بسم الله الرحمن الرحيم

**دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان**

**دانشکده ریاضی و کامپیوتر**

**گروه ریاضی**


**پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی**

**گرایش آنالیز**

# قاب های نوع گابور از گروه ویل-هایزنبرگ تعمیم یافته


**استاد راهنما :**

**دکتر احمد صفاپور**

**استاد مشاور :**

**دکتر محمد علی دهقان**

**دانشجو :**

**فرشته تقی زاده مشیزی**





دی ۱۳۸۸

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

## پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی خانم فرشته تقی‌زاده مشیزی

### تحت عنوان:

## قاب‌های نوع گابور از گروه ویل-هایزنبرگ تعمیم یافته»

در تاریخ ۸۸/۱۰/۲۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...عالی... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر احمد صفاپور با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲-استاد مشاور پایان‌نامه آقای دکتر محمدعلی دهقان با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۳- داور داخل از گروه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۴- داور خارج از گروه آقای دکتر عطاءا... عسکری‌همت با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۵- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی، سرکار خانم دکتر محبوبه سعیدی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

سعیدی

سپاس و ستایش خدای بزرگی را که مرا میهمان لحظات خوش و بهاری علم اندوزی کرده است.

خداوند بی‌همتایی که همواره در جای جای زندگیم مرا یاور بوده است.

صفحه تقدیر و تشکر خود را می‌خواهم خالصانه و خاضعانه تقدیم بی‌همتایانی کنم، بزرگوارنی که وجود مقدسشان روشنی‌بخش نور دیده و زندگیم بوده‌اند. عزیزانی که با سعه صدر و لطف خاص خود، مرا مشوق بودند و راهنما.

در خستگی‌ها و نا امیدی‌ها سنگ صبور بودند، پذیرای گفته‌هایم بودند به من توان و امید دادند.

در لحظات مختلف کار پایان نامه‌ام بعد از لطف خدا، صفا و مهربانی این بزرگواران همواره همراه من بود.

هر چند صفحه تقدیر و تشکر نمی‌تواند، مراتب احساس و ستایش مرا به خانواده عزیزم تقدیم کند، ولی به هر حال آن‌چه را که در توان فکری دارم بر این صفحه می‌نگارم، تا قشنگی حضور و همراهیشان را جاودانه کنم.

سپاس بی‌پایان تقدیم به

استاد راهنمایم دکتر صفاپور که با علم و فرزانگی خویش در تمام مراحل تحقیق و پژوهش مرا راهنما بودند و یاور. استادی، و فرزانگی ایشان مرا در ادامه راهم مصمم‌تر می‌ساخت.

سپاسگزارم از

استاد مشاورم دکتر دهقان که با دقت نظرهای عمیق خود در بهتر شدن مراحل کار پژوهشم بسیار همراه و همقدم بودند.

از اساتید محترم، دکتر عسکری‌همت و دکتر افشین که قبول زحمت نمودند و با داوری آگاهانه خویش مرا مرهون لطف و مرحمت خود قرار دادند، سپاسگزارم.

## بسمه تعالی


### چکیده

در این پایان نامه ساختاری برای قاب‌های نوع گابور ساخته شده از گروه ویل – هایزنبرگ تعمیم یافته را ارائه می‌دهیم. این گروه از طریق تعمیم ساختار گروه ویل – هایزنبرگ از $R$ به گروه موضعاً فشرده و آبلی $G$ به‌دست می آید.

این ساختار بسیاری از نتایج پیشین در مورد قاب‌های ساخته شده از گروه ویل – هایزنبرگ استاندارد را تعمیم می‌دهد. یکی از مهم‌ترین این نتایج، تبدیل شرط وجود قاب گابور $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in Z}$ براساس حاصل ضرب $ab$، به حاصل ضربی از اندازه‌ی دو گروه توپولوژیک خارج قسمتی $\frac{G}{K_1}$ و $\frac{G}{K_2}$ است که در آن $K_1$ و $K_2$ زیر گروه‌های خاصی از $G$ هستند. به عنوان مثالی ویژه از این نظریه، جزئیات مرتبط با گروه ویل – هایزنبرگ ساخته شده از چنبره $d$ – بعدی و ساختار قاب ناشی از آن را مطالعه می‌کنیم. در فصل پایانی تابع ماتریس – مقدار $H(\xi)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این تابع، نگاشتی است تعریف شده بر $\widehat{G}$ و به ازای هر $\xi$، $H(\xi)$ عملگری است از فضای $l^2(Z)$ به فضای $l^2(Ann(K))$ که در آن $Ann(K)$ پوچ‌ساز زیر گروه $K$ در $\widehat{G}$ است. با کمک این نگاشت، دستگاه‌های تحت انتقال پایای کلی در فضای $L^2(G)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

