بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی (آنالیز)

خواص چند جمله ایها

نگارش:

سیده معصومه زمانی کلاریجانی

استاد راهنما:

دکتر محمود بیدخام

استاد مشاور:

دکتر رضا معمارباشی

مهر ۱۳۹۳

تقدیم به

همسر مهربان

و

فرزند عزیزم

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست، سپاس خدایی را که توفیق عنایت فرمود تا برگی دیگر بر دفتر علم و معرفتم افزون گردد. اینک که به یاری او دوره ای دیگر از تحصیلاتم به پایان می رسد، بر خود واجب می دانم از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر محمود بیدخام و استاد مشاور گرانقدرم، جناب آقای دکتر رضا معمار باشی تشکر و قدردانی نمایم . آنان که رهنمود ها، حمایت ها و امیدها به من بخشیدند و درس معلمی به من آموختند . شاگردی این دو بزرگوار، که ارائه این پایان نامه را به حق مرهون هدایت ایشان می دانم، افتخار بزرگی است که با من خواهد ماند.

هم چنین مراتب امتنان و تشکر خود را خدمت تمامی اعضای خانواده ام ، که در تمام مراحل زندگی دوست، مشوق و راهنمای من بوده اند تقدیم می دارم.

از مسئولین و اساتید دانشگاه سمنان خصوصاً دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر و تمامی دوستانی که در انجام این مجموعه یاریم کردند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در خاتمه از داوران گرامی جناب آقای دکترسعید محمدیان سمنانی و جناب آقای دکتر احمد زیره که با مطالعه این پایان نامه و تقبل داوری جلسه دفاعیه، مرا مدیون خویش ساخته اند، کمال امتنان را دارم.

بار الها سلامتی، سعادت، شادی، پیروزی و پایداری همگی این عزیزان را از درگاهت خواستارم.

زمانی

۱۳۹۳

چکیده

بنابر قضیه اساسی جبر ، اگر $P(z)$ یک چند جمله ای از درجه n باشد . آنگاه $P(z)$ دقیقا” دارای n ریشه می باشد که لزوما” متمایز نیستند . اما این قضیه اطلاعاتی در خصوص مکان ریشه ها نمی دهد . در این پایان نامه مسئله پیدا کردن ناحیه ای که شامل ریشه های $P(z)$ می باشد مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد .

واژه های کلیدی:

قضیه انستروم -ککیا -ضرایب - ریشه ها- چند جمله ایها.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان نامه شامل سه فصل می باشد در فصل اول مفاهیم و قضایای مورد نیاز را معرفی نموده و از اثبات آنها صرف نظر می کنیم مگر اینکه در کتب آنالیز بیان نشده باشد . فصل دوم شامل دو بخش می باشد ابتدا قضایایی که در مورد مکان ریشه های چند جمله ایهای حقیقی می باشد ، بیان و اثبات می کنیم و در بخش دوم هم به بیان و اثبات قضایایی که مکان ریشه های چند جمله ایهای مختلط را مشخص می کنند می پردازیم . فصل سوم شامل چهار بخش می باشد . بخش اول قضایا و نتایج پایه ای که در بخش های بعد برای اثبات قضایا مورد نیاز است بیان می شود سپس با قرار دادن شرایط یکنواختی روی تمام ضرایب قضایایی را بیان و اثبات می کنیم. بخش سوم شرایط یکنواختی روی ضرایب با اندیس زوج و فرد را بررسی نموده و در نهایت شرایط یکنواختی روی چند جمله ایهای خاص و تعیین کران بالای تعداد ریشه های آنها را خواهیم داشت .

مراجع اصلی در این پایان نامه عبارتند از [۱۰], [۱۶], [۱۷], [۲۴], [۲۶].

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف ، قضیه ها و لم های مورد نیاز در فصل های بعدی بیان و از اثبات قضایایی که در کتب مربوط به آنالیز ثابت شده اند صرف نظر می کنیم .

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

همانند متون ریاضی ، در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود .

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{R}^+$: مجوعه اعداد حقیقی مثبت

$\mathbb{Z}$: مجوعه اعداد صحیح

$\mathbb{Z}^+$: مجوعه اعداد صحیح مثبت

$\mathbb{Z}^{++}$: مجوعه اعداد صحیح غیر منفی

$\mathbb{N}$: مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط

$p_{n,\mu}(z) = a_0 + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j \qquad ۱ \leq \mu \leq n$

$\lfloor\ \rfloor$: جزء صحیح پایین

تعریف ۱.۱.۱. *اگر $P(z)=a_\circ+a_1z+\ldots+a_nz^n$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه*

$$a_\circ, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \qquad (a_n \neq \circ)$$

آنگاه $P(z)$ را یک چند جمله ای حقیقی گویند. همچنین اگر

$$a_\circ, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C},$$

آنگاه $P(z)$ را یک چند جمله ای مختلط گویند .

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید $z_\circ \in \mathbb{C}$ و $r>\circ$ یک عدد حقیقی باشد ، در اینصورت دیسک بسته به مرکز $z_\circ$ و شعاع r را با نماد $\overline{B}(z_\circ, r)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم .*

$$\overline{B}(z_\circ, r)=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-z_\circ|\leq r\}.$$

تعریف ۳.۱.۱. *تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_\circ$ تحلیلی گفته می شود هرگاه f در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق پذیر باشد .*

تعریف ۴.۱.۱. *هر مجموعه باز همبند را یک میدان می گوییم و آنرا معمولا" با D نمایش می دهیم .*

تعریف ۵.۱.۱. *تابع $f(z)$ را در یک میدان تحلیلی گوییم اگر در تمام نقاط این میدان مشتق پذیر باشد .*

۲.۱ قضایا و لم های پایه

قضیه ۱.۲.۱. *(قضیه اساسی جبر) : هر چند جمله ای غیر ثابت از درجه n ،حداقل یک ریشه دارد .*

نتیجه ۲.۲.۱. *هر چند جمله ای غیر ثابت از درجه n دقیقا" n ریشه دارد که لزوما" متمایز نیستند .*

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنید $P(z)=a_nz^n+\ldots+a_1z+a_\circ$ و $Q(z)=z^nP(\frac{1}{z})$. اگر $z_\circ\neq\circ$ یک ریشه از $P(z)$ باشد آنگاه $\frac{1}{z_\circ}$ یک ریشه $Q(z)$ می باشد (ریشه های P و Q نسبت به دایره واحد قرینه اند) .*

قضیه ۴.۲.۱. *(قضیه روشه [۱]) اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته C تحلیلی باشند و برای هر z بر روی C ، $|g(z)|<|f(z)|$ ، آنگاه تعداد صفرهای توابع $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ درون C با هم برابر هستند .*

قضیه ۵.۲.۱. *(اصل ماکزیمم) اگر تابع $f(z)$ در میدان D تحلیلی باشد ، آنگاه $|f(z)|$ ماکزیممی در D نمی تواند اختیار کند مگر اینکه تابع $f(z)$ ثابت باشد .*

[۱] Rouche

قضیه ۶.۲.۱. *(اصل مینیمم) اگر تابع $f(z)$ در میدان D تحلیلی باشد و برای هر z در D ، $f(z) \neq ۰$ ، آنگاه $|f(z)|$ مینیممی در D نمی تواند اختیار کند مگر اینکه تابع $f(z)$ ثابت باشد .*

قضیه ۷.۲.۱. *(قضیه انستروم - ککیا [۲]) اگر $P(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه*

$$a_۰ \geq a_۱ \geq \ldots \geq a_{n-۱} \geq a_n > ۰,$$

آنگاه همه ریشه های $P(z)$ خارج از دایره واحد قرار دارند .

برهان. فرض کنید

$$\begin{aligned} f(z) &= (۱ - z)P(z) \\ &= a_۰ + (a_۱ - a_۰)z + \ldots + (a_n - a_{n-۱})z^n - a_n z^{n+۱} \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_۰ + (a_۱ - a_۰)z + \ldots + (a_n - a_{n-۱})z^n - a_n z^{n+۱}| \\ &\geq a_۰ - [(a_۰ - a_۱)\,|z| + \ldots + (a_{n-۱} - a_n)\,|z|^n + a_n\,|z|^{n+۱}] \end{aligned}$$

چون $a_k - a_{k+۱} \geq ۰$. بنابر این برای $|z| < ۱$

$$|f(z)| > a_۰ - [(a_۰ - a_۱) + \ldots + (a_{n-۱} - a_n) + a_n] = ۰$$

لذا همه ریشه های $f(z)$ (بنابراین $P(z)$) خارج از دایره واحد قرار دارند .پس جکم برقرار است . □

با به کار بردن قضیه انستروم - ککیا برای چند جمله ای $P(\frac{۱}{z})$ قضیه زیر بدست می آید .

