بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان‌نامه:

مطالعه‌ای بر توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته توان‌دار

علیرضا سلیمی

استاد راهنما: سرکار خانم دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور: آقای دکتر علیرضا نعمت اللهی

شهریور ۹۰

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس
باسمه تعالی

تاریخ : .....
شماره : .....
پیوست : .....

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **آقای علیرضا سلیمی** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۸۸۰۰۰۳۶۷۵ با عنوان:**

" مطالعه‌ای بر توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته‌ی توان‌دار "

با حضور هیات داوران در روز **شنبه** مورخ **۱۳۹۰/۶/۱۲** ساعت **۱۳ صبح** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۹/۰۰ به حروف نوزده تمام با درجه عالی تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر نرگس عباسی	راهنما	دانشیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر علیرضا نعمت‌الهی	مشاور	دانشیار	شیراز	
۳	آقای عبدالرضا بازرگان لاری	داور	استادیار	شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۶۲۲۲۲۴۰-۰۷۱۱
دورنگار: ۶۲۲۲۲۴۹-۰۷۱۱
صندوق پستی :۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب علیرضا سلیمی دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان‌نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود. دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو

علیرضا سلیمی

تاریخ و امضاء

اینجانب علیرضا سلیمی دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی گواهی می‌نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو

علیرضا سلیمی

تاریخ و امضاء

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می‌باشد.

شهریور ۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که همواره

مهری بی دریغ را

نثارم کرده‌اند.

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید بر نعمت. اکنون که به لطف پروردگار توانسته‌ام گامی در عرصه علم و تحقیق بردارم، وظیفه خود می‌دانم که از تمام اساتید محترم، دانشجویان گرامی و دوستان عزیزی که مرا در این راه یاری کرده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد ارجمند سرکار خانم دکتر نرگس عباسی ابراز می‌دارم که با توجه و مساعدت ایشان تدوین این پایان‌نامه میسر شد.

با سپاس از جناب آقای دکتر علیرضا نعمت اللهی که همواره از نظرات، راهنمائی‌ها و محضرشان استفاده نموده‌ام.

در خاتمه سپاس بی‌دریغ خود را به پدر و مادر مهربانم که همواره حامی و پشتیبان اینجانب در طول تحصیل و زندگی بوده‌اند، نثار می کنم.

چکیده

مدل‌سازی و تحلیل داده‌های بقا از جنبه‌های مهم علم آمار بشمار می‌رود که دارای کاربردهای وسیع و گسترده در بسیاری از علوم مختلف می‌باشد. توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته از جمله توزیع‌هایی است که در تحلیل داده‌های بقا مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پایان‌نامه توزیع جدیدی را که تعمیمی از چند مدل موجود در تحلیل داده‌های بقا می‌باشد را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که این توزیع جدید دارای ویژگی‌های مطلوب‌تری نسبت به توزیع‌های موجود در تحلیل داده‌های بقا می‌باشد. گود[1](۱۹۵۳) توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته را برای مدل‌سازی و تحلیل داده‌های بقا معرفی کرد که یکی از پرکاربردترین توزیع‌ها در این زمینه می‌باشد. بر مبنای این توزیع، در این پایان‌نامه توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته توان‌دار را که در واقع تعمیمی از توزیع گامای استاندارد است را معرفی کرده و ویژگی‌های توزیع جدید را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

