بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی (گرایش آنالیز)

تعمیم خواصی از جبر های LMC به جبرهای موضعا محدب

از:
علی ظهری

استاد راهنما:
دکتراسماعیل انصاری پیری

۱۳۸۸

تقدیر وتشکر

سپاس بی کران ایزد منان را که فرصت کسب علم بر این بنده ناچیز خود عطا فرمود تا از حضور صاحبان فضل و علم و اندیشه بهره‌ها برد و توشه ها گیرد.
نهایت سپاس و تقدیر خود را به پیشگاه استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری پیری که اینجانب را به شاگردی پذیرفته و از هیچ تلاشی در راه اعتلای علمی و پربارتر شدن اندوخته ریاضی اینجانب فروگذار نکردند، تقدیم می دارم. از محبت های پدرانه شان صمیمانه سپاسگزارم، و از درگاه حی لایزال می خواهم که سایه ایشان را بر سر فرزندان علمی شان همواره مستدام گرداند.
از جناب آقای دکتر احمد عباسی، مدیر محترم گروه ریاضی و اساتید محترم تحصیلات تکمیلی گروه تقدیر و تشکر می نمایم.
از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر نژاددهقان و جناب آقای دکتر عباس سهله وجناب آقای دکتراصغر ورسه ای که زحمت داوری این رساله را تقبل، و توصیه های ارزشمندی ارائه فرمودند، نهایت تقدیر و تشکر را دارم.

علی ظهری

تابستان ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

چکیده: در این رساله خواصی از جبرهای LMC (موضعاً محدب ضربی) به جبرهای موضعاً محدب (LC) تعمیم داده شده است.در برخی از موارد این تعمیم به طور مستقیم از جبرهای LMC به جبرهای LC صورت گرفته ودر بعضی از موارد دیگر با تعمیم خواصی از جبرهای LMC به جبرهای بنیادی تعمیم بیشتری صورت گرفته است. در بخش دیگری از رساله شرط لازم برای وجود جذر و شبه جذر و ریشهnام یک عضو در یک جبر بنیادی و در واقع شرط وجود جواب معادله $x^n = y$ ارائه سپس قضایایی در وارون پذیری وشبه وارون پذیری اعضای یک جبر LMC در مورد اعضای یک جبر بنیادی به اثبات رسیده است. موضوع جبرهای طیفی نیز به عنوان آخرین فصل رساله آورده شده است.

کلید واژه: فضای برداری توپولوژیک، جبر توپولوژیک، جبر بنیادی، جبر موضعا محدب، جبر موضعا محدب ضربی، شبه جذر، ریشهnام، مجموعه تقریبگر، واحد تقریبی، جبر طیفی، باناخ پیش فشرده.

Abstract

In this thesis, we have generalized some properties of locally multiplicatively convex topological algebras to locally convex algebras.

The conditions for the existence of n^{th} root and quasi square root of an element in a complete metrizable LMC algebra is also generalized for fundamental topological algebras. The last section of thesis is a discussion on spectral algebras.

Keywords: topological vector space, topological algebra, fundamental topological algebra, locally convex topological algebra, Arens Michael algebra, quasi square root, approximating set, approximate identity, spectral algebra, Banach precompact element.

فصل ۱

مقدمه

این رساله در هفت فصل تدوین شده است. فصل اول ودوم شامل مقدمه و مطالب مورد نیاز است. فصل سوم به معرفی جبرهای موضعا محدب وموضعا محدب ضربی اختصاص یافته است. در فصل چهارم برخی از خواص جبرهای موضعا محدب ضربی به جبرهای موضعا محدب تعمیم داده شده است. در فصل پنجم خواصی از جبرهای موضعا محدب ضربی از طریق جبرهای بنیادی (که خود تعمیمی از جبرهای موضعا محدب هستند)، به جبرهای موضعا محدب تعمیم داده می شود. فصل ششم به جبرهای طیفی که شامل جبرهای موضعا محدب ضربی نیز می باشد، اختصاص یافته و فصل هفتم ضمیمه ای شامل نمادهای به کاررفته در رساله و فهرست موضوعی است.