قضیه ۸.۲.۱. *اگر $P(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه*

$$a_n \geq a_{n-۱} \geq \ldots \geq a_۱ \geq a_۰ > ۰,$$

آنگاه همه ریشه های $P(z)$ در دایره $|z| \leq ۱$ قرار دارند .

---

[۲] Eneström -kakeya

لم ۹.۲.۱. *(لم شوارتس [۳]) فرض کنید $f(z)$ در $|z| < R$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$. اگر در $|z| < R$ داشته باشیم $|f(z)| \leq M$ ، آنگاه برای $|z| = r < R$ داریم $|f(z)| \leq \frac{r}{R}M$.*

لم ۱۰.۲.۱. *اگر برای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $a_j \in \mathbb{C}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ داشته باشیم*

$$|arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

آنگاه برای $t > 0$ و $j = 1, 2, \ldots, n$

$$|ta_j - a_{j-1}| \ \leq \ |t|a_j| - |a_{j-1}|| \ cos\alpha + (\ t|a_j| + |a_{j-1}| \ ) \ sin\alpha.$$

برهان. به [۱۸] مراجعه شود . □

لم ۱۱.۲.۱. *اگر برای $z, z' \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $|z'| \geq |z|$ ، بطوریکه برای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$|arg z^\star - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \qquad z^\star \in \{z, z'\}$$

آنگاه،

$$|z - z'| \leq (\ |z| - |z'| \ ) \ cos\alpha + (\ |z| + |z'| \ ) \ sin\alpha.$$

برهان. به [۱۸] مراجعه شود . □

[۳] Schwarz

فصل ۲

تعمیم قضیه انستروم -ککیا

این فصل از دو بخش تشکیل شده است . در بخش اول، تعمیم قضیه انستروم را برای چندجمله ایهای حقیقی از درجه n و در بخش دوم برای چندجمله ایهای مختلط از درجه n مورد مطالعه قرار می دهیم .

۱.۲ تعمیم قضیه انستروم - ککیا برای چند جمله ایهای حقیقی

با استفاده از قضیه انستروم براحتی می توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۱.۱.۲. *فرض کنید $P(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n باشد بطوریکه برای $t>0$*

$$a_n t^n \geq a_{n-1} t^{n-1} \geq \ldots \geq a_1 t \geq a_0 > 0,$$

آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در $|z| \leq t$ قرار دارند .

به عنوان کاربردی از لم شوارتز [۱] ، عزیز [۲] قضیه زیر را بیان و اثبات نمود.

قضیه ۲.۱.۲. *فرض کنید $P(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای حقیقی مثبت از درجه n باشد . اگر برای $t_1 > t_2 \geq 0$ داشته باشیم*

$$a_r t_1 t_2 + a_{r-1}(t_1 - t_2) - a_{r-2} \geq 0\ ,\ r = 1, 2, \ldots, n+1 \qquad (a_{-1} = a_{n+1} = 0),$$

آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در $|z| \leq t_1$ قرار دارند.

[۱] Schwarz

[۲] Aziz

برهان. به [۳] مراجعه کنید . □

تعمیمی دیگر از قضیه انستروم بصورت زیر می باشد .

قضیه ۳.۱.۲. *فرض کنید $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چند جمله ای از درجه n باشد . بطوریکه برای $k \geq 1$*

$$ka_n \geq a_{n-1} \geq ... \geq a_1 \geq a_0 > 0,$$

آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در

$$|z+k-1| \leq k$$

قرار دارند .

برهان. به [۶] مراجعه شود . □

تذکّر ۴.۱.۲. *به ازاء $k=1$ ، قضیه انستروم بدست می آید.*

اکنون تعمیمی از قضیه (۲ . ۱ . ۳) را بیان می کنیم .