# فهرست مندرجات

# پیش گفتار

یکی از اساسی‌ترین ابزارها در تحلیل سیگنال که دارای اهمیت می‌باشد، تبدیل فوریه است، اما این تبدیل، اطلاعات مربوط به لحظه پخش و شروع و پایان را نمایان نمی‌کند. در سال ۱۹۴۶ گابور [۱] این خلأ را پر کرد و شیوه‌ای را پایه‌گذاری نمود که به وسیله آن می‌توان سیگنال را به سیگنال‌های مقدماتی تجزیه کرد [۸]. با شیوه گابور بلافاصله یک دوره جدید برای آنالیز طیفی مربوط به روش‌های زمان — فرکانس شروع شد. امروزه ایده‌های گابور در مرکز کاربردهای قاب ویل – هایزنبرگ [۲] قرار می‌گیرد. گابور به خاطر موفقیت‌ها وایده‌هایش در زمینه فیزیک موفق به دریافت جایزه نوبل در سال ۱۹۷۱ میلادی شد.

مشخصه اصلی یک پایه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $\mathcal{H}$ این است که هر $f \in \mathcal{H}$ می‌تواند به عنوان یک ترکیب خطی از عناصر $e_k$ با ضرایب یکتا نشان داده شود. یک قاب نیز دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{H}$ مانند $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است که اجازه می‌دهد هر $f \in \mathcal{H}$ به صورت یک ترکیب خطی از $f_k$ ها نوشته شود که در آن ضرایب متناظر یکتا نیستند. بنابراین یک قاب ممکن است پایه نباشد که در نگاه اول بی‌استفاده می‌نماید، اما در عمل این خاصیت تبدیل به یک مزیت شده است، یعنی ما در انتخاب ضرایبی که برای کاربردهای واقعی تناسب دارند، آزادی عمل داریم.

تاریخچه قاب‌ها مثال خوبی برای مشاهده‌ی توسعه ریاضیات می‌باشد. قاب‌ها در ابتدا

---

[۱] Gabor

[۲] Weyl - Heisenberg

توسط دافین[۳] و شیفر[۴] در سال ۱۹۵۲ معرفی شدند [۵]. آن‌ها قاب‌ها را به عنوان ابزاری برای مطالعه سری فوریه ناهمساز مورد استفاده قرار می‌دادند، به این معنی که دنباله‌هایی از نوع $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in Z}$ را مورد مطالعه قرار دادند که در آن $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$ خانواده‌ای از اعداد حقیقی یا مختلط است. در سال ۱۹۸۵ هم زمان با شروع نظریه موجک‌ها، دوبشی [۵]، گراسمان[۶] و میر[۷] قاب‌هایی را معرفی کردند که با کمک آن‌ها می‌توان هر تابع در $L^2(\boldsymbol{R})$ را به صورت یک سری نمایش داد، که مشابه با پایه‌ها عمل می‌کردند [۴]. بعد از آن مطالعات گسترده‌ای روی نظریه قاب‌ها شروع شد. ابتدا قاب‌ها در پردازش سیگنال، پردازش تصویر، فشرده کردن اطلاعات و نظریه نمونه‌گیری مورد استفاده قرار گرفت. اخیراً پیشرفت این نظریه به خاطر کاربردهای جدید آن خیلی سرعت گرفته است. برای مثال قاب‌ها اکنون برای بهتر شدن قدرت انتقال اطلاعات، در طراحی صور فلکی با سرعت بالا و در طرح کد چند آنتنی (موج‌گیر) استفاده می‌شوند [۱۰ و ۹ و ۷].