[1] Good

فهرست مطالب

عنوان ..... صفحه

فصل اول ۱

۱–۱ مقدمه ۲

۱–۲ مروری بر علم قابلیت اعتماد ۲

۱–۲–۱ مفهوم قابلیت اعتماد و اهمیت آن ۳

۱–۳ معرفی برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد ٤

۱–۳–۱ تعاریف و اصطلاحات ٤

۱–۳–۲ تابع مخاطره ۷

۱–۳–۳ معرفی سیستم‌های مرکب و توابع ساختار آن‌ها ۹

۱–۴ قابلیت اعتماد ۱۱

۱–۴–۱ تابع قابلیت اعتماد ۱۱

۱–۴–۲ قابلیت اعتماد سیستم‌های مرکب ۱۷

۱–۵ مروری بر توزیع‌های مهم در قابلیت اعتماد ۲۵

۱–۵–۱ توزیع نمایی ۲٦

۱–۵–۲ توزیع لگ نرمال ۳۰

۱–۵–۳ توزیع وایبل دو پارامتری ۳۳

۱–۵–۴ توزیع گاما ۳٦

فصل دوم ٤۰

۲–۱ مقدمه ٤۱

۲–۲ توزیع گاوسی معکوس ٤۱

۲–۲–۱ برآورد پارامترها ٤٦

۲–۳ معرفی توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته ٤۷

۲–۳–۱ تابع توزیع ٤٩

۲–۳–۲ رابطه با توزیع‌های دیگر و تابع قابلیت اعتماد ٥٢

۲–۳–۳ گشتاورها و تابع مولد گشتاور ٥٤

۲–۳–۴ تابع چندک ٥٤

فصل سوم ٥٨

۳–۱ مقدمه ٥٩

۳–۲ معرفی توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته توان‌دار ٥٩

۳–۳ رابطه با توزیع‌های دیگر و تابع قابلیت اعتماد ٦١

۳–۴ ویژگی‌های آماری ٦٢

۳–۴–۱ تابع چندک ٦٣

۳–۴–۲ فرم آمیخته ٦٤

۳–۴–۳ گشتاورها و آماره‌های ترتیبی ٦٥

۳–۴–۴ انحراف میانگین و آنتروپی رنی ٦٩

۳–۵ قابلیت اعتماد ٧١

فصل چهارم ٧٥

۴–۱ مقدمه ٧٦

۴–۲ برآورد پارامترها ٧٦

۴–۳ حدود اطمینان مجانبی ٧٨

۴–۴ کاربرد ٨٢

۴–۵ نتیجه گیری ٨٦

پیوست ٨٧

منابع ٩٥

فصل اول

مقدمه و دورنما

۱–۱ مقدمه

اصطلاح $Reliability$ در فرهنگ علمی آمار در ایران "قابلیت اعتماد" یا قابلیت اطمینان معرفی شده است ولی در رشته های مهندسی و مدیریت و نیز علوم انسانی اصطلاح "پایایی" بیشتر رایج است. مدیران ارشد شرکتهای تولیدی برتر جهان، بر این نکته تاکید دارند که برای رقیب بودن باید بتوان محصولات با کیفیت برتر را به قیمت ارزانتر عرضه کرد و لازمه این کار استقرار سیستم‌های کیفیت و نیز بهره‌برداری بهینه از فناوری، تجهیزات و ماشین‌آلات است. تغییر محوریت تولید از انسان به ماشین، پیشرفت روزافزون اتوماسیون، وابستگی به تجهیزات برای تحقق اهدافی نظیر کیفیت، هرینه، ایمنی، روحیه و انگیزه کارکنان و نیز ثبات در سهم بازار رقابتی، همه این عوامل شدیداً تحت تاثیر تحولات در ماشین‌آلات و تجهیزات هستند. دستگاه‌ها و تجهیزات برقی، الکترونیکی و مکانیکی در صنایع مختلف کاربرد زیادی دارند و برای کنترل فرایندها، کامپیوترها، تجهیزات پزشکی، انرژی اتمی، ارتباطات، دریانوردی، هوانوردی و در حوزه‌های متعدد دیگری به طور روزمره تکنسینها، مهندسین و مدیران با این کاربردها مرتباً در ارتباط هستند. مهم است که این تجهیزات در تمام شرایطی که از آن‌ها استفاده می‌شود پایا کار کنند.