۱.۱ اهمیت جبرهای توپولوژیک غیرنرمدار

جبرهای غیرنرمدار از دوجنبه دارای اهمیت می باشند. ازجنبه نظری (بدون در نظر گرفتن کاربرد) اثبات یک قضیه بدون در نظر گرفتن فرض های زیاد همواره مورد توجه بوده است، علاوه بر آن دامنه شمول مفاهیم را نیز گسترش می دهد.
از نظر کاربردی بسیاری از جبرهای مورد استفاده در ریاضی مانند $C^{\infty}[0,1]$ و $L^{\omega}[0,1]$ غیر نرمدارند. نیمارک ریاضیدان مشهور روسی نیاز به گسترش جبرهای توپولوژیک غیر نرمدار را مانند جبرهای باناخ به لحاظ کاربردشان در ریاضیات محض ومکانیک کوانتوم یادآور شده است [۱۹].

۲.۱ مقدمه تاریخی

جبر های باناخ در سال ۱۹۲۲ توسط استیفان باناخ معرفی شد. پس از ظهور مقاله اساسی گلفاند «حلقه های نرمدار» در سال ۱۹۴۱ نظریه جبرهای باناخ مورد توجه شدید ریاضی دانان قرار گرفت زیرا گلفاند توانسته بود قضیه مشهور وینر را با استفاده از جبرهای باناخ به زیبایی اثبات کند. از آن به بعد جبر های باناخ موضوع پژوهش‌های فراوانی قرار گرفت و گسترش قابل ملاحظه‌ای پیدانمود؛ اما اقدامی جدی برای گسترش خواص این جبرها به حالت عمومی جبر های توپولوژیک صورت نگرفت. شرط نرمدار بودن و کامل بودن شرط سنگینی بود. ریاضیدانان سعی در جایگزینی شرایط خفیفتری به جای شرط جبر باناخ، نمودند. در سال ۱۹۴۶ ریچارد آرنز اولین بار جبرهای LMC را تحت عنوان $pseudo-normed\ \ algebras$ به کار برد[۱۹]. اولین و اساسی ترین نتایج در مورد این جبرها از آن ارنست مایکل است. ارنست مایکل در سال ۱۹۵۲ جبرهای توپولوژیک موضعاً محدب ضربی
را برای تعمیم خواص جبرهای نرمدار مورد مطالعه قرار داد.
ارنست مایکل ثابت کرد که :[۲۱]
۱— هر جبر نرمدار LMC است.
۲—هر زیر جبر یک جبر LMC نیز در توپولوژی نسبی LMC است.
۳—یکدار شده یک جبر LMC باز LMC است.
۴—هر گاه A یک جبر LMC و I یک ایده‌آل بسته دو طرفه از A باشد A/I نیز LMC است .
همچنین قضیه مهم زیر از نتایج کار های ارنست مایکل می‌باشد: [۲۱]
قضیه: یک جبر توپولوژیکی LMC است اگر و فقط اگر با یک زیر جبر از حاصلضرب دکارتی جبرهای نرمدار یکریخت باشد.
بعد از ارنست مایکل موضوع از ابعاد مختلف مورد بررسی قرار گرفت و نتایج متعددی حاصل شد، که برخی از آنها را در این رساله مورد بررسی قرار می دهیم.
قضیه معروف تجزیه کوهن($Cohen$) درسال ۱۹۵۹ برای جبرهای باناخ طرح و حل شد.
در سال ۱۹۶۹ کراو $I.G.Craw$ آن را برای جبرهای LMC کامل و متر پذیر تعمیم داد.
در سال ۱۹۸۱دیکسون $P.G.Dixon$ این قضیه را برای جبرهای موضعا محدب با شرطی اضافه روی واحد تقریبی اثبات کرد. تعمیم این قضیه برای جبرهای موضعا کراندار نیز توسط زلاسکوانجام شده بود.
در سال ۱۹۹۰ دکتر انصاری برای تعمیم قضیه تجزیه کوهن به رده ای وسیعتر از جبرهای موضعاً محدب و موضعاً کراندار مفهوم جدید فضاهای برداری توپولوژیک بنیادی و جبرهای توپولوژیک بنیادی را ارایه وقضیه تجزیه کوهن را به این جبرهاگسترش دادند[۱].