یکی از مهمترین نمونه‌های قاب، قاب گابور است. دستگاه‌های گابور که با مدولاسیون و انتقال‌های یک تابع تولید می‌شوند، اولین بار توسط گابور معرفی شدند برای این منظور تابع $g \in L^2(\boldsymbol{R})$ و دو پارامتر $a, b > 0$ را انتخاب می‌کنیم. یک دستگاه گابور به صورت $\{E_{mb}T_{na}g; m, n \in Z\}$ است که $T_{na}f(x) = f(x-na)$ و $E_{mb}f(x) = e^{2\pi imbx}f(x)$. در آنالیز هارمونیک، این دستگاه‌ها از نمایش گروه موسوم به گروه ویل — هایزنبرگ به‌دست می آیند.

---

[۳] Duffin

[۴] Schaeffer

[۵] Daubechies

[۶] Grossmann

[۷] Meyer

در این پایان نامه به معرفی گروه‌های ویل — هایزنبرگ می‌پردازیم. اخیراً تعمیمی از این گروه‌ها در [۱۵ و ۱۴] ارائه شده است. چنین گروه‌هایی حاصل ضرب یک گروه موضعاً فشرده و آبلی $G$ در همراه دوگانش و گروه دایره یکه $T$ می‌باشند. با مقایسه این گروه‌ها با گروه ویل — هایزنبرگ استاندارد، ساختن نمایش‌های شبه شرودینگر که نمایش‌های یکانی و تحویل‌ناپذیر می‌باشند در این حالات کلی امکان پذیر خواهد بود.

از آن‌جایی که یک دستگاه گابور با کمک $Z$ یعنی زیر گروه گسسته‌ای از $\boldsymbol{R}$ اندیس گذاری می‌شود در این پایان نامه تعمیمی از استفاده یک زیر گروه گسسته از گروه موضعاً فشرده و آبلی $G$ را ارائه می‌دهیم.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول این پایان نامه به معرفی قاب‌ها و دوگان آن‌ها و بیان مقدمات اختصاص دارد. در بخش اول به معرفی نمادها و ارائه‌ی تعاریف و قضایای پیش‌نیاز می‌پردازیم. و هم‌چنین نگاهی به عملگرهای روی $L^2(\boldsymbol{R})$ داریم. بخش دوم را به مروری بر قاب‌ها و قاب‌های دوگان اختصاص داده‌ایم. بخش سوم به معرفی قاب ویل — هایزنبرگ و دستگاه‌های تحت انتقال پایا و قضایای مربوط به آن‌ها اختصاص دارد. در بخش چهارم مختصری از آنالیز فوریه ( سری فوریه، تبدیل فوریه و قضایای مربوطه ) مطالعه شده است. مطالب این فصل عمدتاً مبتنی بر تعاریف و قضایای [۲] می‌باشد.

در فصل دوم تعمیمی از گروه ویل — هایزنبرگ ارائه می‌دهیم. هم‌چنین به معرفی قاب‌های به‌دست آمده از نمایش شرودینگر می‌پردازیم. در بخش اول این فصل نگاهی به گروه‌های توپولوژیک و ویژگی‌های آن داریم. بخش دوم به معرفی گروه ویل — هایزنبرگ تعمیم یافته اختصاص دارد. و در بخش پایانی این فصل ساختاری از قاب‌های ویل — هایزنبرگ تعمیم یافته برای $L^2(G)$ را معرفی می‌کنیم که در آن $G$ یک گروه موضعاً فشرده و آبلی دلخواه

است. هم‌چنین به بیان قضایای مرتبط به آن‌ها می‌پردازیم که در این پایان نامه نقش کلیدی دارند. اساس کار ما در این فصل مندرجات [۱۴] می‌باشد.