۱–۲ مروری بر علم قابلیت اعتماد

قابلیت اعتماد، توانمندی محصول برای کارایی و تامین انتظاراتی است که برای آن شناسایی شده است. یکی از ابعاد مهم کیفیت قابلیت اعتماد بوده و از موضوعات کلیدی ویژگی محصول و فرایند طراحی تجهیزات و مدیریت نگهداری و تعمیرات آن‌ها در مرحله تولید می‌باشد. تجهیزات پیچده‌ی امروز در تولید انرژی هسته‌ای، سیستم‌های حمل و نقل ریلی، هوایی، دریایی، هوافضا، ارتباطات و نیز در پزشکی مورد نیاز است که به قابلیت اعتماد در حد بسیار بالایی نیاز دارند.

۱–۲–۱ مفهوم قابلیت اعتماد و اهمیت آن

قابلیت اعتماد به صورت‌های مختلفی قابل تعریف است که در این بخش به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

تعریف (۱–۱):

۱. قابلیت اطمینان یک سیستم عبارت از احتمال کارکرد سالم و بدون اشکال سیستم برای یک مدت مشخص و از پیش تعیین شده می‌باشد.
۲. توانمندی یک وسیله در به انجام رساندن کارکرد مورد نظر تحت شرایط تعیین شده و برای یک دوره زمانی معین.
۳. مشخصه یک وسیله یا قطعه که توسط احتمال این که کار مورد نظر را در شرایط تعیین شده‌ای برای یک مدت زمان معیین انجام دهد.
٤. احتمال اینکه یک مؤلفه (سیستم) بیش از زمان t زنده بماند (عمر داشته باشد).

در هوانوردی، ارتش، تولید انرژی هسته‌ای، یک قصور یا ناکامی، فاجعه‌ای بزرگ به‌وجود می‌آورد. سیستم‌های بسیار پیچیده مثل سیستم‌های تولید انرژی یا سیستم الکترونیکی هوافضا که استفاده از آنها مرتباً در حال افزایش است، از اجزاء جداگانه و متعددی ساخته شده‌اند، چون هر لحظه ممکن است یک دستگاه یا هر یک از اجزاء از کار بیافتند، اگر قابلیت اعتماد هر جزئی از سیستم را مرتباً اصلاح نکنیم، اعتماد کل سیستم مرتباً کم می‌شود. در امور نگهداری و تعمیرات و در برنامه‌ریزی‌های تولید در داخل صنایع، همین‌طور در انجام خدمات و ماموریت‌های فضائی و جنگی و ... یک عامل مهم که باید همواره مورد ارزیابی قرار گیرد و اطلاعات جامعی از آن در دسترس باشد آگاهی از این امر است که سیستم‌های موجود با چند درصد اطمینان برای انجام ماموریت تعیین شده آمادگی دارند؟ به عبارت دیگر چه احتمالی وجود دارد که سیستم‌های مأمور در ضمن انجام کار دچار خرابی و رکودهای اضطراری شوند. در واقع قابلیت اعتماد یک تابع احتمال از موفقیت است. در یک برخورد حقیقی با مسئله بدیهی است که اطمینان کامل 100% از انجام موفقیت‌آمیز ماموریت امکان‌پذیر نخواهد بود. در هر حال چنین امکاناتی را باید همواره در کنار عامل احتمال بیان نمود، به بیان دیگر

در بررسی امکانات و قابلیت‌های یک سیستم باید احتمال کارکرد موفقیت‌آمیز و بدون اشکال آن‌را ارزیابی نمود. توجه کنید که شرایط قابلیت اعتماد برای هر قطعه‌ای با توجه به نوع کاربرد آن متفاوت و متغیر است. مثلاً در کابل رسانی در زیر اقیانوس‌ها، تقویت کننده کابل‌ها به این دلیل که هزینه بیرون کشیدن کابل برای تعمیر یک خرابی در حد چند صد میلیارد تومان هزینه دارد (هزینه ارسال یک کشتی مخصوص کابل به محل خرابی در اقیانوس، پیدا کردن محل از کار افتادگی در چندین کیلومتری زیر اقیانوس، تدارک ابزار تقویت کننده‌ی جدید، نصب مجدد کابل در زیر اقیانوس و برگشت به بندر) باید در حدود بیست سال بدون از کار افتادگی کار کند.

