۳-۱- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی باکمک تابع کنترل به وسیلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی ۳۹
۳-۲ - مسئلهٔ اساسی کنترل ۴۰
۳-۳- گسسته‌سازی مسئلهٔ ۳-۲-۲ ۴۲
۳-٤- تبدیل مسئله ۳-۳-۷ به مسئلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی ۴۴
۳-٥ - ساختار جوابهای قابل قبول ۴۵
۳-٦ - حل دستگاه معادلات دیفرانسیل شبه خطی بامشتقات جزیی باکمک برنامه‌ریزی غیرخطی ۴۵
۳-۷ - مسئلهٔ اساسی کنترل ۴۶
۳-۸- گسسته‌سازی مسئلهٔ ۳-۷-۷ ۴۸
۳-۹- تبدیل مسئلهٔ ۳-۸-٦ به صورت برنامه‌ریزی غیرخطی ۵۰
۳-۱۰ - ساختار جوابهای قابل قبول و ارائه یک جواب قابل قبول برای آنها ۵۱
۳-۱۱ - ارائهٔ چند مثال از الگوریتمهای بالا ۵۱

عنوان | صفحه

فصل چهارم :

٤-١- ارائهٔ یک برنامهٔ کامپیوتری جدید برای درونیابی و بالابردن دقت تقریب	۷۰
٤-٢- درونیابی مثلثاتی	۷۰
٤-٣- بالابردن دقت و کاهش خطا با کمک برونیابی ریچاردسون	۷۹
۴-۴- حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ nام با کمک برنامه‌ریزی خطی	۸۰
٤-٥- سیستمهای قطبی دارای چند ورودی و چندخروجی (MIMO) و حل آنها به روش برنامه‌ریزی خطی	۸۱
٤-٦- رشد خطا در مسائل حل شده در فصلهای ۲ و ۳	۸۲

فصل پنجم :

٥-١- خلاصهٔ فصلهای ۲ و ۳	۸۵
٥-٢- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی با کمک تابع کنترل	۸۵
٥-٣- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی با کمک تابع کنترل و حل با برنامه‌ریزی غیرخطی	۸۸
مراجع	۹۲
چکیده انگلیسی	۹۳

چکیده :

در این پایان‌نامه سعی شده است تا با کمک روشهای آنالیز عددی و آنالیز حقیقی و استفاده از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی و جزیی روش جدید برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و جزیی با کمک تابع کنترل ارائه شود.
در این پایان‌نامه اساس کار کنترل‌پذیری یک دستگاه معادلات است که با توجه به نظریهٔ کنترل و کنترل بهینه و با کمک L^p ها این کار انجام می‌شود.
از جمله نکاتی که بایستی ذکر شود، اگر در مسئله‌ای نرم در ارتباط با آن مسئله مقدار صفر داشته باشد به جواب دقیق رسیده‌ایم و نیازی به استفاده از توابع کنترل نداریم اما اگر نرم در ارتباط با آن مسئله مقدار صفر یا تقریباً صفر نداشته باشد با کمک توابع کنترل، مسئله موردنظر را کنترل‌پذیر کرده و سپس دستگاه معادلات دیفرانسیل را اعم از معمولی و جزیی که می‌توانند به صورت خطی و یا غیرخطی باشند را حل نمود.
در این پایان‌نامه خطای مسائلی که جوابهای دقیق داشته‌اند به صورت یک شکل و توضیحات مربوطه در فصل ۴ ارائه شده است.
برنامه‌های موجود در پایان‌نامه را به زبان پاسکال(V7) و برای رسم و حل معادلات برای جوابهای دقیق از نرم‌افزارهای Curveexpert 1.3 و MATLAB (V 5.3)استفاده شده است.
در اینجا لازم است بیان شود که چون دستگاه‌های غیرخطی را با نرم‌افزار LINGO حل می‌کنیم و لذا جوابهای بهینه موضعی‌به‌دست می‌آید و تنها حالاتی که جواب بهینه مطلق به دست‌می‌آیند در حالات خطی است.