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنید $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه برای $k \geq 1$*

$$Max_{|z|=1}|(ka_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})z+...+(a_1-a_0)z^{n-1}+a_0z^n| \leq M,$$

آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در دایره

$$|z+k-1| \leq \frac{M}{|a_n|}$$

قرار دارند.

برهان. به [۶] مراجعه شود . □

تذکّر ۶.۱.۲. *اگر $p(z)$ شرایط قضیه (۲ . ۱ . ۳) را داشته باشد ، آنگاه برای $|z|=1$ داریم*

$$|(ka_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})z+...+(a_1-a_0)z^{n-1}+a_0z^n|$$

$$\leq |(ka_n-a_{n-1})|+|(a_{n-1}-a_{n-2})|+...+|(a_1-a_0)|+|a_0|$$

$$= ka_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+...+a_1-a_0+a_0$$

$$= ka_n$$

بنابراین برای $M = ka_n$ در قضیه (۲ .۱ . ۳) نتیجه می شود که تمام ریشه های چندجمله ای $p(z)$ که در شرایط (۲ . ۱ . ۳) صدق کند در $|z + k - ۱| \leq k$ قرار دارند .

با قراردادن $k = \frac{a_{n-۱}}{a_n}$ در قضیه (۲ . ۱ .۵) نتیجه ذیل حاصل می شود .

نتیجه ۷.۱.۲. *فرض کنید $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چند جمله ای از درجه n باشد، بطوریکه*

$$Max_{|z|=۱}|(a_{n-۱} - a_{n-۲})z + \ldots + a_۰ z^n| \leq M_۱ , \quad (a_{n-۱} \geq a_n),$$

آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در دایره

$$|z + \frac{a_{n-۱}}{a_n} - ۱| \leq \frac{M_۱}{|a_n|}$$

قرار دارند .

تذکّر ۸.۱.۲. *اگر $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه*

$$۰ < a_n \leq a_{n-۱} \geq ... \geq a_۱ \geq a_۰ > ۰, \qquad (۱.۲)$$

آنگاه

$$M_۱ = Max_{|z|=۱}|(a_{n-۱} - a_{n-۲}) + (a_{n-۲} - a_{n-۳})z + ... + (a_۱ - a_۰)z^{n-۱} + a_۰ z^n|$$

$$\leq (a_{n-۱} - a_{n-۲}) + (a_{n-۲} - a_{n-۳}) + ... + a_۰$$

$$= a_{n-۱}$$

بنابراین از نتیجه (۲ . ۱ .۷) خواهیم داشت که همه ریشه های $p(z)$ که شرط (۱.۲) را داشته باشند در دایره

$$|z + \frac{a_{n-۱}}{a_n} - ۱| \leq \frac{a_{n-۱}}{a_n}$$

قرار دارند .

حال قضیه (۲ . ۱ . ۵) را به صورت زیر تعمیم می دهیم .

قضیه ۹.۱.۲. *فرض کنید $p(z) = a_n z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + ... + a_۱ z + a_۰$ یک چند جمله ای از درجه n باشد . اگر برای $t > ۰, k \geq ۱$ داشته باشیم*

$$Max_{|z|=\frac{1}{t}} |H(z)| \leq M$$

بطوریکه

$$H(z) = \{(tka_n - a_{n-1}) + (ta_{n-1} - a_{n-2})z + ... + (ta_1 - a_0)z^{n-1} + ta_0 z^n\},$$

آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در

$$|z + t(k-1)| \leq \frac{M}{|a_n|}$$

قرار دارند.

به جای اثبات قضیه فوق ، قضیه زیر را بیان و اثبات می کنیم .

قضیه ۱۰.۱.۲. *فرض کنید $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه برای $t > 0, k \geq 1$*

$$Max_{|z|=R} |H(z)| \leq M$$

و

$$H(z) = (kta_n - a_{n-1}) + (ta_{n-1} - a_{n-2})z + ... + ta_0 z^n.$$

اگر $|a_n| \left[kt + \left(\frac{1}{R} - t\right)\right] \leq M$ ، آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در دایره $|z + t(k-1)| \leq \frac{M}{|a_n|}$ قرار دارند و

اگر $|a_n| \left[kt + \left(\frac{1}{R} - t\right)\right] > M$ ، آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در دایره $|z| \leq t(2k-1) + \left(\frac{1}{R} - t\right)$ قرار دارند .