۱–۳ معرفی برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد

در این بخش ضمن ارائه برخی از مفاهیم کلیدی در قابلیت اعتماد، مانند تابع مخاطره، نرخ شکست، در دسترسی، قابلیت تعمیر، میانگین زمان بین خرابیها و ... دستگاه‌های مختلف را نیز به اجمال معرفی می‌کنیم.

۱–۳–۱ تعاریف و اصطلاحات

ارزیابی قابلیت اعتماد: پایایی قطعه که توسط حدود اطمینان آماری محاسبه و بیان می‌شود و باید برای مشاهدات نمونه علمی از واحدی از نظر اسمی یکسان محاسبه شود.

رشد قابلیت اعتماد: بهبود در پارامتر پایایی از طریق تصحیح موفقیت‌آمیز نارسایی طراحی و یا مرحله ساخت آن ممکن است.

قابلیت اعتماد ذاتی: میزان پایایی که فقط بر مبنای طراحی تعیین شود و برای مرحله عملیات و محیط پشتیبانی آن حالت بهینه را فرض کنند.

کاربرد قابلیت اعتماد: احتمال اینکه وسیله‌ای با پایایی ذاتی معلوم، ماموریت تعیین شده‌اش را برای زمان معین اجرا کند وقتی که عوامل مهندسی انسان و مسائل تعمیرات و نگهداری عملاً مطرح می‌شود.

تعمیر پذیری: شاخصی برای سرعت تعمیر یا تعویض یک قطعه معیوب شده و بازرسی آن که آیا کار نرمال را انجام می‌دهد.

خدمات پذیری: میزان آسانی یا مشکل بودن نگهداری یا تعمیر یک سیستم.

فرسودگی: آخرین مرحله از طول عمر جامعه اجزاء، به‌طوری که در موقع نزدیک شدن به انتهای زندگی کاری، خرابی رخ می‌دهد.

کیفیت: شاخصی از میزان انطباق وسیله با مشخصات کاربردی و استانداردهای کاری به‌طوری که خواست و نظر مصرف کننده را تامین کند.

تضمین کیفیت: تمام فعالیت‌ها و اقداماتی که سازنده باید انجام دهد تا اطمینان حاصل کند که محصول ساخته شده منطبق با خواست و نیاز مشتری است.

در دسترسی: احتمال اینکه سیستم به‌طور رضایت‌بخش در هر زمانی کار کند وقتی در شرایط نرمال از آن کار بکشند.

جزء: کالایی که معمولاً مرکب از قطعات و مونتاژکاری است و عناصر لازم برای یک ماشین عملیاتی کاری کامل را در بر دارد و کار مناسب تعیین شده عملیات را انجام می‌دهد.

انطباق: توانمندی یک جزء یا قطعه که توان اجرای کار بیان شده و مشخصه‌های لازم را دارد.

کنترل کیفیت: نظامی علمی شامل کاربرد فنون آماری و صنعتی برای کنترل کیفیت مصنوعات صنعتی در فازهای مختلف ساخت آن.

اقدام اصلاحی: تغییر مواد طراحی شده مستندی که اعتبار لازم برای اصلاح از کارافتادگی یا نارسایی‌های طراحی را دارد.

چرخه عمر: فاصله زمانی از کارافتادگی یک سیستم تا از کارافتادگی بعدی آن.

عیب: مشخصه‌ای که با ویژگی‌های مورد نیاز بکارگیری انطباق ندارد و مستقیماً و یا بصورت بالقوه

در کیفیت تاثیرگذار است.

نرخ شکست یا نرخ از کارافتادگی: تعداد کل خرابی به تعداد کل واحدهای زنده در یک جامعه آماری که برای یک دوره زمانی خاص و تحت شرایط تعیین شده می‌باشد.

از کارافتادگی: خاتمه توانایی یک قطعه یا تجهیز که بتواند کار تعریف شده‌اش را در محدوده مشخص انجام دهد.

عمر مفید: طول دوره زمانی که یک قطعه یا وسیله با درصد خرابی معینی کار کند.

