۱۳۲۶
دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بعد کوهن- مکالی تعمیم یافته

استاد راهنما

دکتر رضا نقی پور

استاد مشاور

دکتر پرویز سهندی

پژوهشگر

عاطفه افسر

۱۳۹۰

تقدیم به

پدر، مادر

و خواهران عزیزم

بسم اللّه الرّحمن الرّحیم

پس از سپاس فراوان به درگاه خداوند حکیم، وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزشمند استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر رضا نقی‌پور نهایت تشکر و قدردانی نمایم.
از جناب آقای دکتر پرویز سهندی که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، بسیار سپاسگزارم.
حسن نظر و دقت فراوان جناب آقای دکتر ناصر زمانی که داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند، سپاس می‌گویم.
در پایان از کلیه‌ی اعضای خانواده‌ی گرامی‌ام به‌ویژه پدر و مادرم که در تمامی مراحل تحصیل همواره یار و مشوق اینجانب بوده‌اند، سپاسگزاری می‌نمایم.

عاطفه افسر

نام خانوادگی: افسر نام: عاطفه

عنوان پایان‌نامه: بعد کوهن-مکالی تعمیم یافته

استاد راهنما: دکتر رضا نقی پور
استاد مشاور: دکتر پرویز سهندی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۸۹

کلیدواژه‌ها: حلقه‌ی کوهن-مکالی تعمیم یافته، بعد متناهی بودن، بعد کوهن-مکالی، بعد گرنشتاین

چکیده
فرض کنیم R حلقه‌ی موضعی و نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. در این پایان‌نامه یک بعد همولوژی جدید برای M تعریف می‌کنیم. این بعد جدید بعد کوهن-مکالی تعمیم یافته نام دارد و با علامت $\mathrm{GCM}-\dim_R M$ نشان داده می‌شود. با استفاده از این بعد حلقه‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته را مشخص می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر ثابت می‌کنیم که یک حلقه مانند R، کوهن-مکالی تعمیم یافته است اگر و فقط اگر هر R-مدول با تولید متناهی دارای بعد کوهن-مکالی تعمیم یافته‌ی متناهی باشد.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۶۷ آسلندر [1] بعد جدیدی به‌نام G-بعد برای مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری و موضعی معرفی کرد، که در آن G از اول کلمه‌ی گرنشتاین گرفته شده است. زیرا برای یک حلقه‌ی موضعی و نوتری مانند $(R,\mathfrak{m},k)$ گزاره‌های

(i) R یک حلقه‌ی گرنشتاین است.

(ii) $\mathrm{G-}\dim_R R/\mathfrak{m} < \infty$.

(iii) برای هر R-مدول متناهی مولد مانند M، $\mathrm{G-}\dim_R M < \infty$.

معادلند. قضیه فوق که مشخص کننده‌ی حلقه‌های گرنشتاین است، مشابه قضیه‌ی زیر که مشخص کننده‌ی حلقه‌های منظم است، می‌باشد.

قضیه (آسلندر-باکسبام-سر). [2] فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(i) R یک حلقه‌ی منظم است.

[1] Auslander
[2] Auslander-Buchsbaum-Serre

(ii) $\mathrm{pd}_R k < \infty$.

(iii) برای هر R-مدول متناهی مولد مانند M، $\mathrm{pd}_R M < \infty$.

چندین تظریف از بعد پروژکتیو به نام‌های CI-بعد، بعد کوهن-مکالی و PCI-بعد در سال‌های بعد معرفی گردید. نامساوی‌های زیر برای این بعدها برقرار است:

$$\mathrm{CM-}\dim_R M \leq \mathrm{G-}\dim_R M \leq \mathrm{PCI-}\dim_R M \leq \mathrm{CI-}\dim_R M \leq \mathrm{pd}_R M.$$

اگر یکی از این بعدها متناهی باشد، نامساوی‌های سمت چپ آن به تساوی تبدیل می‌شوند.

این پایان‌نامه که بر اساس مراجع [۴] و [۱۳] می‌باشد، در چهار فصل تنظیم شده است.

در فصل اول تعاریف و قضایای اولیه‌ی مورد نیاز در فصل‌های بعدی آورده شده است.