این جبرها تعمیم جبرهای موضعاً محدب و موضعاً کراندار می‌باشند که بخشی از مطالب این رساله را به خود اختصاص می‌دهد.

۳.۱ تبیین موضوع

موضوع اصلی این رساله بررسی و تبیین خواصی از جبرهای LMC است که در جبرهایی با شرایط ضعیف‌تر از جمله جبرهای موضعاً محدب، جبرهای بنیادی وحتی در برخی موارد در تمام جبرهای توپولوژیک برقرارند. طبیعی است که در این خصوص خواصی که از جبر های LMC به جبر های موضعاً محدب انتقال نمی یابند نیز دارای اهمیت هستند. مثلاً در جبرهای LMC طیف هر عضو ناتهی است[۲۱] ، در حالیکه در جبرهای موضعاً محدب چنین نیست. یعنی این ویژگی جبرهای LMC را نمی توان به جبرهای موضعاً محدب تعمیم داد. به عنوان یک ویژگی غیر قابل تعمیم از جبرهای LMC به‌جبرهای موضعاً محدب می توان از این ویژگی نام برد که هر جبر LMC را می توان به صورت حاصلضرب دکارتی جبرهای نرمدار در نظر گرفت[۲۱] . این ویژگی شرط لازم و کافی برای LMC بودن جبر است پس به جبرهای موضعاً محدب قابل انتقال نمی باشد. در مورد این گونه ویژگی ها در فصل سوم مفصل تر بحث شده است.

فصل ۲

مقدمات و مطالب مورد نیاز

در این فصل تعاریف و قضایایی که در سراسر این رساله مورد نیاز می باشند را بیان می کنیم. قرارداد می کنیم که F را میدان حقیقی یا مختلط می گیریم. همچنین اثبات قضایای مطرح شده در این فصل را در مراجع [۱۲] و [۱۱] و [۲۱] می توان دید.

۱.۲ تعاریف

تعریف ۱.۱.۲ فضای برداری توپولوژیک X یک فضای برداری روی میدان F همراه با یک توپولوژی τ با خواص زیر است:

۱) به ازای هر $x \in X$ مجموعه $\{x\}$ بسته است.

۲) تابع جمع پیوسته است.

۳) تابع ضرب اسکالر پیوسته است.

در این صورت τ را یک توپولوژی برداری روی X می نامند.[۱۲]

تعریف ۲.۱.۲ زیر مجموعه E در یک فضای برداری توپولوژیک X، کراندار است اگر برای هر همسایگی صفر V در X، $s > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $t > s$ داشته باشیم $E \subseteq tV$.

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنید X یک فضای برداری است. در این صورت:

۱) $A \subseteq X$ رامحدب می نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$

۲) $A \subseteq X$ را موزون می نامیم اگر برای هر $x \in A$ و هر α که $|\alpha| \leq 1$ داشته باشیم $.\alpha x \in A$

۳) $A \subseteq X$ را جاذب می نامیم اگر برای هر $x \in A$ ، $\lambda > 0$ ای موجود باشد، بطوریکه داشته باشیم $.\lambda^{-1} x \in A$

تعریف ۴.۱.۲ فرض کنید S فضای توپولوژیکی باشد. مجموعه $E \subseteq S$ هیچ جا چگال نامیده می شود اگر درون بستار E تهی باشد. مجموعه ای که به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه های هیچ جا چگال در S باشد را از رسته اول در S می نامیم. هر زیر مجموعه ای از S که از رسته اول نباشد را از رسته دوم می نامیم.