فصل سوم به مطالعه گروه ویل – هایزنبرگ تعمیم یافته مرتبط با چنبره $d$ – بعدی $T^d$ اختصاص دارد. در بخش اول به معرفی نمادها و ارائه تعاریف و قضایایی می‌پردازیم، که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش‌های دوم و سوم به بیان قضیه‌یی می‌پردازیم که شرط وجود قاب روی $L^2(T^d)$ و $L^2(G)$ را به‌دست می‌دهد. این شرایط مشابه شرطی است برای آن که $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in Z}$ یک قاب گابور برای $L^2(\boldsymbol{R})$ باشد بر حاصل ضرب $ab$ اعمال کرده‌ایم. برای تهیه این فصل از [۱۳] استفاده شده است.

فصل چهارم به معرفی دستگاه‌های تحت انتقال پایای کلی برای یک گروه موضعاً فشرده و آبلی دلخواه و قضایای مرتبط آن‌ها اختصاص دارد. در بخش اول این فصل نگاهی مختصر به تبدیل فوریه روی یک گروه موضعاً فشرده و آبلی دلخواه $G$ داریم. و در قسمت پایانی این بخش دستگاه‌های تحت انتقال پایای کلی از یک گروه موضعاً فشرده و آبلی دلخواه را معرفی می‌کنیم. بخش دوم را به مطالعه‌ی تابع ماتریس – مقدار $H(\xi)$ و بیان شرایط لازم و کافی برای آن که دو دنباله $\{h_{k_1,m}\}_{k_1\in K_1,m\in Z}$ و $\{g_{k_1,m}\}_{k_1\in K_1,m\in Z}$ تشکیل قاب و هم‌چنین قاب دوگان را بدهند، پرداخته‌ایم. مندرجات این فصل نیز عمدتاً مبتنی بر مقاله [۱۳] می‌باشد که مقاله‌ی اصلی در تهیه این پایان نامه بوده است.

فصل ۱

# پیش نیازها

در این فصل می‌کوشیم مقدماتی را که در این پایان نامه به آن‌ها نیاز داریم، بیان کنیم. بخش اول به نمادها و تعاریف و قضایای پیش‌نیاز اختصاص دارد. هم‌چنین عملگرهایی روی $L^2(\boldsymbol{R})$ معرفی می‌شوند که نقش کلیدی در قاب‌های گابور و موجک دارند. بخش دوم مروری بر قاب‌هاست. عملگر قاب وقاب دوگان را معرفی می‌کنیم سپس قضایایی از قاب که در فصل بعد مورد نیاز می‌باشند را بیان می‌کنیم. در بخش سوم به معرفی قاب ویل — هایزنبرگ یا قاب گابور می‌پردازیم. قاب‌های گابور نوع خاصی از قاب‌ها می‌باشند که دنباله تشکیل دهنده‌ی آن حاصل انتقال‌ها و مدولاسیون‌های یک تابع در $L^2(\boldsymbol{R})$ می‌باشند. ادامه بخش به معرفی دستگاه‌های تحت انتقال پایا و بیان شرایط لازم و کافی برای این که دو دنباله $\{T_{na}E_{mb}g\}_{m,n\in Z}$ و $\{T_{na}E_{mb}h\}_{m,n\in Z}$ قاب‌های دوگان برای $L^2(\boldsymbol{R})$ تشکیل دهند، اختصاص دارد. در بخش پایانی خلاصه‌ای بسیار کوتاه از آنالیز فوریه (سری فوریه، ضرایب فوریه، تبدیل فوریه و ...) را آورده‌ایم. قضیه‌هایی که در این فصل ذکر شده‌اند از قضیه‌های شناخته شده‌ی کتاب‌های آنالیز تابعی و آنالیز فوریه و نظریه قاب‌ها هستند لذا از ذکر اکثر

آن‌ها خودداری شده است.

## ۱.۱ مقدمات

در این بخش به معرفی نمادها و بیان تعاریف و فضاهایی می‌پردازیم، که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم. منظور از $C$ مجموعه‌ی اعداد مختلط، $R$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $Z$ مجموعه‌ی اعداد صحیح و $I\!N$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد.

