دانشگاه سیستان وبلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

آنالیز عددی

عنوان:

تحلیل همگرایی روش های گدانو متحرک برای لایه های مرزی پویا

استاد راهنما:

دکتر مریم عرب عامری

تحقیق و نگارش:

ندا یزدان پناهی

شهریور ۱۳۹۱

سپاس خدای را که هر چه دارم از اوست و هر چه می خواهم از او.

تقدیم به ساحت مقدس صاحب الزمان (عج)

و تقدیم به پدر، مادر و همسرم

که باب این درجه علمی را برایم مفتوح کردند. بر دستان پر مهر این عزیزان بوسه میزنم. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را که فرا گرفته ام، در راه رضای او وپیشرفت جامعه بکار گیرم.

سپاسگذاری :

بـنـام پـروردگـار یـکـتـا کـه آرامـش را در سـتـیـز گـذر لـحـظـات سـخـت، سـربـلـنـدی را در دورنـمـای مبهم آسمان رقابت و شکست را در میدان رویارویی جلوه های حیات قرار داده است. او که از روحش در کالبد بی جان طبیعت دمید و علم را ابزاری برای شناختش قرار داد. کسی که در تمام مراحل زندگی همواره یاریم نمود و سختی ها را راهی برای پیشرفت و تلاش را راهی برای عبور از سختی ها قرار داد.

سپاس از تمامی آموزگاران دوران تحصیلم از ابتدا تا به حال که همواره مستفیض از محضر ایشان بوده‌ام.

اینک در پایان این راه، از خانم دکتر مریم عرب عامری که مسئولیت راهنمایی من را بر عهده داشتند و همواره در طی مراحل مختلف مرا یاری داده اند کمال تشکر را دارم.

همچنین از آقایان دکتر پرویز سرگلزایی و دکتر حسن رضایی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند تشکر فراوان دارم.

از خانواده ام که همیشه و در تمام مراحل زندگی باور من بوده اند قدردانی می نمایم بویژه پدر و مادرم که هیچگاه توان پاسخگویی زحماتشان را آنطور که شایسته است ندارم.

چکیده

در این پایان نامه، یک طرح گدانو روی شبکه های متحرک هم توزیع برای انواع معادلات گرمای انتقال – غالب وابسته به زمان با لایه های مرزی پویا معرفی می گردد. طرح گدانو یکی از انواع روش های حجم متناهی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. روش حل، روش شبکه متحرک است که شامل مرحله پیشگویی و مرحله شبکه بندی مجدد می باشد. همچنین چند ویژگی شبکه متحرک هم توزیع، پایداری و همگرایی طرح گدانو معرفی شده و نتایج عددی، نشان دهنده همگرایی طرح گدانو و موثر بودن روش شبکه متحرک استفاده شده است.

واژگان کلیدی:

روش های شبکه متحرک، معادلات گرمای انتقال – غالب، روش حجم متناهی، طرح گدانو.

پیشگفتار

اغلب مدل سازی های پدیده های فیزیکی شوک دار که با حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی صورت می گیرد، با مشکلاتی مواجه است و کانون این مشکلات ناحیه با تغییرات زیاد در جواب است.

در سال های اخیر نشان داده شده است که در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان که دارای جوابی با تغییرات سریع یا ناپیوستگی هایی در جواب می باشند، استفاده از یک شبکه متحرک نسبت به یک شبکه ثابت کارایی بهتری دارد و باعث افزایش دقت می شود [۹]. قوانین بقا هم از آن دسته مسائلی هستند که ناپیوستگی هایی در جواب آنها قابل مشاهده است و برای حل آنها روش های تعدیل شبکه بسیار کارا هستند. شبکه متحرک در بسیاری از مسائل که دارای جواب منفرد می باشند مثل مسائل موج های شوک دار و مسائل لایه های مرزی انجام می شود [۱ و ۹] .