در فصل دوم بعدهای G_K-بعد، بعد اشتراک کامل، PCI-بعد و بعد کوهن-مکالی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. عمده مطالب این فصل از مرجع [۱۳] جمع آوری شده است. از آنجا که این پایان‌نامه در مورد بعد کوهن-مکالی تعمیم یافته می‌باشد، بعد کوهن-مکالی با تفصیل بیشتری نسبت به بعدهای دیگر در این فصل مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل سوم بعد کوهن-مکالی تعمیم یافته تعریف و مطالعه می‌شود. نتایج این فصل نشان می‌دهد که این بعد دارای خواص جالبی است. به‌ویژه

یک حلقه مانند $(R, \mathfrak{m})$ کوهن-مکالی تعمیم یافته است اگر و فقط اگر برای هر R-مدول متناهی مولد مانند M، $\mathrm{GCM-}\dim_R M < \infty$.

هم‌چنین اگر $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه و M یک R-مدول متناهی مولد باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{GCM-}\dim_R M \leq \mathrm{CM-}\dim_R M$$

و تساوی در صورتی‌که $\mathrm{CM-}\dim_R M < \infty$ حاصل می‌شود.

در نهایت در فصل ۴ بعد شبه-باکسبام و بعد تقریبا کوهن-مکالی تعمیم یافته تعریف و مطالعه می‌شوند.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

در سراسر این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار و غیر بدیهی است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. تکیه‌گاه یا محمل M را با علامت $\mathrm{Supp}(M)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. عنصر $x \in R$ را مقسوم‌علیه صفر روی M گوییم هرگاه $m \neq 0$ در M موجود باشد به‌طوری‌که $xm = 0$. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر روی M را با نماد $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول و $x_1, x_1, \ldots, x_n$ عناصری از حلقه‌ی R باشد. گوییم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک M-رشته ضعیف است هرگاه برای هر $i = 1, \ldots, n$ عضو x_i به $Z_R(M/(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M)$ تعلق نداشته باشد.

برحسب قرارداد اگر $i = 1$، قرار می‌دهیم، $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})M = 0$.

به‌علاوه، اگر $(x_1, x_2, \ldots, x_n)M \neq M$، آن‌گاه $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را یک M-رشته منظم یا به اختصار یک M-رشته می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول و n یک عدد صحیح نامنفی باشد. گوییم

بعد پروژکتیو M حداکثر n است و می‌نویسیم $\mathrm{pd}_R M \leq n$ هرگاه یک رشته‌ی دقیق به صورت

$$(\divideontimes): \qquad 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود باشد به‌طوری‌که P_iها R-مدول‌های پروژکتیو هستند. n را طول تحلیل پروژکتیو ($\divideontimes$) می‌نامیم. کوچکترین چنین n هایی را بعد پروژکتیو M می‌نامیم و با علامت $\mathrm{pd}_R M$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. بعد حلقه‌ی R را برابر

$$\sup\{0 \leq n \in \mathbb{Z} \mid \text{یک زنجیر به طول } n \text{ از ایده‌آل‌های اول } R \text{ وجود داشته باشد}\}$$

تعریف می‌کنیم، مشروط بر این‌که سوپریمم بالا موجود باشد. در غیر این‌صورت آن را ∞ تعریف می‌کنیم. بعد R را با علامت $\dim R$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. بعد M را با علامت $\dim M$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\dim M = \sup\left\{ 0 \leq n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{یک زنجیر از ایده‌آل‌های اول در} \operatorname{Supp}(M) \text{ به‌صورت} \\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \\ \text{موجود است} \end{array} \right\}.$$

اگر سوپریمم موجود نباشد، تعریف می‌کنیم $\dim M = \infty$.

تعریف ۷.۱.۱. حلقه‌ی موضعی و نوتری $(R,\mathfrak{m})$ را منظم می‌نامند، هرگاه

$$\dim R = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

قضیه ۸.۱.۱. *حلقه‌ی موضعی و نوتری R را در نظر بگیرید. در این‌صورت عبارات زیر معادلند:*

(i) *R منظم است.*

(ii) *برای هر R-مدول متناهی مولد مانند M، $\mathrm{pd}_R M < \infty$.*

برهان. به [۹] قضیه‌ی ۲.۲.۷ مراجعه شود. □

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. بلندی $\mathfrak{p}$ را با علامت $\mathrm{ht}\mathfrak{p}$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}\mathfrak{p} = \sup\left\{ 0 \leq n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{یک زنجیر از ایده‌آل‌های اول } R \text{ به‌صورت} \\ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \\ \text{موجود است} \end{array} \right\}.$$

