بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای سیدحمیدرضا مفیدی** رشته **ریاضی کاربردی** تحت عنوان: **«خانواده‌ای از درونیاب‌های گویا و فرم گرانیگاهی آنها»** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد مشاور	دکتر محمدرضا اصلاحچی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر مصطفی شمسی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته   است که در سال

در دانشکده   دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار

خانم/جناب آقای دکتر   ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر

و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **سید حمیدرضا مفیدی** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: سید حمیدرضا مفیدی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۳/۳

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **سیدحمیدرضا مفیدی** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۷** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه/ رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هرگونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواه نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: مفیدی

تاریخ: ۱۳۹۰/۳/۲

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

خانواده ای از درونیاب های گویا وفرم گرانیگاهی آنها

توسط

سید حمیدرضا مفیدی

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

استاد مشاور

دکتر محمدرضا اصلاچی

قدردانی

سپاس و قدردانی ویژه از خانواده‌ی عزیز و مهربانم که همواره مدیون و مرهون محبت‌ها و دلگرمی‌های آنها هستم.

بدون شک شاگردی استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر حسینی، یکی از بزرگ‌ترین افتخاراتم در زندگی است. سخت‌کوشی، دقت‌نظر و احساس‌مسئولیت ایشان علاوه بر هرچه پربارتر شدن این پایان‌نامه، درس اخلاقی است که یادآوری آن آنچنان مرا به وجد می‌آورد که وصف نشدنیست. حقیقتا نمی‌دانم چگونه می‌توان ایشان را ستود. تنها می‌توانم بگویم از صمیم قلب ارادتمند و سپاسگزارشان هستم.

از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر اصلاحچی که رهنمودهایشان بویژه در انتخاب موضوع پایان‌نامه بسیار مفید بود سپاسگزارم. هرگز فراموش نخواهم کرد زمانی را که وقت گرانبهایشان را صبورانه و با سعه‌ی صدر صرف راهنمایی من و پاسخ‌گویی به سوالاتم می‌نمودند. زحمات بی‌دریغ ایشان را صمیمانه سپاسگزارم.

از دکتر ملک و دکتر شیربیشه که درطول تحصیل از محضرشان بهره‌مند شدم کمال تشکر را دارم.

همچنین از دکتر شمسی و دکتر حیدری که با دقت‌نظر پایان‌نامه را مطالعه فرموده و اشکالات را یادآور شدند متشکرم.

در پایان از همه‌ی دوستان عزیزم بویژه آقایان فاضل حدادی‌فرد، فرهاد نصراله‌زاده، رضا خاکسار و سجاد صادقی و همچنینن از خانم‌ها زرعی‌کار و گرجی که حقیقتا همگی مرا در مراحل پایان‌نامه یاری نمودند، صمیمانه سپاسگزارم.

حمیدرضا مفیدی

بهمن ۱۳۸۹

خانواده‌ای از درونیاب‌های گویا و فرم گرانیگاهی آنها

چکیده

مرجع اصلی این پایان نامه مرجع [۱۲] است و بر اساس آن خانواده ای از درونیاب‌های گویای گرانیگاهی معرفی و مزایای این درونیاب‌ها بررسی می‌شود، که قسمت عمده‌ی این مطالب در فصل سوم پایان‌نامه آورده شده است. از آنجاکه پیش از آن نیاز به بیان مطالبی مقدماتی می‌باشد، در فصل اول، تعاریف و مقدمات اولیه را بیان کرده، در فصل دوم، درونیاب لاگرانژ اصلاح شده و گرانیگاهی معرفی شده‌اند، که در واقع نقطه‌ی شروع درونیاب‌های گرانیگاهی می‌باشند و در مورد پایداری این روش‌ها نیز بحث می‌شود. در فصل سوم، وارد بحث درونیاب‌های گویا شده و پس از توضیح مختصری در مورد درونیاب‌های گویای کلاسیک و بیان برخی از مزایا و معایب آنها، همان‌طور که در بالا ذکر شد درونیاب‌های گویای گرانیگاهی در حالت کلی مورد بحث قرار می‌گیرد و در ادامه یک خانواده از این درونیاب‌ها نیز بطور کامل معرفی می‌شوند. در فصل چهارم، بر روی وزن‌های درونیاب‌های گویای گرانیگاهی متمرکز شده که همراه با قضایایی ارائه می‌گردد. در ادامه، درونیاب گویای گرانیگاهی جدیدی را که با حل یک مسأله‌ی بهینه سازی بدست می‌آید معرفی نموده که همراه با نتایج عددی مربوط آورده شده است. در سراسر پایان‌نامه هرجا که لازم بوده است مثال‌هایی آورده شده است.