**تعریف ۱.۱.۱** ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط $V$، یک تابع $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to C$ است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) به ازای هر $x \in V$، $\langle x,x\rangle \geq 0$ و $\langle x,x\rangle = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر $x,y \in V$، $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

۳) به ازای هر $x,y,z \in V$ و $\alpha,\beta \in C$، $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

**تعریف ۲.۱.۱** به فضای برداری مجهز به ضرب داخلی، **فضای ضرب داخلی** گوییم.

**تذکر:** هر فضای ضرب داخلی را می‌توان با تعریف $\|\cdot\| = \sqrt{\langle .,.\rangle}$ نرم‌دار کرد.

**تعریف ۳.۱.۱** هر فضای ضرب داخلی که تحت متر تولید شده توسط ضرب داخلی، یعنی

$$d(x,y) = \| x-y \| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

کامل باشد را یک فضای هیلبرت [1] گوییم. کامل بودن به‌این‌معنی است که هر دنباله کوشی در آن فضا همگراست.

---

[1] Hilbert space

**تعریف ۴.۱.۱** گوییم دو بردار $x$ و $y$ در فضای ضرب داخلی $V$، بر یکدیگر عمود هستند اگر $\langle x, y\rangle = 0$. در این صورت می‌نویسیم $x \perp y$.

**تعریف ۵.۱.۱** مجموعه $\{u_1, u_2, \ldots\}$ در فضای ضرب داخلی $V$ را یک **مجموعه متعامد** گوییم هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $u_i \perp u_j$. به علاوه، اگر برای هر $i \geq 1$، $\| u_i \| = 1$ آن را **متعامد یکه** گوییم.

**قضیه ۶.۱.۱** (نا مساوی هولدر)[۲] فرض کنید $1 < p, q < \infty$ به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اگر $f \in L^p(\boldsymbol{R})$ و $g \in L^q(\boldsymbol{R})$، آن‌گاه $fg \in L^1(\boldsymbol{R})$ و

$$\begin{aligned} \| fg \|_1 = \int |(fg)(x)|\, dx &\leq \left(\int |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \| f \|_p \cdot \| g \|_q . \end{aligned}$$

در حالت خاص $p = q = 2$ این نامساوی به نامساوی معروف کوشی – شوارتز تبدیل می‌شود و داریم

$$\int |(fg)(x)|\, dx \leq \left(\int |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

نیز اگر $1 < p, q < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $x = \{x_i\}_{i\in I} \in l^p$ و $y = \{y_i\}_{i\in I} \in l^q$ آن‌گاه $\{x_i y_i\}_{i\in I} \in l^1$ و

$$\sum_i |x_i y_i| \leq \| x \|_p \cdot \| y \|_q .$$

---

[۲] Holder's ineqality

**تعریف ۷.۱.۱** فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت با نرم‌های $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ و ضرب‌های داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ و $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ باشند. اگر $S$ عملگری خطی از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ باشد، نرم این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|S\| = \sup\{\|Sx\|_{\mathcal{K}} : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\}.$$

دراین‌صورت $\| S \|$ را نرم عملگری $S$ می‌نامیم.

۱) $S$ را کران‌دار گوییم هرگاه $\| S \| < \infty$.

۲) الحاقی عملگر $S$، عملگر یکتای $S^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ است، به طوری‌که به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ و $y \in \mathcal{K}$

$$\langle Sx, y\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, S^*y\rangle_{\mathcal{H}}$$

به علاوه $\| S \| = \| S^* \|$.

۳) عملگر $S$ یکانی است هرگاه برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\| Sx \|_{\mathcal{K}} = \| x \|_{\mathcal{H}}$.

**تذکر:** $S$ یکانی است اگر وتنها اگر به ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$،

$$\langle Sx, Sy\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

**تعریف ۸.۱.۱** فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت بوده و $S$ و $T$ عملگرهایی خطی روی $\mathcal{H}$ باشند. دراین‌صورت

۱) عملگر $S$ خود الحاق [3] است اگر $S = S^*$.

۲) عملگر $S$ مثبت است هرگاه برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Sx, x\rangle > 0$. در این صورت می‌نویسیم $S > 0$.

[3] Self-adjoint

۳) $S > T$، اگر $S - T > 0$ باشد.