اگر سوپریمم موجود نباشد تعریف می‌کنیم $\mathrm{ht}\mathfrak{p} = \infty$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید I یک ایده‌آل واقعی R باشد. بلندی I را با علامت $\mathrm{ht}I$ نشان داده و به‌صورت

$$\mathrm{ht}I = \min\{\mathrm{ht}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supseteq I, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنید $\varphi : R \longrightarrow R'$ یک همومورفیسم حلقه‌ای باشد. گوییم قضیه‌ی پایین رو برای φ برقرار است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

برای هر $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec}(R)$ با شرط $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ و برای هر $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ به‌طوری‌که $\mathfrak{p}'^{c} = \mathfrak{q}'$، ایده‌آل اولی از R' مانند $\mathfrak{p}$ چنان موجود باشد که $\mathfrak{p}^{c} = \mathfrak{q}$ و $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$.

قضیه ۱.۱.۱۲. *فرض کنید $\varphi : R \longrightarrow R'$ همومورفیسمی از حلقه‌های نوتری باشد. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R')$ و $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. در این‌صورت*

(i) $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \leq \operatorname{ht}\mathfrak{q} + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R')$.

(ii) *به‌علاوه اگر تابع $\operatorname{Spec}(R') \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ برو و قضیه‌ی پایین رو برقرار باشد، آن‌گاه $\dim R' \geq \dim R$. هم‌چنین برای هر ایده‌آل I از R، $\operatorname{ht}I = \operatorname{ht}IR'$.*

برهان. به [۱۵] صفحه‌ی ۷۹ رجوع شود. □

قضیه ۱.۱.۱۳. *فرض کنید $\varphi : R \longrightarrow R'$ یک همومورفیسم یکدست باشد. در این‌صورت قضیه‌ی پایین رو برای φ برقرار است.*

برهان. به [۱۵] صفحه‌ی ۳۳ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل R باشد. به ازای هر R-مدول M، تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{x \in M \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, \mathfrak{a}^{n}x = 0\}.$$

در واقع $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \cup_{n=1}^{\infty}(0 :_M \mathfrak{a}^n)$. به آسانی دیده می شود که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ یک زیرمدول M است. همچنین بدیهی است که اگر $f : M \longrightarrow N$ یک R-هومومورفیسم باشد، آن‌گاه $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. لذا $f|_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)} : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. بنابراین

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(.) : C(R) \longrightarrow C(R)$$

$$\forall M \in C(R), \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \cup_{n=1}^{\infty}(0 :_M \mathfrak{a}^n)$$

$$\forall f : M \longrightarrow N, \Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$$

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) = f|_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}.$$

($C(R)$ کاتگوری R-مدولها و R-هومومورفیسم‌ها است.) حال اگر $g : N \longrightarrow L$ یک R-هومومورفیسم دیگر باشد، آن‌گاه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(gof) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(g)o\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$ و $\Gamma_{\mathfrak{a}}(id_M) = id_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$. بنابراین $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ یک فانکتور همورد است. به‌علاوه به‌راحتی دیده می‌شود که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ یک فانکتور جمعی نیز هست. n-امین فانکتور مشتق شده‌ی راست این فانکتور را با علامت $H^n_{\mathfrak{a}}(-)(n \geq 0)$ نشان می‌دهیم. $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ را n-امین فانکتور کوهمولوژی موضعی می‌نامیم. پس $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = H^n(\Gamma_{\mathfrak{a}}(E_M))$، که به n-امین مدول کوهمولوژی موضعی معروف است. (E_M یک تحلیل انژکتیو محذوف مدول M است.)

تعریف ۱۵.۱.۱. حلقه‌ی S را R-جبر گویند اگر یک هومومورفیسم حلقه‌ای مانند

$f : R \longrightarrow S$ موجود باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. M-رشته‌ی ضعیف $x_1, \ldots, x_n$ در یک ایده‌آل I از R را ماکسیمال نامند، هرگاه به‌ازای هر $b \in I$، $x_1, \ldots, x_n, b$ یک M-رشته‌ی ضعیف نباشد. به‌عبارت معادل $I \subseteq Z_R(M/(x_1, \ldots, x_n)M)$.