قابلیت تعمیر: احتمال اینکه اقدامات تعمیراتی در شرایط تعیین شده و در یک مدت زمان ثابت، یک سیستم از کارافتاده را به شرایط اولیه قابل کارکرد باز گرداند.

نگهداری و تعمیر: تمام اقدامات لازمی که انجام می‌شود تا یک قطعه به حالت اولیه‌اش در شرایط معین برگردانده شود.

میانگین زمان بین خرابی‌ها ($MTBF$): میانگین زمان عملیات یک تجهیز که در فاصله دو خرابی پیاپی گزارش شده است.

میانگین زمان تا خرابی ($MTTF$): این شاخص برای موارد غیر قابل تعمیر کاربرد دارد و میانگین زمانی است که پیش بینی می‌شود سیستم در این مدت بدون خرابی کار کند.

میانگین زمان تعمیر: میانگین زمان لازم برای تعمیر یک قطعه یا تجهیز.

میانگین زمان تا اولین از کارافتادگی: میانگین فاصله زمانی از شروع بکار یک سیستم تا موقع اولین بار از کارافتادگی آن.

۱-۳-۲ تابع مخاطره

تعریف (۱-۲):

تابع مخاطره یا تابع نرخ شکست برابر است با احتمال اینکه شخصی در یک فاصله زمانی بمیرد به شرطی که بدانیم تا زمان معینی زنده بوده است. تابع مخاطره برای فاصله زمانی $(t, t+\Delta t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left[\text{یک شخص در فاصله } (t, t+\Delta t) \text{ می میرد به طوری که تا لحظه } t \text{ زنده بوده است}\right]}{\Delta t}$$

تابع مخاطره را می‌توان بر حسب تابع توزیع تجمعی به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad (1-1)$$

برآورد تابع مخاطره

برآورد تابع مخاطره به‌صورت زیر است.

$$\hat{h}(\mathrm{t}) = \frac{\text{تعداد افرادی که دریک فاصله زمانی با شروع } t \text{ می میرند}}{\text{طول فاصله زمانی} \times \text{ تعداد افرادی که تا زمان } t \text{ هنوز زنده اند}} \qquad (2-1)$$

تابع مخاطره ممکن است افزایشی، کاهشی، ثابت یا به صورت فرآیندی پیچیده‌تر باشد، از طرفی نرخ شکست (نرخ از کار افتادگی) را می‌توان به 3 دسته زیر تقسیم‌بندی کرد:

۱) نرخ شکست یکنواخت که در این حالت تابع مخاطره یا صعودی و یا نزولی است.
۲) نرخ شکست U شکل که تابع مخاطره در این حالت به شکل وان حمام است یعنی ابتدا کاهشی و سپس در یک بازه زمانی ثابت و پس از آن روند افزایشی دارد.

۳) نرخ شکست U شکل تعمیم یافته که تابع مخاطره در اینجا به فرم یک چند جمله‌ای است و شکل آن حالت پیچ و خم دارد.

تابع مخاطره U شکل

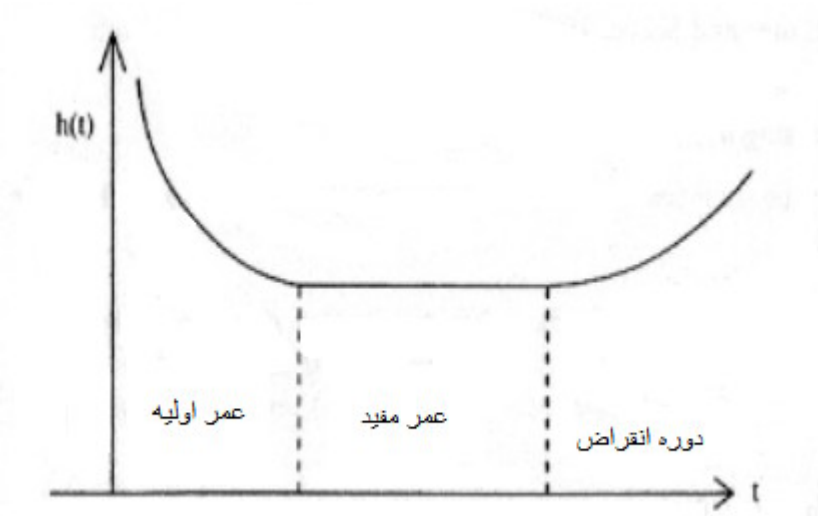
توزیع F دارای تابع مخاطره U شکل است اگر تابع مخاطره آن $(h(t))$ با افزایش زمان ابتدا روند کاهشی داشته باشد سپس در یک بازه زمانی ثابت باشد و سرانجام سیر افزایشی را طی کند. این حالت ها متناظر با 3 جزء واضح مؤلفه یا یک سیستم است که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