تذکّر ۱۱.۱.۲. *برای $t = 1$ و $R = \frac{1}{t}$ در قضیه های (۲. ۱. ۹) و (۲ .۱ .۱۰) بترتیب قضیه های (۲ . ۱ . ۵) و (۲. ۱ . ۹) حاصل می‌گردد .*

برهان. چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} F(z) &= (t - z)P(z) \\ &= -a_n z^{n+1} + (ta_n - a_{n-1})z^n + (ta_{n-1} - a_{n-2})z^{n-1} + ... + (ta_1 - a_0)z + ta_0 \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} G(z) &= z^{n+1} F\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= -a_n + (ta_n - a_{n-1})z + (ta_{n-1} - a_{n-2})z^2 + ... + ta_0 z^{n+1} \\ &= -a_n + ta_n z - kta_n z + (kta_n - a_{n-1})z + (ta_{n-1} - a_{n-2}) + ... + ta_0 z^{n+1} \\ &= -a_n + ta_n z - kta_n z + zH(z). \end{aligned}$$

یا

$$|G(z)| \geq |a_n||t(k-۱)z+۱| - |z||H(z)|. \tag{۲.۲}$$

همچنین برای $|z|=R$ ، $|H(z)| \leq M$ و از آنجا که $H(z)$ در $|z| \leq R$ تحلیلی است ، در نتیجه بنا به اصل ماکزیمم در $|z| \leq R$ داریم $|H(z)| \leq M$. پس از (۲-۲) خواهیم داشت

$$|G(z)| \geq |a_n||t(k-۱)z+۱| - |z|M \tag{۳.۲}$$

رابطه (۲ . ۳) مثبت است اگر

$$\frac{M}{a_n}|z| < |t(k-۱)z+۱|$$

بنابراین در $|z| \leq R$ برای $z \in E$ بطوریکه $E = \{z; \frac{M}{|a_n|}|z| < |t(k-۱)z+۱|\}$ ، $|G(z)| > ۰$.

حال فرض کنید $M \geq \left(kt + \left(\frac{۱}{R} - t\right)\right)|a_n|$ و $w \in E$ ، آنگاه

$$\frac{M}{|a_n|}|w| < |t(k-۱)w+۱|$$
$$< t(k-۱)|w|+۱$$

یا

$$\left\{\frac{M}{|a_n|} - t(k-۱)\right\}|w| < ۱$$

پس اگر $|a_n| \leq MR - t(k-۱)|a_n|R$ ، آنگاه $|w| \leq R$. می دانیم که برای $|z| \leq R$ ، اگر $z \in E$ آنگاه $|G(z)| > ۰$ پس

$$\frac{M}{a_n}|z| < |t(k-۱)z+۱|$$

بنابراین همه ریشه های $G(z)$ در

$$\frac{M}{|a_n|}|z| \geq |t(k-۱)z+۱|$$

قرار دارند و یا اینکه تمام ریشه های $P(z)$ در

$$|z+t(k-۱)| \leq \frac{M}{|a_n|}$$

قرار دارند . اکنون فرض می کنیم

$$M < \left(\frac{Rt(k-1)+1}{R} \right) |a_n|$$

برای $|z| \leq R$ داریم

$$\begin{aligned} |G(z)| &= |-a_n + (ta_n - kta_n)z + zH(z)| \\ &\geq |a_n| - |z| \left\{ (t(k-1) + \frac{M}{|a_n|} \right\} |a_n| \\ &\geq |a_n| \left\{ 1 - |z| \left(t(k-1) + \left(\frac{1}{R} - t \right) + kt \right) \right\} > 0 \end{aligned}$$

اگر

$$|z| < \frac{1}{t(2k-1) + \left(\frac{1}{R} - t \right)}$$

پس همه ریشه های $G(z)$ در داخل

$$|z| \geq \frac{1}{t(2k-1) + \left(\frac{1}{R} - t \right)}$$

قرار دارند و در نتیجه همه ریشه های $P(z)$ در دایره

$$|z| \leq t(2k-1) + \left(\frac{1}{R} - t \right)$$

قرار دارند و اثبات کامل می شود . □

۲.۲ تعمیم قضیه انستروم - ککیا برای چند جمله ایهای مختلط

به عنوان تعمیمی از قضیه (۲ . ۱ . ۲) برای چندجمله ایهای مختلط از درجه n ، قضیه زیر را بیان و اثبات می کنیم .