فصل اول

(۱ـ۱) تعاریف و مقدمات :

(۱-۱-۱) برنامه‌ریزی خطی : فرآیند به‌دست‌آوردن بهترین نتیجه (برای مثال مقدار کمینه یا بیشینهٔ) برای یک مسأله با شرایط داده شده (قیدها) بهینه‌سازی نامیده می‌شود. چنین فرآیندی برای جستجوی بهینه به مبحث برنامه‌ریزی ریاضی متعلق است که **به‌عنوان** شاخه‌ای از تحقیق در عملیات (شاخه‌ای از ریاضیات که جهت تصمیم‌گیری به کار برده-می‌شود) دسته‌بندی شده است و مسایل را طوری طرح‌ریزی می‌کند که بهترین جواب **به دست** آید. برنامه‌ریزی خطی (LP) شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضیات ،کاربردهای فیزیکی و صنعتی و تجاری بسیار دارد.[۵]

(۱-۲-۲) مسأله برنامه‌ریزی خطی : مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرد:

$$\min \quad z= c_1x_1+\dots+c_nx_n$$

s.t.

$$\begin{cases} a_{m}x_1+\dots+c_{m}x_n \geq b_1 \\ \vdots \\ a_{m}x_1+\dots+a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \dots x_n \geq 0 \end{cases} \qquad (۱-۱-۳)$$

در اینجا $c_1x_1+\dots+c_nx_n$ تابع هدف است که باید بهینه شود با حرف Z نشان می‌دهیم. ثابت‌های $c_1,\dots,c_n$ ضرایب هزینه **بوده** و $x_1, x_2, \dots, x_n$، متغیرهای تصمیم‌گیری هستند که باید مشخص شوند. نامساوی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ ، iامین محدودیت را نشان می‌دهد. ضرائب a_{ij} به ازای $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$، را ضرائب فنی می‌نامند. ضرایب فنی ماتریس محدودیت A

را تشکیل می‌دهد.

بردار ستونی که iامین مؤلفه‌اش b_i است، و بردار سمت راست نامیده می‌شود، حداقل مقدار مورد نیاز را برای برقراری تساوی نشان می‌دهد. محدودیتهای $x_1, \dots, x_n \geq 0$ محدودیتهای نامنفی هستند که مجموعه از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ که در تمام محدودیتها صدق کند را نقطهٔ شدنی یا بردار شدنی می‌نامند. مجموعهٔ تمام چنین نقاطی ناحیه شدنی یا فضای شدنی را تشکیل می‌دهد.

حالتهایی که در یك مسئله کمینه سازی پیش می آیند :

۱ـ جواب بهینه متناهی منحصر بفرد: اگر جواب بهینه متناهی منحصر بفرد باشد، آن وقت در یک نقطهٔ رأسی واقع می‌شود.

۲ـ جوابهای بهینهٔ متناهی دگرین: در این حالت دو نقطهٔ گوشه‌ای x_1^* و x_2^* مانند هر نقطهٔ **پاره خطی که آنها را بهم وصل می کند بهینــه هســتند.**

۳ـ جوابهای بهینه متناهی : در ناحیه شدنی جواب بی‌کران و مقدار جواب بهینه نامتناهی است.

۴ـ ناحیه شدنی تهی: در این حالت سیستم معادلات و یا نامعادلات که ناحیه شدنی را تشکیل می‌دهند ناسازگار است.[۵]

(۱ـ۱ـ٤) تعبیر شدنی : مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در شکل استاندارد در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \min\ Z &= cx \\ \text{s.t.} & \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(۱-۱-۵)

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ است که jامین ستون آن با a_j نشان داده می‌شود. مسئلهٔ (۱-۱-۵) مثال را می‌توان چنین بازنویسی کرد.