روش های تعدیل شبکه برای حل این گونه معادلات به این صورت عمل می کند که نقاط شبکه به سوی ناحیه ای که شیب زیادی دارد حرکت می کند، در حالی که تعداد نقاط شبکه در طی این فرایند ثابت باقی می ماند و گره ها هر زمان و هر کجا که لازم باشند دوباره توزیع می شوند. در واقع به منظور بهبود دقت، نقاط بیشتری از شبکه در نواحی که جواب دارای تغییرات سریع است، توزیع می گردد و در مقابل تعداد نقاط کمتری از شبکه در نواحی هموارتر قرار می گیرد. ایده روش حرکت شبکه از اصل هم توزیعی ناشی می شود [۵ و ۲۰].در روش های حرکت شبکه، یک تبدیل بین شبکه ثابت یکنواخت و شبکه غیریکنواخت صورت می گیرد و نقاط شبکه اولیه با استفاده از تابع نشانگر حرکت داده می شوند.

بیش از سه دهه گذشته کار روی توسعه الگوریتم هایی، هم برای تولید شبکه و هم گسسته سازی PDE های فیزیکی روی شبکه های در حال حرکت متمرکز شده است. بلوم، سنز–سرنا و ورور[۱] ابتدا الگوریتم های حرکت شبکه را دسته بندی کردند: روش $BJCN$[۲] (که به کمک روش مانده های وزنی از رده عناصر متناهی بدست می آید)، روشIEL[۳](روش اویلر لاگرانژ ضمنی) و روش $RFDM$[۴](روش تفاضل متناهی

[۱] Blom, Sanz-Serna and Verwer

[۲] Bonnerot, Jamet Crank-Nicolson

[۳] Implicit Euler Lagrangian

[۴] Rezoning Finite Difference Method

اصلاح شده). بعد از آن تانگ [1] روش های حرکت شبکه را به دو دسته کلی تقسیم بندی کرد: روش ایستا و روش پویا.

جمت [2] یک اثبات همگرایی برای معادله گرما با مرزهای متحرک در [۱۰] ارائه داد. مکنزی و مکوای [3] یک همگرایی مرتبه دوم برای طرح IEL ثابت کردند [۱۴]، سپس چن [4] همگرایی یکنواخت روش های عناصر متناهی را برای معادلات انتقال — غالب یک بعدی بررسی کرد [٦].

روش $BJCN$ را می توان بعنوان مورد خاصی از روش های گدانو[5] درنظر گرفت. هدف ازاین پایان نامه اثبات پایداری و همگرایی مرتبه دوم طرح گدانو منطبق بر طرح $BJCN$ توصیف شده در [۳ و ۴] و شرح چگونگی بکارگیری این روش گدانو روی شبکه های غیر یکنواخت است که از تعداد ثابتی گره تشکیل شده است. برای این منظور در فصل اول، ابتدا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعریف می شود، سپس تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای فصل های بعد معرفی می شود. در فصل دوم، طرح گدانو موردنظر را بدست آورده و روش حرکت شبکه توضیح داده می شود. فصل سوم، پایداری و همگرایی طرح گدانو بدست آمده را شرح می دهد. نهایتا در فصل چهارم، نتایج بدست آمده از بکارگیری این طرح روی شبکه متحرک، با پیاده سازی آن بر روی سه مثال که جواب دقیق آنها موجود است، مورد ارزیابی قرار می گیرد.

---

[1] Tang

[2] Jamet

[3] Mackenzie and Mekwi

[4] Chen

[5] Godunov

فهرست مندرجات

فهرست شکل ها

شکل ها

فهرست جدول ها

جدول ها

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱—۱ مقدمه

در این فصل، به طور مختصر به ارائه ی برخی مفاهیم مورد نیاز در سایر فصل ها شامل مفاهیم مربوط به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌پردازیم.

۱—۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اکثر پدیده های فیزیکی مانند مکانیک و نور با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی(PDE)[۱]، توصیف می شوند. بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک نیز بصورت PDE می باشند. اغلب مسائل علوم مختلف را می توان با توجه به میزان تغییرات آنها نسبت به دو یا چند متغیر مستقل که این متغیرها معمولاً طول، زمان یا زاویه هستند فرمول بندی ریاضی کرد. در چنین حالتی، هر متغیر وابسته نسبت به یک متغیر، تنها مشتق عادی ندارد بلکه مشتقات جزئی نسبت به چند متغیر دارد. این کار منجر به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا یک مجموعه از چنین معادلاتی می شود.
بطور مثال،

$u_t = u_{xx} + u_{yy},$ (معادله ی گرمای دو بعدی)

$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$ (معادله ی موج سه بعدی)

$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u.$ (معادله ی تلگراف)

مرتبه ی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بزرگترین مرتبه ی مشتق جزئی ظاهر شده در آن است؛ مثلاً،

$u_t + u_x = ۰,$ (مرتبه اول)

$u_t = u_{xx},$ (مرتبه دوم)

$u_t = uu_{xxx} + \sin x.$ (مرتبه سوم)

[۱] Partial Differential Equation

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، خطی است هرگاه ضرایب مشتقات جزئی آن اعداد ثابت یا توابعی فقط از x و y باشند. اگر ضرایب مشتقات جزئی، فقط توابعی از x و y و u باشند معادله نیمه خطی است و اگر توابعی از $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}$، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$ باشند معادله غیرخطی است؛ مثلاً،

$u_t + u_x = ۰,$ (خطی)

$u_t + uu_x = ۰,$ (غیر خطی)

$u_x u_{xx} + xuu_y = \sin y.$ (نیمه خطی)

فرم کلی بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه ی دوم بصورت زیر است :

$$a\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + b\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = ۰, \qquad (۱-۱)$$

که پارامترهای a، b، c، d، e، f و g می توانند توابعی از متغیرهای مستقل x و y و متغیر وابسته u باشند.

معادلاتی به فرم (۱-۱) را می‌توان با توجه به علامت $b^۲ - ۴ac$ به سه دسته تقسیم کرد:

اگر $b^۲ - ۴ac > ۰$ باشد معادله هذلولوی است مانند معادله موج $u_{tt} - u_{xx} = ۰$.

اگر $b^۲ - ۴ac = ۰$ باشد معادله سهموی است مانند معادله گرما $u_t - u_{xx} = ۰$.

اگر $b^۲ - ۴ac < ۰$ باشد معادله بیضوی است مانند معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = ۰$.

۱-۲-۱ روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

همیشه نمی توان یک PDE را بصورت تحلیلی بررسی و حل نمود، لذا بایستی که این معادلات بصورت عددی و تقریبات عددی تحلیل و بررسی شوند. علاوه بر آن حالت هایی وجود دارد که جواب تحلیلی دارای ضابطه ی پیچیده ای است، بنابراین برای محاسبه جواب معادله در یک نقطه ی خاص روش های عددی ترجیح داده می شوند. معروف ترین روش های موجود برای حل عددی چنین معادلاتی، روش تفاضل متناهی، روش عناصر متناهی و روش حجم متناهی می باشد. روش های عددی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می گیرند، روش تفاضلات متناهی و روش حجم متناهی می باشند.

۱—۲—۲ روش تفاضلات متناهی

روش تفاضلات متناهی براساس تقریب مشتقات موجود در معادله با استفاده از فرمول های تقریبی می باشد. اگر U و مشتقات آن توابعی بر حسب x، متناهی و پیوسته باشند، آنگاه با استفاده از بسط تیلور حول نقطه ی x می توان نوشت :

$$U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) + \frac{1}{6}h^3U'''(x) + O(h^4), \qquad (۱—۲)$$

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) - \frac{1}{6}h^3U'''(x) + O(h^4). \qquad (۱—۳)$$

$O(h^4)$ نشان دهنده ی مرتبه ی خطای برشی است، بدین معنی که جملات باقی مانده شامل توانهای چهارم و بیشتر است .