اکنون عملگرهای روی $L^2(\boldsymbol{R})$ را که نقش کلیدی در قاب‌های گابور ایفا می‌کنند، معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۹.۱.۱**

۱) فرض کنیم $a \in \boldsymbol{R}$. **عملگر انتقال**[۴] به اندازه $a$ را با $T_a$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T_a : L^2(R) \to L^2(R)$$

$$(T_a f)(x) = f(x-a).$$

۲) فرض کنیم $b \in \boldsymbol{R}$. **عملگر مدولاسیون** [۵] به وسیله $b$ را با $E_b$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_b : L^2(R) \to L^2(R)$$

$$(E_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x).$$

در ادامه به بیان لم‌ها و قضایایی می‌پردازیم که اثبات آن‌ها در [۲] آمده است.

**لم ۱۰.۱.۱** عملگر انتقال در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) برای هر $a \in \boldsymbol{R}$، عملگر $T_a$ یکانی است.

۲) برای هر $f \in L^2(\boldsymbol{R})$، $y \longmapsto T_y f$ تابعی پیوسته از $\boldsymbol{R}$ به $L^2(\boldsymbol{R})$ است.

مشابه شرایط فوق برای $E_b$ نیز برقرار است.

---

[۴] Translation

[۵] Modulation

**تعریف ۱۱.۱.۱** محمل تابع $f$ تعریف شده بر $\boldsymbol{R}$ که با $supp(f)$ نمایش داده می‌شود بستار $\{x \in \boldsymbol{R}; f(x) \neq 0\}$ می‌باشد.

**تعریف ۱۲.۱.۱** فضای $X$ را تفکیک‌پذیر [۶] گوییم هرگاه شامل یک زیر مجموعه شمارش‌پذیر چگال باشد.

تذکر: فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای پایه متعامد یکه شمارا است اگر وتنها اگر $\mathcal{H}$ تفکیک‌پذیر باشد.

**تعریف ۱۳.۱.۱** دلتای کرونکر که با نماد $\delta_{i,j}$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

است.

تذکر: در این پایان نامه منظور از یک فضای هیلبرت، یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر می‌باشد.

## ۲.۱ قاب‌ها و ویژگی‌های آن

در این بخش به بعضی از خواص اولیه قاب‌ها در یک فضای هیلبرت اشاره شده و از آن‌ها در فصل‌های بعدی استفاده می‌گردد. هدف اصلی از ارائه این بخش آن است تا علاقمندانی که قصد مطالعه مباحث این پایان‌نامه را دارند با خواص اولیه قاب‌ها بیشتر آشنا شوند.

از ویژگی‌های مهم پایه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ آن است که هر $f \in \mathcal{H}$ را می‌توان به

---
[۶] Separable

صورت ترکیب خطی از عناصر $f_k$ نوشت یعنی

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k, \qquad (1.1)$$

که ضرایب $c_k(f)$ منحصربفرد است.

هم‌چنان که در ادامه خواهیم دید یک قاب یک دنباله از عناصر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ است به طوری‌که هر $f \in \mathcal{H}$ را می‌توان به صورت(۱.۱) نوشت، در حالی‌که ضرایب متناظر آن لزوماً منحصربفرد نیست.

**تعریف ۱.۲.۱** یک پایه ریس [۷] برای $\mathcal{H}$ خانواده‌ای به شکل $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌باشد به طوری‌که $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ بوده و $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ عملگری کران‌دار و دوسویی می‌باشد.

**تعریف ۲.۲.۱** دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ از عناصر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک قاب برای $\mathcal{H}$ گوییم اگر ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$A \| f \|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B \| f \|^2 .$$

اعداد مثبت $A$ و $B$ را به ترتیب کران پایین قاب وکران بالای قاب می‌نامیم.

**تعریف ۳.۲.۱** اگر دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ حداقل دارای کران بالای قاب باشد، آن را دنباله بسل با ثابت بسل $B$ می‌نامیم.

**تعریف ۴.۲.۱** فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ قابی برای $\mathcal{H}$ باشد.

۱) اگر $A = B$ ، آن‌گاه قاب را قاب کیپ می‌نامیم.

---

[۷] Riesz bases