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j = b \\ x_j \geq 0 \ , j = 1,\dots,n \end{cases} \qquad (1-1-6)$$

بردارهای $a_1, \dots, a_n$ مفروض است، می‌خواهیم اسکالرهای نامنفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ را طوری پیدا کنیم که $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$، و $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ کمینه شود. به هر صورت، توجه دارید که مجموعهٔ بردارهای به شکل $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. مخروطی است که توسط بردارهای $a_1, \dots, a_n$ به‌وجود آمده است. بنابراین مسأله جواب‌شدنی دارد اگر و فقط اگر بردار b در این مخروط قرار بگیرد. [5]

(1-1-7) نقاط رأسی : مفهوم نقاط رأسی نقش مهم ویژه‌ای در تئوری برنامه‌ریزی خطی بازی می‌کنند. یک نقطهٔ x در مجموعهٔ محدب x نقطهٔ رأسی گفته می‌شود. اگر x را نتوان به‌صورت ترکیب محدب اکید دو نقطهٔ متمایز در x نوشت. [5]

قضیه (1-1-8) قضیه نمایش در حالت کلی :

فرض کنید $X=\{x: Ax\leq b,\ x\geq 0\}$ یک مجموعه (چند وجهی) ناتهی باشد. پس مجموعه نقاط رأسی ناتهی و دارای تعداد متناهی عضو، نظیر $x_1, \dots, x_k$ است. به علاوه، مجموعه جفتهای رأسی تهی است اگر و فقط اگر X کران‌دار باشد. اگر X بی‌کران باشد، پس مجموعه جفتهای رأسی ناتهی است و دارای تعداد متناهی‌بردار نظیر $d_1, \dots, d_l$ است. گذشته از این $\bar{x} \in X$ اگر و فقط اگر آن را بتوان به صورت ترکیب محدبی از $x_1, \dots, x_k$ به علاوه ترکیب نامنفی از $d_1, \dots, d_l$ نوشت،یعنی :

$$\begin{cases} \bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1,\dots,k \\ \mu_j \geq 0 \quad j = 1,\dots,l \end{cases} \qquad (۱-۱-۹)$$

. [۵]

(۱-۱-۱۰) جـــــهت‌های دور شــــونده و رأســــی : مـجموعهٔ $D = \{ d : Ad < 0 ,\ 1.d=1, d \geq 0 ,\ d \neq 0 \}$ مجموعه جهت‌های دور شونده X را مشخص می‌کنند. جهت‌های رأسی X دقیقاً نقاط رأسی D است. بدیهی است که به علت محدودیت نرمال، جهت $d \varepsilon D$ را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی مثبتی از دو جهت متمایز نوشت اگر و فقط اگر آن را نتوان به صورت ترکیب محدب اکیدی از دو جهت متمایز D نوشت [۵].

(۱-۲) برنامه‌ریزی غیر خطی :

(۱-۲-۱) تعریف : فضای اقلیدسی را به صورت

(۱-۲-۲) $E^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t \mid x_j \in R,\ 1 \leq j \leq n\}$ نمایش می‌دهیم. [۶]

(۱-۲-۳) پیوستگی : تابع $f: E^n \to E$ در $\bar{x} \in E$ پیوسته گوییم اگر :

$$\forall \xi > 0 ,\ \exists \gamma \geq 0\ (y \in E^n, \| y \| < \gamma) \Rightarrow \left| f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) \right| < \xi \qquad (۱-۲-۴)$$

f را روی E^n پیوسته گویند اگر f روی همهٔ نقاط $x \in E^n$ پیوسته باشد. [۶]

(۱-۲-۵) مشتق : تابع $f: E^n \to E$ را در نقطهٔ $\bar{x} \in E^n$ مشتق‌پذیر گویند اگر یک تابع $g: E^n \to E^n$ وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$\forall d \in E^n \ s.t \quad Z(t,d) = \frac{f(\bar{x} + td) - f(\bar{x}) - t g^t(\bar{x}) d}{t} \qquad (۱-۲-۶)$$