واژه‌های کلیدی : درونیابی، درونیابی لاگرانژ، درونیابی گویا، فرمول گرانیگاهی، پایداری درونیاب گرانیگاهی، وزن‌های گرانیگاهی.

فهرست مندرجات

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

مقدمه

توابع چندجمله‌ای ساده‌ترین ابزار برای درونیابی توابع می‌باشند، اما حداقل به دو دلیل ترجیح می‌دهند کار با چندجمله‌ای‌ها را کنار گذاشته، به انواع دیگر درونیاب‌ها بپردازند. اولین دلیل، مشکل گره‌های درونیابی است، یعنی اگر در انتخاب گره‌ها آزاد نباشیم چندجمله‌ای‌ها ممکن است درونیاب‌های مناسبی نباشند، بدون درنظرگرفتن این‌که کدام روش برای درونیابی انتخاب شده باشد. دلیل دیگر این است که حتی در حالتی‌که گره‌های مناسبی برای درونیابی انتخاب شده باشند (برای نمونه انواع گوناگون گره‌های چبیشف [۱] یا لژاندر [۲]) ممکن است در عمل، درونیاب به‌کندی به جواب موردنظر همگرا باشد [۴]. بعنوان یک جایگزین مناسب می‌توان از توابع قطعه‌ای نظیر اسپلاین‌ها [۳] استفاده کرد [۱۰]. اما اگر همچنان کار با توابع تحلیلی موردنظر باشد، می‌توان درونیاب‌های گویا [۴] را بعنوان جایگزینی مناسب برای چندجمله‌ای‌ها انتخاب کرد. از طرفی درونیاب‌های چندجمله‌ای را می‌توان بعنوان زیرمجموعه‌ای از درونیاب‌های گویا درنظرگرفت (وقتی مخرج کسر یک باشد)، بنابراین از این بابت نیز درونیابی گویا تقریب مناسب‌تری نسبت به درونیابی چندجمله‌ای به حساب می‌آید. درونیاب‌های گویای کلاسیک مزایا و معایب متعددی دارند [۲۶] و باتوجه به معایبی که به آنها اشاره خواهد شد، درونیاب‌های گویای گرانیگاهی [۵] که هدف اصلی در این پایان‌نامه نیز، کار روی این

[۱] Chebyshev
[۲] Legendre
[۳] Spline
[۴] Rational
[۵] Barycentric

درونیاب‌ها می‌باشد، معرفی خواهند شد. درونیاب‌های گویای گرانیگاهی مزایای بسیاری دارند که در مقاله‌های مختلف به آنها اشاره شده است[۳، ۴، ۵]. از مهمترین آنها می‌توان به پایداری روش [۲۰] و همچنین سریع بودن آن [٦] اشاره کرد. درونیاب‌های گویای گرانیگاهی مختلف با وزن‌های گرانیگاهی متفاوت بدست می‌آیند. در مقاله‌های مختلف با معرفی وزن‌ها، مزایا و معایب درونیاب موردنظر بررسی شده است، بدین سبب وزن‌های گرانیگاهی بسیار حائز اهمیت می‌باشند. در این مقاله تمامی موارد ذکرشده بررسی خواهند شد.

تاریخچه‌ی فرم گرانیگاهی درونیاب‌ها

فرم گرانیگاهی درونیاب‌ها اولین بار در درونیابی چندجمله‌ای لاگرانژ بکار گرفته شد، سپس در درونیاب‌های گویا و مثلثاتی و ... نیز مورد استفاده قرار گرفت. می‌توان گفت بیش از ۶۰ سال از زمانی که این فرمول برای اولین‌بار مورد استفاده قرار گرفت گذشته است ولی بنا به دلایل مختلف کنار گذاشته شد و به‌همین دلیل دیرتر از آنچه که باید شناخته شد. بنظر می‌رسد برای اولین بار تیلور[۶] در سال ۱۹۴۵ در [۲۷] از این نمایش برای الگوریتم لاگرانژ روی نقاط هم‌فاصله استفاده کرد. داپی [۷] در سال ۱۹۴۸ در [۱۰] نام گرانیگاهی را برای این فرمول انتخاب کرد.

درسال ۱۹۷۳، همینگ [۸] برای اولین‌بار در [۱۶] بصورتی زیبا فرمول گرانیگاهی را بعنوان جایگزینی مناسب برای درونیاب لاگرانژ مطرح کرد، اما معلوم نیست به چه دلیلی در ویرایش بعدی کتاب خود این قسمت را حذف کرد، شاید نگرش وی چنین بوده که با ظهور کامپیوتر روش‌های مناسب‌تری برای محاسبه‌ی فرمول لاگرانژ معرفی خواهند شد. البته بعد از وی افراد دیگری ازجمله گوچی[۹]، هنریچی[۱۰] و ورنر[۱۱]، نیز در مقاله‌ها و کتاب‌های خود از این فرمول استفاده کردند بدون این که نامی از آن ببرند[۱۳، ۱۸، ۳۰] .