قضیه ۱۷.۱.۱ (قضیه‌ی ریس). *فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و I یک ایده‌آل R باشد. R-مدول متناهی مولد M را با شرط $IM \neq M$ در نظر بگیرید. در این‌صورت طول تمام M-رشته‌های ماکسیمال در I متناهی و مساوی است و برابر با کوچکترین عدد طبیعی مانند n است که $\operatorname{Ext}^n_R(R/I, M) \neq 0$.*

برهان. به [۹] قضیه‌ی ۱.۲.۵ رجوع شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱. با مفروضات قضیه‌ی فوق، طول مشترک همه‌ی M-رشته‌های ماکسیمال در I را درجه‌ی I روی M نامیده و با علامت $\operatorname{grade}(I, M)$ نشان می‌دهیم. اگر $IM = M$ آن‌گاه درجه‌ی I روی M را ∞ تعریف می‌کنیم. درصورتی‌که $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی باشد، درجه‌ی $\mathfrak{m}$ روی M را با علامت $\operatorname{depth} M$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱۹.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه‌ی نوتری R و M و N دو R-مدول*

متناهی مولد باشند. اگر $\operatorname{Supp}(N) = V(I)$، آن‌گاه

$$\operatorname{grade}(I, M) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{Ext}_R^n(N, M) \neq 0\}.$$

برهان. به [۹] گزاره‌ی ۱.۲.۱۰ رجوع شود. □

نتیجه ۲۰.۱.۱. *فرض کنید R حلقه‌ی موضعی و نوتری و $M \neq 0$ یک R-مدول متناهی مولد باشد. در این‌صورت $\operatorname{depth} M \leq \dim M$.*

برهان. به [۱۲] نتیجه‌ی۹.۲.۲۳ رجوع شود. □

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ حلقه‌ی موضعی و نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد باشد. M را کوهن-مکالی گویند اگر $\operatorname{depth} M = \dim M$ و $M \neq 0$ یا $M = 0$. اگر R به‌عنوان R-مدول کوهن-مکالی باشد، آن‌گاه R را حلقه‌ی کوهن-مکالی گویند.

قضیه ۲۲.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی کوهن-مکالی موضعی باشد. برای هر ایده‌آل سره از آن مانند I داریم:*

$$\operatorname{ht} I + \dim R/I = \dim R \quad \text{و} \quad \operatorname{ht} I = \operatorname{grade}(I, R).$$

برهان. به [۱۵] قضیه‌ی ۱۷.۴ رجوع شود. □

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی و نوتری و $M \neq 0$ یک R-مدول متناهی مولد با $\dim M = n$ باشد. M را R-مدول کوهن-مکالی تعمیم یافته گویند هرگاه به ازای هر $i \neq n$، $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ متناهی مولد باشد.

نتیجه ۲۴.۱.۱. *هر حلقه‌ی آرتینی مانند R کوهن- مکالی است.*

برهان. به [۱۸] قضیه‌ی ۱۷.۱۱ رجوع شود. □

قضیه ۲۵.۱.۱. *هومومورفیسم حلقه‌ای $f : R \longrightarrow R'$ و R'- مدول M را در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای این‌که M یک R- مدول یکدست باشد این است که برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R'، $M_{\mathfrak{p}}$ روی $R_{\mathfrak{q}}$ یکدست باشد، که در آن $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap R(= f^{-1}(\mathfrak{p}))$.*

برهان. به [۱۶] قضیه‌ی ۷.۱ رجوع شود. □

قضیه ۲۶.۱.۱. *حلقه‌ی R آرتینی است اگر و فقط اگر R نوتری بوده و $\dim R = 0$.*

برهان. به [۵] قضیه‌ی ۸.۵ رجوع شود. □

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنید R حلقه‌ی نوتری و موضعی با تنها ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. در این‌صورت دقیقا یکی از گزاره‌های زیر برقرار است.*

(i) $\forall\, n, \quad \mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$

(ii) $\exists\, n, \qquad \mathfrak{m}^n = 0$ *که در این حالت حلقه‌ی R آرتینی است.*

برهان. به [۵] قضیه‌ی ۸.۶ رجوع شود. □

نتیجه ۲۸.۱.۱ (قضیه‌ی اشتراک کرول). *فرض کنید I یک ایده‌آل حلقه‌ی نوتری R بوده و $I \subseteq J(R)$، که در آن $J(R)$ رادیکال جاکوبسون R است. در این‌صورت* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.