تعریف ۵.۱.۲ فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیک و Γ گردایه ای از توابع خطی از X بتوی Y باشند. گوییم Γ همپیوسته

ه است اگر برای هر همسایگی W از صفر در Y، یک همسایگی V از صفر در X موجود باشد بطوریکه برای هر $\Lambda \in \Gamma$، $.\Lambda(V) \subseteq W$

تعریف ۶.۱.۲ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را F — فضا گوییم اگر توپولوژی آن توسط یک متر پایای تام القا شود.

تعریف ۷.۱.۲ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را موضعاً محدب نامیم اگر پایه موضعی β برای X موجود باشد که اعضایش محدب باشند.

تعریف ۸.۱.۲ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را موضعاً کراندار نامیم اگر صفر یک همسایگی کراندار داشته باشد.

تعریف ۹.۱.۲ فرض کنید X, Y, Z فضاهای برداری توپولوژیک و B تابعی از $X \times Y$ به Z باشد. به ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$ نگاشت های زیر را وابسته می کنیم :

$$B_x : Y \to Z \qquad\qquad B^y : X \to Z$$

$$B_x(y) = B(x, y) \qquad\qquad B^y(x) = B(x, y)$$

Bبه طور مجزا پیوسته نامیده می شود، هرگاه همه B_x ها وهمه B^y ها پیوسته باشند. هرگاه B نسبت به توپولوژی حاصلضربی پیوسته باشد، پیوسته همزمان نامیده می شود. بدیهی است پیوستگی همزمان پیوستگی به طور مجزا را ایجاب می کند، ولی نه برعکس.

تعریف ۱۰.۱.۲ یک جبر توپولوژیک عبارت است از یک فضای برداری توپولوژیک که همراه با یک ضرب (که به طور مجزا پیوسته است) یک جبر شرکت پذیر باشد.

تعریف ۱۱.۱.۲ فضای برداری توپولوژیک A را بنیادی نامیم اگر $b > ۱$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله (x_n) از A، از همگرایی $b^n(x_n - x_{n-۱})$ به صفر، کوشی بودن (x_n) نتیجه شود.

تعریف ۱۲.۱.۲ یک جبر توپولوژیک A که فضای برداری توپولوژیک آن بنیادی باشد یک جبر توپولوژیک بنیادی نامیده می شود.

تعریف ۱۳.۱.۲ جبر توپولوژیک بنیادی A را موضعاً ضربی می نامیم وبه اختصار با نماد FLM نشان می دهیم اگر همسایگی $U_۰$ ازصفر چنان موجود باشد، که برای هر همسایگی صفر مانند V، توانهای به اندازه کافی بزرگ $U_۰$ زیرمجموعه V باشند.

تعریف ۱۴.۱.۲ فضای دوگان یک فضای برداری توپولوژیک X، فضای برداری X^* است که اعضای آن تابعک های خطی و پیوسته روی X هستند. اگر X نرمدار باشد، X^* با نرم $||\Lambda|| = sup\{|\Lambda(x)| : ||x|| \leq ۱\}$ فضای باناخ است.

تعریف ۱۵.۱.۲ فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X \to Y$ را ضربی گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $f(xy) = f(x)f(y)$.

تعریف ۱۶.۱.۲ یک زیر مجموعه U از یک جبرتوپولوژیک خود توان نامیده می شود هرگاه $U^{۲} \subset U$. یک مجموعه خودتوان را m—محدب می نامیم هرگاه محدب باشد.
به عنوان مثالهایی از مجموعه های m—محدب می توان به خود یک جبر، $\{۰\}$ وگویهای واحد باز وبسته در جبرهای نرمدار اشاره کرد. درحالت کلی برای هر $۱ > \delta > ۰$ گوی $B(۰, \delta)$، mـمحدب است.