[۶] Taylor

[۷] Dupuy

[۸] Hamming

[۹] Gautschi

[۱۰] Henrici

[۱۱] Werner

اما می‌توان گفت بروت[۱۲] بیشترین سهم را در شکوفا کردن این فرمول داشته است. وی تلاش بسیاری برای هرچه بیشتر مطرح کردن این فرمول و برای بیان مزایای آن انجام داده و مقاله‌های بسیاری نیز در این زمینه ارائه داده است، بطوری‌که می‌توان گفت عمده‌ی کارهای علمی وی در همین زمینه است. در سال ۲۰۰۴، وی به همراه ترفتن[۱۳]، مقاله‌ی جامعی با عنوان درونیاب لاگرانژ گرانیگاهی ارائه کردند [٦] که این مقاله به عنوان مرجعی کامل برای افرادی که تمایل به انجام تحقیق در این زمینه را دارند به حساب می‌آید.

اشنایدر[۱۴] و ورنر اولین افرادی بودند که مزایای فرم گرانیگاهی درونیاب‌های گویا را بیان کردند[۲۴]. اگرچه بیشترین پیشرفت در درونیاب‌های گویای گرانیگاهی توسط بروت، و همچنین افرادی چون میتلمن[۱۵] و بالتنسپرگر[۱٦] انجام گرفت. در میان انواع درونیاب‌ها، فرم گرانیگاهی در درونیاب‌های گویا بیشترین پیشرفت را داشته است. افراد مختلف طی مقاله‌های مختلف سعی در پیدا کردن وزن‌های گرانیگاهی[۱۷] مناسب‌تر که سبب کمتر شدن خطای درونیاب می‌شود بوده‌اند.

همچنین بروت در مورد فرم گرانیگاهی درونیاب‌های مثلثاتی نیز مقاله‌هایی از جمله [۳] ارائه داده است. وی به‌همراه ولچر[۱۸] در [۷] نیز در همین زمینه کار کرده است. البته فرم گرانیگاهی تنها در درونیاب‌های چندجمله‌ای، گویا و مثلثاتی کاربرد ندارد و در زمینه‌های دیگری ازجمله در روش‌های طیفی[۱۹][۱۵]، انتگرال‌گیری دیفرانسیلی[۲۰] [۲] مورد استفاده قرار گرفته است، اگرچه ممکن است نامی از فرم گرانیگاهی ذکر نشده باشد.

---

[۱۲] Berrut
[۱۳] Trefethen
[۱۴] Schnider
[۱۵] Mittelmann
[۱٦] Baltensperger
[۱۷] Barycentric weights
[۱۸] Welscher
[۱۹] Spectral methods
[۲۰] Differential quadrature

بروت علاقه و اصرار زیادی به بکارگیری فرم گرانیگاهی درونیاب‌ها و گسترش هرچه بیشتر این فرمول دارد بطوری‌که در یکی از مقالات خود می‌گوید: « درونیابی گرانیگاهی موضوع جدیدی نیست، اما اکثر دانشجویان و دانشمندان ریاضی و حتی بسیاری از کسانی که آنالیزعددی کار می‌کنند چیزی درباره‌ی آن نمی‌دانند. سزاوار است که این ابزار ساده و درعین حال قدرت‌مند جایی در درس‌های مقدماتی و کتاب‌های آنالیزعددی داشته باشد [٦]. »

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول با برخی مفاهیم و تعاریف اولیه‌ی مورد نیاز در محاسبات کامپیوتری آشنا می‌شویم که از آنها در محاسبات عملی استفاده خواهد شد و همچنین در بحث پایداری، این تعاریف مورد نیاز خواهند بود. دربخش دوم برخی مفاهیم اولیه‌ی درونیابی و درونیاب‌های چندجمله‌ای معرفی خواهند شد.