با جمع روابط (۱—۲) و (۱—۳) داریم :

$$U(x+h) + U(x-h) = 2U(x) + h^2U''(x) + O(h^4), \qquad (۱—۴)$$

با محاسبه ی $U''(x)$ از رابطه‌ی (۱—۴) می توان نوشت :

$$U''(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{h^2}\left(U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)\right) + O(h^2), \qquad (۱—۵)$$

معادله ی فوق یک تقریب تفاضل مرکزی برای $U''(x)$ می باشد و دارای خطای برش $O(h^2)$ است.

اگر روابط (۱ – ۲) و (۱ – ۳) را از هم کم کنیم و $U'(x)$ را از عبارت حاصل محاسبه کنیم، داریم :

$$U'(x) = \frac{1}{2h}\left(U(x+h) - U(x-h)\right) + O(h^2), \qquad (۱—۶)$$

معادله ی فوق یک تقریب تفاضل مرکزی برای $U'(x)$ می باشد.

بطور مشابه از روابط (۱—۲) و (۱—۳) می توان معادلات زیر را بدست آورد:

$$U'(x) = \frac{1}{h}\left(U(x+h) - U(x)\right) + O(h), \qquad (۱—۷)$$

$$U'(x) = \frac{1}{h}\left(U(x) - U(x-h)\right) + O(h), \qquad (۱—۸)$$

که معادله ی (۱—۷)، تقریب تفاضل پیشرو و معادله ی (۱—۸)، تقریب تفاضل پسرو می باشد. هر دو معادله دارای خطای برش $O(h)$ می باشند.

به معادلات بالا که از بسط تیلور بدست آمدند، معادلات تفاضلی می گویند.

۱—۲—۳ نمادگذاری برای توابع چند متغیره

فرض کنید U تابعی از متغیرهای مستقل x و y باشد، صفحه ی $x-y$ را به مجموعه ای از مستطیل های مساوی با اضلاع $\delta x = h$ و $\delta y = k$ تقسیم می کنند. این مستطیل ها با رسم خطوطی موازی محور ox ها با فاصله ی یکسان توسط $j = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \cdots$، $y_j = jk$ و خطوطی موازی محور oy ها با فاصله ی یکسان توسط $i = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \cdots$، $x_i = ih$ مطابق شکل (۱—۱) بوجود می آیند. مقدار U در گره ی ih و jk بصورت زیر تعریف می شود :

$$U(ih, jk) = U_{i,j}.$$

حال به کمک رابطه (۱ – ۵) می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\right)_{P(ih,jk)} = \frac{U(ih+h, jk) - ۲U(ih, jk) + U(ih-h, jk)}{h^۲}, \qquad (۹—۱)$$

یعنی:

$$\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+۱,j} - ۲U_{i,j} + U_{i-۱,j}}{h^۲}. \qquad (۱۰—۱)$$

به طور مشابه :

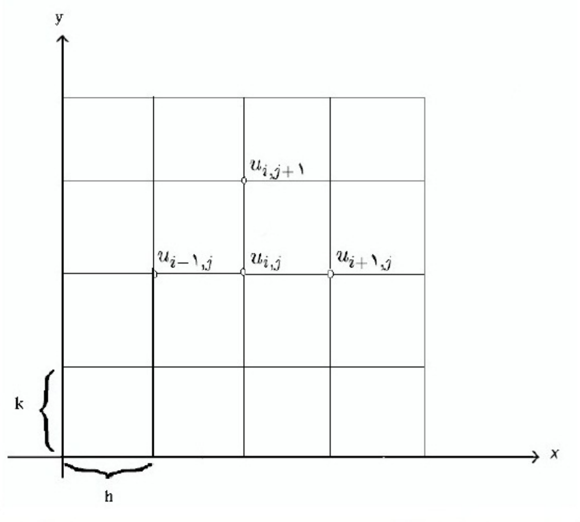
$$\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}\right)_{i,j} = \frac{U_{i,j+۱} - ۲U_{i,j} + U_{i,j-۱}}{k^۲}. \qquad (۱۱—۱)$$