تعریف ۱۷.۱.۲ فرض کنید X جبر توپولوژیک موضعاً محدب و $\{p_\alpha\}$ یک خانواده از نیم نرمهای زیر ضربی روی X باشد که‌توپولوژی آنرا تولید می کنند. در این صورت X را موضعامحدب ضربی می نامیم وبانماد اختصاری LMC نشان می دهیم.

تعریف ۱۸.۱.۲ یک جبر توپولوژیک LMC کامل؛ جبر آرنز مایکل نامیده می شود.

تعریف ۱۹.۱.۲ فرض کنید A جبر یکدار باشد. مجموعه اعضای معکوس پذیر در جبر A نسبت به عمل ضرب را با $Inv(A)$ و مجموعه اعضای معکوس ناپذیر در جبر A را با $Sing(A)$ نشان می دهیم.

فرض کنید A جبر بدون یکه باشد. به دو روش می توان در مورد A عمل کرد تا مطالعه معکوس پذیری به نوعی ممکن گردد.
۱) اضافه کردن عضو یکه به جبر.
۲) با استفاده از مفهوم شبه ضرب.

تعریف ۲۰.۱.۲ یکدار شده جبر نرمدار A روی میدان F را با نماد $A \oplus F$ نشان می دهیم و جبر نرمداری تعریف می کنیم که شامل مجموعه $A \times F$ با جمع، ضرب اسکالر و ضرب تعریف شده برای هر $x, y \in A$ و $\alpha, \beta \in F$ به صورت زیر می باشد:
۱) $(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta)$.
۲) $\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta\alpha)$.
۳) $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$.

تعریف ۲۱.۱.۲ برای هر دو عنصر دلخواه x,y در جبر A، شبه ضرب x و y را با نماد $x \circ y$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود: $x \circ y = x + y - xy$.

تعریف ۲۲.۱.۲ فرض کنید A یک جبر و $a \in A$. a را شبه معکوس پذیر نامیم اگر $b \in A$ ای موجود باشد بطوری که $a \circ b = b \circ a = 0$. مجموعه اعضای شبه معکوس پذیر A را با نماد $q - Inv(A)$ و مجموعه اعضای شبه معکوس ناپذیر A را با نماد $q - Sing(A)$ و شبه وارون a را با a° نشان می دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۲ جبر A مفروض است. طیف $a \in A$ را با نماد $Sp(A,a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱) اگر A یکدار باشد، $Sp(A,a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \in Sing(A)\}$ ،

۲) اگر A بدون یکه باشد،

$$Sp(A,a) = \{0\} \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda^{-1} a \in q - Sing(A)\}.$$

تعریف ۲۴.۱.۲ در جبر مفروض A، شعاع طیفی $a \in A$ را با نماد $r_A(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$r_A(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A,a)\}.$$

تبصره ۲۵.۱.۲ در جبرهای توپولوژیک مجموعه اعضایی از جبر که دارای شعاع طیفی کراندار هستند دارای اهمیت می باشد. این مجموعه‌را با

$$B(A) = \{x \in A : r_A(x) < \infty\}.$$

نشان می دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۲ فرض کنید A یک جبر باشد و $a \in A$. کوچکترین زیر جبر بسته A شامل a را با $A(a)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۷.۱.۲ فرض کنید X یک جبر توپولوژیک موضعا محدب باشد که توپولوژی آن با خانواده $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از نیم نرمها تولید می شود. مجموعه $E \subseteq X$ کراندار یکنواخت نامیده میشود هرگاه $M > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x \in E$ و هر $\lambda \in \Lambda$ داشته باشیم $p_\lambda(x) < M$.

تعریف ۲۸.۱.۲ فرض کنید X یک جبر توپولوژیک باشد. مجموعه $E \subseteq X$ بطور یکنواخت کراندار توانی نامیده می شود هرگاه $K > 0$ وجود داشته باشد که‌مجموعه $\{k^{-n}x^n : x \in E; n \in N\}$ یک زیر مجموعه کراندار از X باشد.