و یا

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + td) - f(\bar{x})}{t} = g^t(\bar{x}) d. \qquad (۱-۲-۷)$$

اگر $d_j = e_j$ ، $e_j = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$ ، (برداریکه مؤلفهٔ jام آن برابر یک است و بقیه مولفه‌هایش صفر

هستند) داریم:

$$[۶]_{\,} \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+te_j)-f(\bar{x})}{t} = g'(\bar{x})e_j \qquad (۱-۲-۸)$$

(۱-۲-۹) تعریف : چنانچه $\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+te_j)-f(\bar{x})}{t}$ وجود داشته باشد گوییم مشتق پاره‌ای f نسبت به x_j، در $\bar{x}$ وجود دارد که آنرا با نماد $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}$ نمایش می‌دهیم. [۶]

(۱-۲-۱۰) تعریف : اگر همهٔ مشتقات پاره‌ای f در $\bar{x}$ موجود باشند بردار گرادیان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و با نماد $\nabla f(\bar{x}) = (\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n})^t$ نشان می‌دهیم. [۶]

قضیه (۱-۲-۱۱) : اگر $f:E^n\to E$ در $\bar{x}\in E^n$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در $\bar{x}$ پیوسته است و همهٔ مشتقات پاره‌ای‌آن در $\bar{x}$ وجود دارند. [۶]

قضیه(۱-۲-۱۲) : فرض کنید $f:E^n\to E^1$، در $\bar{x}$ مشتق‌پذیر باشد اگر برای برخی $0\neq d\in E^n$ داشته باشیم. $\nabla f^t(\bar{x})d<0$ آنگاه $T>0$ وجود دارد به طوری‌که:

$$[۶]\ f(\bar{x}+td)<f(\bar{x}),\ \forall t,\ 0\leq t\leq T$$

نتیجه(۱-۲-۱۳) : فرض کنید $f:E^n\to E^1$ در $\bar{x}$ مشتق‌پذیر باشد اگر $\nabla f(\bar{x})\neq 0$ آنگاه بردار $d\in E^n$ و اسکالر $T>0$ وجود دارند به طوری که:

$$[۶]\ f(\bar{x}+td)<f(\bar{x}),\ \forall t,\ 0<t\leq T$$

اثبات: کافی است قرار دهیم $d=-\nabla f(\bar{x})$ آنگاه:

$$\nabla f^t(\bar{x})d=-\nabla f^t(\bar{x})\,\nabla f(\bar{x}) = -\left\|\nabla f(\bar{x})\right\|_2^2<0 .$$

(۱-۲-۱٤) تعریف : فرض کنید $S\subseteq E^n$ و $f:s\to E_1$، x^* را حداقل ساز سراسری f روی S گویند اگر $f(x^*)\leq f(x)$ ، $\forall x\in S$ ، $f(x^*)$ را کمینه کلی یا مطلق تابع f روی S گویند. [۶]

(۱-۲-۱۵) تعریف : $x^*\in S$ یک حداقل ساز ، موضعی است اگر

$\exists\delta>0, f(x^*)\leq f(x)\quad \forall x\in S, \left\|x-x^*\right\|\leq\delta$ از طرفی حداکثر ساز، موضعی نیز برای $x^*\in S$ به‌صورت: $\exists\delta>0, f(x^*)\geq f(x)\quad \forall x\in S, \left\|x-x^*\right\|\leq\delta$ بیان می‌شود. [۶]

قضیه(۱-۲-۱۶) : فرض کنید $f:E^n\to E^1$ بر روی E^n مشتق‌پذیر باشد اگر x^* یک

حداقل ساز موضعی (سراسری) در E^n باشد،آنگاه $\nabla f(x_*)=0$. [۶]

(۱-۲-۱۷)ساختار ریاضی برنامه ریزی غیرخطی مقید :

مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی مقابل را بررسی می کنیم

$$\min \; f(x)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} h_1(x)=0 \\ \vdots \\ h_m(x)=0 \\ g_1(x)\le 0 \\ \vdots \\ g_p(x)\le 0 \end{cases} \qquad (۱-۲-۱۸)$$

$$x\in\Omega\subset E^n$$

که $m\le n$ و توابع f، h_i، $i=1,\dots,m$ و g_j برای $j=1,\dots,p$ پیوسته‌اند و همیشه فرض می کنیم مشتق جزئی مرتبه دوم پیوسته نیز داشته باشند. برای تعریف ساده‌تر، ما بردارهای $h=(h_1,\dots,h_m)$ و $g=(g_1,\dots,g_p)$ را تعریف می‌کنیم و(۱-۲-۱۸) را به صورت:

$$\min \; f(x)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} h(x)=0 \\ g(x)\le 0 \\ x\in\Omega \end{cases} \qquad (۱-۲-۱۱)$$

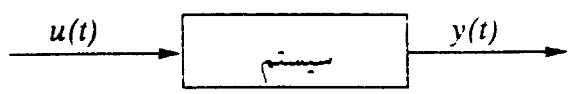
می نویسیم. [۶]

(۱-۳)کنترل وکنترل بهینه:

(۱-۳-۱) تعریف : حالت سیستم در هر لحظه t_0 مجموعه‌ای است باکمترین تعداد شرایط اولیه، $x_1(t_0),\dots,x_n(t_0)$ که جهت تعیین رفتار سیستم برای همهٔ زمانهای $t>t_0$، هنگامی که ورودی سیستم برای $t>t_0$ شناخته‌شده است کافی می‌باشد.

متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ به متغیرهای حالت معروف هستند. آنها را می‌توان به عنوان محورهای مختصات یک فضای n بعدی‌به نام‌فضای وضعیت در نظر بگیریم. هر وضعیت سیستم به وسیلهٔ یک نقطه در این فضای وضعیت نشان داده می‌شود. [۱]

(۱-۳-۲) تعریف : با تقریب‌های مناسب و با مولفه‌های دلخواه، اغلب رفتار دینامیکی یک سیستم را با یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام می‌توان توصیف نمود. در حالت کلی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه nام که یک ورودی و یک خروجی دارد (ببینید **شکل (۱-۳-۳)**) و یک معادلهٔ دیفرانسیل وابسته به صورت زیر دارد:



شکل (۱-۳-۳)

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n y = b_0 D^m u + b_1 D^{m-1} u + \dots + b_m u \qquad (۱-۳-۴)$$

که $u(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی است. در حالت کلی: $n \geq m$ که در این صورت سیستم سره نامیده می‌شود. در غیر این. اگر $m > n$. سیستم ناسره نامیده می‌شود.

وقتی ورودی و شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0), \dots, y^{(n)}(0)$ داده شوند، پاسخ خروجی $y(t)$ از حل (۱-۳-۴) به دست می‌آید. [۲]

(۱-۳-۵) تعریف : در نظریهٔ کنترل مدرن معمولاً از نمادهای زیر استفاده می‌کنند، $\dot y = \frac{dy}{dt}, \ddot y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^m y}{dt^n}$ و به این ترتیب معادلهٔ سیستم به صورت، (۱-۳-۳) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = U$، نوشته شده و فرض می‌شود که مقادیر زیر معلومند: $y(0), \dot y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$. حال اگر تعریف کنیم: $x_1 = y, x_2 = \dot y, \dots, x_n = y^{(n-1)}$ بنابراین $\dot x_1 = x_2, \dots, \dot x_{n-1} = x_n$ و از (۱-۳-۳) $\dot x_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u$، که آن را به صورت معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی برداری زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \vdots\\ \dot x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ -a_n & \dots & \dots & -a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u \qquad (۱-۳-۶)$$