برهان. به [۱۸] قضیه‌ی ۸.۲۵ رجوع شود. □

قضیه ۲۹.۱.۱. *هر حلقه‌ی موضعی و منظم، حلقه‌ی کوهن- مکالی است.*

برهان. به [۱۶] قضیه‌ی ۱۷.۸ رجوع شود. □

گزاره ۳۰.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول و $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq R$ یک M-رشته‌ی ضعیف باشد. هم‌چنین فرض کنید $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همومورفیسم حلقه‌ای و N یک S-مدول باشد که به‌عنوان R-مدول یکدست است. در این‌صورت $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq R$ و $\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\} \subseteq S$، $(M \otimes_R N)$-رشته‌های ضعیف هستند و اگر $(M \otimes_R N) \neq (x_1, \ldots, x_n)(M \otimes_R N)$، آن‌گاه $\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\}$ و $\{x_1, \ldots, x_n\}$، $(M \otimes_R N)$-رشته هستند.*

برهان. به [۹] گزاره‌ی ۱.۱.۲ رجوع شود. □

قضیه ۳۱.۱.۱ (قضیه صفر نشدن گروتندیک). *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و نوتری و $M \neq 0$ یک R-مدول متناهی مولد با بعد n باشد. در این‌صورت* $H^n_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$.

برهان. به [۸] قضیه‌ی ۶.۱.۴ رجوع شود. □

قضیه ۳۲.۱.۱ (قضیه صفرشدن گروتندیک). *فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری، M یک R-مدول و I ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت به ازای هر $i > \dim M$ داریم، $H^i_I(M) = 0$.*

برهان. به [۸] قضیه‌ی ۶.۱.۲ رجوع شود. □

نتیجه ۳۳.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و نوتری و $M \neq 0$ یک R-مدول متناهی مولد باشد که $\dim M = n > 0$. در این‌صورت $H^n_{\mathfrak{m}}(M)$ متناهی مولد نیست.*

برهان. به [۸] نتیجه‌ی۷.۳.۳ رجوع شود. □

تبصره ۳۴.۱.۱. *فرض کنید R' یک R-جبر یکدست باشد (یعنی یک هومومورفیسم مانند $f : R \longrightarrow R'$ وجود دارد به‌طوری‌که R' به عنوان R-مدول یکدست است). در این‌صورت عبارات زیر معادلند:*

(i) *برای هر ایده‌آل I از R، $I^{ec} = I$.*

(ii) *تابع $\operatorname{Spec}(R') \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ برو است.*

(iii) *برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R داریم، $\mathfrak{m}^e \neq (1)$.*

(iv) *اگر M یک R-مدول ناصفر باشد، آن‌گاه $M_{R'} \neq 0$ که در آن $M_{R'} = R' \otimes_R M$.*

(v) برای هر R-مدول M، تابع $f: M \longrightarrow M_{R'}$ با ضابطه‌ی $f(x) = 1 \otimes x$ یک به یک است.

برهان. به [۵] تمرین ۱۶ رجوع شود. $\square$

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{n})$ و $(R', \mathfrak{m})$ حلقه‌های موضعی و $f: R \longrightarrow R'$ یک هومومورفیسم حلقه‌ای باشد. اگر $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$، آن‌گاه f را هومومورفیسم موضعی گویند.

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ و $(R', \mathfrak{n}, k')$ حلقه‌های موضعی و نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد و N یک R'-مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید $\varphi: R \longrightarrow R'$ یک هومومورفیسم موضعی باشد. اگر N به عنوان R-مدول یکدست باشد، آن‌گاه*

$$\mathrm{depth}_{R'}(M \otimes_R N) = \mathrm{depth}_R M + \mathrm{depth}_{R'}(N/\mathfrak{m}N).$$

برهان. به قضیه‌ی ۲۳.۳ [۱۶] رجوع شود. $\square$

نتیجه ۳۷.۱.۱. *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ و $(R', \mathfrak{n}, k')$ موضعی و نوتری و $\varphi: R \longrightarrow R'$ هومومورفیسم موضعی باشند. اگر R' به عنوان R-مدول یکدست باشد، آن‌گاه*

$$\mathrm{depth} R' = \mathrm{depth} R + \mathrm{depth} F$$

که در آن $F = R'/\mathfrak{m}R'$.