دوره عمر اولیه: در این دوره از کارافتادگی‌ها و خرابی‌ها رو به کاهش هستند. در کارخانه‌ها این دوره را دوره آب‌بندی سیستم می‌گویند که خرابی توسط کارخانه و گارانتی موجود بر روی دستگاه رو به کاهش است. در انسان این دوره، دوره نوزادی به کودکی است که احتمال وقوع بیماری‌ها و در معرض خطر بودن‌ها رو به کاهش است.

دوره عمر مفید: در این دوره خرابی‌ها ناشی از حادثه و یا تصادف ناگهانی است و بنابراین طول عمر ثابت است.

دوره انقراض: در این دوره به علت کهولت و با افزایش زمان، میزان خرابی‌ها رو به افزایش خواهد بود.

این دسته از نرخ مخاطره‌ها در عمل کاربرد زیادی دارند و اکثر قطعات الکتریکی و الکترومکانیکی و همچنین محصولات مکانیکی و ... دارای نرخ مخاطره U شکل می‌باشند، دوره زندگی انسان‌ها نیز دارای نرخ مخاطره U شکل است. شکل $1-3-1$ این سه دوره را بر روی منحنی U شکل نشان می‌دهد.



شکل $1-3-1$ نرخ مخاطره U شکل

۱-۳-۳ معرفی سیستم‌های مرکب و توابع ساختار آن‌ها

تعریف (۱-۳):

به مجموعه‌ای از قطعات و کالاها که هر جزء آن مؤلفه نامیده می‌شود و برای هدف خاصی طراحی و مونتاژ شده است سیستم می‌گوییم.

تعریف (۱-۴):

سیستمی را سالم گوییم که تمام مؤلفه‌های آن سالم باشد یا نتیجه عملکرد آن تامین هدف مورد نظر باشد، در غیر اینصورت سیستم را ناقص (معیوب) می‌نامیم.

برای تعیین وضعیت (درستی یا خرابی) مؤلفه i ام سیستم، متغیر X_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر مؤلفه } i \text{ ام سالم باشد} \\ 0 & \text{اگر مؤلفه } i \text{ ام ناقص باشد} \end{cases} \quad ، i = 1, \dots, n \qquad (3-1)$$

که در آن n تعداد مؤلفه‌های سیستم مفروض بوده و مرتبه سیستم نامیده می‌شود. به تشابه برای تعیین وضعیت سیستم متغیر ϕ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi = \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر مؤلفه } i \text{ ام سالم باشد} \\ 0 & \text{اگر مؤلفه } i \text{ ام ناقص باشد} \end{cases} \qquad (4-1)$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ را بردار وضعیت سیستم و $\phi(x)$ را تابع ساختار سیستم می‌نامیم.

تعریف (۱–۵):

سیستمی را سری (متوالی) گوییم اگر سلامت سیستم معادل با سلامت تمام مؤلفه‌ها باشد یعنی خرابی هر یک از مؤلفه‌ها باعث خرابی فوری کل سیستم می‌شود.

تابع ساختاری سیستم سری را با $\phi_s(x)$ و به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\phi_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر همه ها مؤلفه سالم باشند} \\ 0 & \text{اگر حداقل یک مؤلفه ناقص باشد} \end{cases} \qquad (5-1)$$