تعریف ۲۹.۱.۲ در یک جبر توپولوژیک X یک مجموعه $U \subset X$ تقریبگر چپ نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in X$ و هر همسایگی V از صفر یک $u \in U$ وجود داشته باشد به طوری که $(x - ux) \in V$.

تعریف ۳۰.۱.۲ دریک جبرتوپولوژیک X، یک شبکه$(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، یک واحد تقریبی ضعیف چپ نامیده می شود هرگاه برای هرتابعک خطی پیوسته f بر X داشته باشیم:

$$\forall x \in X \qquad \lim_\lambda f(e_\lambda x) = f(x)$$

تعریف ۳۱.۱.۲ فرض کنید X یک جبر توپولوژیک باشد؛ یک واحد تقریبی چپ برای X عبارت است از یک شبکه $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ بطوریکه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $e_\lambda x - x \to 0$.

تعریف ۳۲.۱.۲ دریک جبر توپولوژیک X برای $A, B \subseteq X$ حاصلضرب کوازی A, B را چنین تعریف می کنیم:

$$AoB = \{aob : a \in A, b \in B\}.$$

تعریف ۳۳.۱.۲ هرگاه X یک فضای برداری توپولوژیک باشد؛ یک ایده‌آل چپ برای X عبارت است از یک زیر فضای برداری J به طوری که $AJ \subset J$.

تعریف ۳۴.۱.۲ $u \in X$ را یک واحد مدولار راست برای زیر فضای E از X می نامیم هر گاه $A(1-u) \subset E$.

تعریف ۳۵.۱.۲ یک ایده آل چپ L از جبرواحددار X با عضو واحد e مدولر نامیده می شود هرگاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $x - xe \in L$.

۲.۲ قضایا

قضیه ۱.۲.۲ اگر X یک فضای برداری توپولوژیک و U یک همسایگی از صفر باشد، یک همسایگی متقارن V از صفر وجود دارد که: $V + V \subseteq U$.

قضیه ۲.۲.۲ اگر β یک پایه موضعی برای فضای برداری توپولوژیک X باشد، آنگاه به ازای هر $V \in \beta$، $U \in \beta$ ای وجود دارد به طوری که $\overline{U} \subseteq V$(قضیه ۱.۱۱) [۱۲] .

قضیه ۳.۲.۲ هر فضای برداری موضعاً محدب و موضعاً کراندار یک فضای برداری نرمدار است.

قضیه ۴.۲.۲ فرض کنید A یک جبرتوپولوژیک بنیادی کامل متریذیر باشد و $x \in A$. هر گاه $b > 1$ وجود داشته باشد که $b^n x^n \to 0$ در A آنگاه :

الف) x شبه وارون پذیر است و $x^\circ = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ؛

ب)هرگاه A دارای واحد باشد آنگاه $1 - x$ وارون‌پذیر است و

$$(1-x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

قضیه ۵.۲.۲ (قضیه رسته ای بئر) اگر S فضای متریک تام و یا فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد، آنگاه اشتراک هر گردایه شمارا از زیر مجموعه های باز چگال از S در S چگال است.

گزاره ۶.۲.۲ هر فضای برداری موضعاً محدب یک فضای برداری بنیادی است.[۴]

گزاره ۷.۲.۲ هر فضای برداری موضعاً کراندار یک فضای برداری بنیادی است.[۴]

گزاره ۸.۲.۲ فرض کنید A یک فضای برداری توپولوژیک بنیادی باشد؛ آنگاه برای هر $c > ۱$ و هر دنباله (a_n) از A همگرایی $c^n(a_{n-۱} - a_n)$ به صفر در A ایجاب می کند که (a_n) یک دنباله کوشی است.[۱]