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنید $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چند جمله ای از درجه n باشد بطوریکه برای $j = 0, 1, \dots, n$ ، $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ و $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$. اگر برای $t_1 > t_2 \geq 0$ ، $r = 2, 3, \dots, n$ داشته باشیم*

$$\alpha_r t_1 t_2 + \alpha_{r-1}(t_1 - t_2) - \alpha_{r-2} \geq 0$$

و

$$\beta_r t_1 t_2 + \beta_{r-1}(t_1 - t_2) - \beta_{r-2} \geq 0$$

و برای $k = k_1 + ik_2, r = n+1$

$$(\alpha_n + k_1)(t_1 - t_2) - \alpha_{n-1} \geq 0$$

و

$$(\beta_n + k_2)(t_1 - t_2) - \beta_{n-1} \geq 0,$$

آنگاه همه ریشه های $p(z)$ در

$$|z + \frac{k(t_1 - t_2)}{a_n}| \leq R$$

قرار دارند به قسمی که

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{|a_n|}\{[(\alpha_n + k_1) + (\beta_n + k_2)](t_1 - t_2) + (\alpha_n + \beta_n)t_2 \\ - (\alpha_1 + \beta_1)\frac{t_2}{t_1^{n-1}} - (\alpha_0 + \beta_0)\frac{1}{t_1^{n-1}} + (|\alpha_1 t_1 t_2 + \alpha_0(t_1 - t_2)| \\ + |\beta_1 t_1 t_2 + \beta_0(t_1 - t_2)|)\frac{1}{t_1^n} + (|\alpha_0| + |\beta_0|)\frac{t_2}{t_1^n}\}. \end{aligned}$$

برهان. بفرض

$$\begin{aligned} F(z) &= (t_2 + z)(t_1 - z)p(z) \\ &= -a_n z^{n+2} + (a_n(t_1 - t_2) - a_{n-1})z^{n+1} + (a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2})z^n + ... \\ &+ (a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0)z^2 + (a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2))z + a_0 t_1 t_2 \\ &= -a_n z^{n+2} - k(t_1 - t_2)z^{n+1} + ((k + a_n)(t_1 - t_2) - a_{n-1})z^{n+1} \\ &+ (a_n t_1 t_2 + a_{n-1}(t_1 - t_2) - a_{n-2})z^n + ... + (a_2 t_1 t_2 + a_1(t_1 - t_2) - a_0)z^2 \\ &+ (a_1 t_1 t_2 + a_0(t_1 - t_2))z + a_0 t_1 t_2 \\ &= -a_n z^{n+2} - k(t_1 - t_2)z^{n+1} + ((k_1 + \alpha_n)(t_1 - t_2) - \alpha_{n-1})z^{n+1} \\ &+ (\alpha_n t_1 t_2 + \alpha_{n-1}(t_1 - t_2) - \alpha_{n-2})z^n + ... + (\alpha_2 t_1 t_2 + \alpha_1(t_1 - t_2) - \alpha_0)z^2 \\ &+ (\alpha_1 t_1 t_2 + \alpha_0(t_1 - t_2))z + \alpha_0 t_1 t_2 + i[((k_2 + \beta_n)(t_1 - t_2) - \beta_{n-1})z^{n+1} \\ &+ (\beta_n t_1 t_2 + \beta_{n-1}(t_1 - t_2) - \beta_{n-2})z^n + ... + (\beta_2 t_1 t_2 + \beta_1(t_1 - t_2) - \beta_0)z^2 \\ &+ (\beta_1 t_1 t_2 + \beta_0(t_1 - t_2))z + \beta_0 t_1 t_2]. \end{aligned}$$