با این نماد گذاری، تقریب های پیشرو و پسرو برای مشتقات جزئی مرتبه اول به شکل زیر هستند :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+۱,j} - U_{i,j}}{h}, \qquad (۱۲—۱)$$

و

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-۱,j}}{h}. \qquad (۱۳—۱)$$



شکل (۱ــ۱): شبکه بندی محور x و y .

۱ــ۲ــ۴ خطای برشی موضعی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با جواب دقیق U درنظر بگیرید. فرض کنید معادله ی تفاضلی $F_{ij}(u) = 0$ که برای تقریب جواب معادله در (i,j) امین نقطه ی شبکه بکار می رود، دارای جواب دقیق u باشد. اگر u در معادله ی تفاضلی با U جایگزین شود، مقدار $F_{ij}(U)$ خطای برشی موضعی در (i,j) امین گره شبکه نامیده می شود و با نماد T_{ij} نمایش داده می شود:

$$F_{ij}(U) = T_{i,j}.$$

با استفاده از بسط تیلور می توان T_{ij} را بر حسب توان های h و k و مشتقات U در (ih, jk) بیان کرد. هرچند U و مشتقات آن عموماً مجهولند، اما چنین تحلیلی باز هم سودمند است بدین جهت که روشی را برای مقایسه ی دقت طرح های تفاضلی مختلف برای تقریب PDE فراهم می کند.

۱–۲–۵ سازگاری

گاهی اوقات ممکن است معادله ی تفاضلی به جواب معادله ی PDE موردنظر ما همگرا نباشد بلکه به جواب PDE دیگری همگرا باشد، دراینصورت می گوییم طرح تفاضلی بکار رفته، با PDE سازگار نیست و در مقابل معادله ی تفاضلی با PDE که آن را حل می کند سازگار است هرگاه :

$$\lim_{h,k\to \circ} T_{ij} = \lim_{h,k\to \circ} F_{ij}(U) = \circ.$$

یعنی هنگامی که مقادیر h و k به سمت صفر میل می کنند، اگر مقدار خطای برشی نیز به سمت صفر میل کند، معادله ی تفاضلی سازگار است.

۱–۲–۶ پایداری

در حل PDE ها با معادلات تفاضلی اگر خطاهای گرد کردن در این فرآیند عددی ظاهر نگردد، آنگاه جواب دقیق معادله ی تفاضلی در گره های شبکه ی (i,j) بدست می آید، اما ناگزیریم که خطاهای گرد کردن را بپذیریم. شرط لازم برای پایداری یک معادله ی تفاضلی آن است که این خطاها کراندار باشند. به عبارت دیگر می توان گفت معادله ی تفاضلی پایدار است اگر ایجاد تغییرات کوچک و آشفتگی ایجاد شده به واسطه خطاهای گرد کردن در مقادیر اولیه، منجر به تغییرات بزرگ در جواب نهایی نگردد. لکس[۱] و ریچمایر[۲]، پایداری را برای مسائل مقدار اولیه ی مرزی خطی، معادل با کرانداری جواب معادلات تفاضلی در یک گام زمانی ثابت تعریف کردند.

پایداری را می توان بصورت تحلیلی و توسط روش هایی مانند روش ماتریسی و یا روش سری فوریه متناهی بررسی کرد. چون در این پایان نامه برای اثبات پایداری فقط از روش ماتریسی استفاده می کنیم، در این جا توضیح مختصری از روش ماتریسی بیان می شود، دیگر روش های بررسی پایداری بطور کامل در مرجع [۱۹] بیان گردیده است.

---

[۱] Lax

[۲] Richmyer