فصل ۳

جبرهای موضعا محدب

۱.۳ جبرهای موضعاً محدب کامل و متر پذیر

این فصل برای آشنایی بیشتر به معرفی برخی از خواص مهم جبرهای موضعا محدب وموضعا محدب ضربی اختصاص دارد. در فضاهای برداری موضعاً محدب نیم نرمها نقش اساسی دارند، در هر فضای برداری موضعاً محدب خانواده ای از نیم نرمهای پیوسته و جدا کننده وجود دارد که توپولوژی فضا را ایجاد می کند، و برعکس هر گاه خانواده ای از نیم نرمها پیوسته وجداکننده روی یک فضای برداری تعریف شده باشد، می توان این خانواده از نیم نرمها را برای تعریف یک توپولوژی موضعاً محدب روی این فضا به کار برد که هر عضو این خانواده در آن توپولوژی پیوسته شود. درواقع اگر $\mathcal{P}$ خانواده جداکننده از نیم نرمها بر X باشد، آنگاه به ازای هر $p \in \mathcal{P}$ اعضای یک پایه موضعی در $x \in X$ به صورت

$$V(p,n) = \left\{x : p(x) < \frac{1}{n}\right\}$$

خواهد بود.[۱۲]

تعریف ۱.۱.۳ در یک فضای برداری X، برای زیرمجموعه محدب و جاذب $A \subset X$ تابعک مینکوفسکی را چنین تعریف می کنیم:

$$\mu_A : X \to \mathbb{R}$$

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in A\}, \quad x \in X.$$

هرگاه X فضای برداری موضعاً محدب مترپذیر باشد، دراین صورت گویهای به شعاع $\frac{1}{n}$ به مرکز $x \in X$ ، با متر مناسبی تشکیل یک پایه موضعی در x می دهند. بنابراین خانواده نیم نرم های تولید کننده توپولوژی را می توان شمارا در نظر گرفت. یعنی اگر (p_λ) خانواده تولید کننده توپولوژی فضا باشد، زیر خانواده شمارای (p_n) نیز توپولوژی فضا را تولید می کند.

تعریف ۲.۱.۳ دو خانواده Γ و Γ' از نیم نرمها را معادل می نامیم هرگاه توپولوژی یکسان تولید کنند. در این صورت نماد $\Gamma \sim \Gamma'$ رابه کار خواهیم برد.

می توان دنباله (q_n) از نیم نرم ها را که با (p_n) معادل است، به صورت زیر تعریف کرد:

$$q_n(x) = Max\{p_1(x), \cdots, p_n(x)\}$$

بدیهی است در این صورت (q_n) صعودی خواهد بود یعنی:

$$q_n \leq q_{n+1} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

در هر جبر توپولوژیک عمل ضرب به طور مجزاپیوسته است[۲۰]. در جبرهای نرمدار و LMC وجبرهای موضعا محدب کامل متر پذیر عمل ضرب پیوسته همزمان است.[۱۲] هر چند در جبرهای موضعاً محدب غیر LMC رابطه

$$p(xy) \leq p(x)p(y)$$

برقرار نمی باشد، ولی در صورت کامل و متر پذیر بودن جبر، رابطه ای شبیه به آن را می توان به دست آورد، که در تعمیم خواص جبر های LMC به جبر های موضعاً محدب مورد استفاده قرار می گیرد.

گزاره ۳.۱.۳ در یک جبر توپولوژیک موضعاً محدب کامل متریذیر می توان‌دنباله (p_i) از نیم نرمها را که مولد توپولوژی فضاست چنان انتخاب کرد که

$$p_i(xy) \leq p_{i+1}(x)p_{i+1}(y)$$

اثبات: فرض کنید (p_n) یک دنباله از نیم نرمها باشد که توپولوژی را تولید می کند، بنا به آنچه در قبل آمد، بدون اینکه خللی به اثبات وارد شود می توان دنباله (p_n) را صعودی در نظر گرفت.