بنابراین

$$|F(z)| \geq |a_n||z|^{n+1}|z + \frac{k(t_1 - t_2)}{a_n}| - |(k_1 + \alpha_n)(t_1 - t_2) - \alpha_{n-1}||z|^{n+1}$$

$$- |\alpha_n t_1 t_2 + \alpha_{n-1}(t_1 - t_2) - \alpha_{n-2}||z|^n - ... - |\alpha_2 t_1 t_2 + \alpha_1(t_1 - t_2) - \alpha_0||z|^2$$
$$- |\alpha_1 t_1 t_2 + \alpha_0(t_1 - t_2)||z| - |\alpha_0 t_1 t_2| - [|(k_2 + \beta_n)(t_1 - t_2) - \beta_{n-1}||z|^{n+1}$$
$$+ |\beta_n t_1 t_2 + \beta_{n-1}(t_1 - t_2) - \beta_{n-2}||z|^n + ... + |\beta_2 t_1 t_2 + \beta_1(t_1 - t_2) - \beta_0||z|^2$$
$$+ |\beta_1 t_1 t_2 + \beta_0(t_1 - t_2)||z| + |\beta_0 t_1 t_2|].$$
$$= |z|^{n+1}\{|z + \frac{k(t_1 - t_2)}{a_n}||a_n| - (|(k_1 + \alpha_n)(t_1 - t_2) - \alpha_{n-1}| + |(k_2 + \beta_n)(t_1 - t_2) - \beta_{n-1}|)$$
$$- (|\alpha_n t_1 t_2 + \alpha_{n-1}(t_1 - t_2) - \alpha_{n-2}| + |\beta_n t_1 t_2 + \beta_{n-1}(t_1 - t_2) - \beta_{n-2}|)\frac{1}{|z|} - \dots$$
$$- (|\alpha_2 t_1 t_2 + \alpha_1(t_1 - t_2) - \alpha_0| + |\beta_2 t_1 t_2 + \beta_1(t_1 - t_2) - \beta_0|)\frac{1}{|z|^{n-1}}$$
$$- (|\alpha_1 t_1 t_2 - \alpha_0(t_1 - t_2)| + |\beta_1 t_1 t_2 + \beta_0(t_1 - t_2)|)\frac{1}{|z|^n}$$
$$- (|\alpha_0 t_1 t_2| + |\beta_0 t_1 t_2|)\frac{1}{|z|^{n+1}}$$

برای $|z| > t_1$ داریم

$$|F(z)| \geq |z|^{n+1}\{|z + \frac{k(t_1 - t_2)}{a_n}||a_n| - (|(k_1 + \alpha_n)(t_1 - t_2) - \alpha_{n-1}| + |(k_2 + \beta_n)(t_1 - t_2) - \beta_{n-1}|)$$
$$- (|\alpha_n t_1 t_2 + \alpha_{n-1}(t_1 - t_2) - \alpha_{n-2}| + |\beta_n t_1 t_2 + \beta_{n-1}(t_1 - t_2) - \beta_{n-2}|)\frac{1}{|t_1|} - \dots$$
$$- (|\alpha_2 t_1 t_2 + \alpha_1(t_1 - t_2) - \alpha_0| + |\beta_2 t_1 t_2 + \beta_1(t_1 - t_2) - \beta_0|)\frac{1}{|t_1|^{n-1}}$$
$$- (|\alpha_1 t_1 t_2 + \alpha_0(t_1 - t_2)| + |\beta_1 t_1 t_2 + \beta_0(t_1 - t_2)|)\frac{1}{|t_1|^n} - (|\alpha_0 t_1 t_2| + |\beta_0 t_1 t_2|)\frac{1}{|t_1|^{n+1}}\} > 0$$

با توجه به فرضیات قضیه

$$|z + \frac{k(t_1 - t_2)}{a_n}||a_n| > (k_1 + \alpha_n)(t_1 - t_2) + (k_2 + \beta_n)(t_1 - t_2) + \alpha_n t_2 + \beta_n t_2$$
$$-\alpha_1\frac{t_2}{t_1^{n-1}} - \beta_1\frac{t_2}{t_1^{n-1}} - \frac{\alpha_0}{t_1^{n-1}} - \frac{\beta_0}{t_1^{n-1}} + (|\alpha_1 t_1 t_2 + \alpha_0(t_1 - t_2)|$$
$$+|\beta_1 t_1 t_2 + \beta_0(t_1 - t_2)|)\frac{1}{t_1^n} + |\alpha_0|\frac{t_2}{t_1^n} + |\beta_0|\frac{t_2}{t_1^n}$$

و در نتیجه برای $|z| > t_1$ ، $|F(z)| > 0$ اگر