۱.۱ نمایش اعداد حقیقی با سیستم نقطه شناور در کامپیوتر

فرض کنید $b \geq 2$ داده شده باشد، هر اسکالری مانند x را می‌توان در مبنای b بصورت زیر نمایش داد:

$$x = \pm m \times b^z \, , \tag{1.1.1}$$

که z عددی صحیح و m یک عدد حقیقی نامنفی است. بطور معمول در کامپیوترها $b = 2$ یا $b = 16$ است و همچنین برای نرمال سازی (۱.۱.۱) قرار می‌دهند $b^{-1} \leq m < 1$. وقتی x در (۱.۱.۱) در یک کامپیوتر نمایش داده می‌شود، تنها تعداد متناهی از ارقام m حفظ می‌شوند که به آن،

عدد نقطه شناور[1] گفته و با $fl(x)$ آن را نمایش می‌دهند و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$fl(x) = \pm ۰/m_۱m_۲ \ldots m_t \times b^z \ ,$$

که در آن t عددی متناهی است و m_i ها اعدادی صحیح هستند بطوریکه، $۰ \leq m_i < b$ و برای نرمال‌سازی قرار می دهند $m_۱ \neq ۰$. (عدد صفر در این حالت استثنا درنظر گرفته می‌شود.) در نمایش استاندارد $IEEE$، $k_۱ = ۱۲۶$ و $k_۲ = ۱۲۷$ و $-k_۱ \leq z \leq k_۲$ است. با تعاریف انجام شده در سیستم نقطه شناور، مقدار کوچک‌ترین عدد مثبت برابر است با:

$$(۰/۱۰۰ \ldots ۰)_b \times b^{-k_۱} = b^{-k_۱-۱} \ .$$

در واقع اگر C و D به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد مثبت، A و B بترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد منفی باشند دراین‌صورت،

$$\begin{array}{ll} A = -b^{-k_۱-۱} & , \quad B = -(۱ - b^{-t}) \times b^{k_۲} \\ C = b^{-k_۱-۱} & , \quad D = (۱ - b^{-t}) \times b^{k_۲} \ . \end{array}$$

درمحاسبات کامپیوتری برای هر عدد یکی از سه حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

۱) اگر عدد موردنظر در بازه‌ی $(B, ۰) \cup (۰, C)$ قرار بگیرد دراین صورت برنامه متوقف نمی‌شود، اما کامپیوتر آن عدد را برابر صفر قرار می‌دهد و در اصطلاح زیرریز[2] می‌گویند.

۲) اگر عددی از کران‌های بالا فراتر رود (یعنی ازA کوچکتر و یا از D بزرگتر باشد) در این‌صورت برنامه متوقف می‌شود و پیام ارسال می‌شود. این حالت را در اصطلاح سرریز[3] می‌گویند.

۳) اگر x عددی حقیقی باشد و در ناحیه زیرریز و سرریز واقع نشود، یعنی به شکل زیر باشد:

$$x = \pm(۰/m_۱m_۲ \ldots m_tm_{t+۱} \ldots)_b \times b^z \ ,$$

[1] Floating-point number

[2] Underflow

[3] Overflow

دراین‌صورت در ماشین با یکی از دو قاعده‌ی زیر نگهداری می‌شود:

—اگر ماشین عدد را قطع کند،

$$fl(x) = \pm(0/m_1 m_2 \dots m_t)_b \times b^z \ ,$$

—اگر ماشین عدد را گرد کند،

$$fl(x) = \begin{cases} \pm(0/m_1 m_2 \dots (m_t + 1))_b \times b^z & , \quad m_{t+1} \geq \frac{b}{2} \text{ اگر } \\ \pm(0/m_1 m_2 \dots m_t)_b \times b^z & , \quad m_{t+1} < \frac{b}{2} \text{ اگر } \end{cases} .$$

در حالتی که ماشین عدد را قطع کند، خطای مطلق و نسبی برای نقطه‌ای مثل x بصورت زیر تعریف می‌شوند: (که با تعاریف بالا در نامساوی‌های زیر نیز صدق می‌کنند)

$$\text{خطای مطلق} = \quad |fl(x) - x| \quad \leq b^{1-t}|x| \ ,$$

$$\text{خطای نسبی} = \quad \frac{|fl(x) - x|}{|x|} \quad \leq b^{1-t} \ .$$

تعریف ۱.۱.۱ (رند عدد یک):

کوچک‌ترین عدد $u > 0$، بطوری‌که در نمایش عدد اثر گذارد را رند عدد یک می‌نامند و برابر است با:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} b^{1-t} & ; \quad \text{اگر ماشین عدد را گرد کند} \\ b^{1-t} & ; \quad \text{اگر ماشین عدد را قطع کند} \end{cases} .$$

اگر خطای نسبی در بالا را با δ نشان دهیم یعنی $\delta = \frac{fl(x)-x}{x}$، دراین‌صورت مهم‌ترین کاربرد رند عدد یک این است که خطای نسبی در ماشین، همواره کوچک‌تر یا مساوی u است، یعنی $|\delta| \leq u$.

در ضمن داریم:

$$fl(x) - x = x\delta \Rightarrow \quad fl(x) = x(1 + \delta) \quad , \quad |\delta| \leq u \ .$$

همچنین برای هر دو عدد a و b، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$fl(a \ op \ b) = (a \ op \ b)(1 + \delta), \qquad (۲.۱.۱)$$