وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

نقاط ثابت برای نگاشت‌های انقباضی ضعیف تعمیم‌یافته در فضاهای متریک جزئی

نگارش

مرضیه شریفی

اساتید راهنما

دکتر علی پارسیان

دکتر اسماعیل نظری

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

سپاس گزاری

سپاس و ستایش مر خدای عزوجل که آثار قدرت او بر چهره ی روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

شایسته است از اساتید گرانقدر و ارجمندم جناب آقای دکتر علی پارسیان و جناب آقای دکتر اسماعیل نظری به سبب حمایت های بی دریغشان در کلیه مراحل پایان نامه و در طی دو سال تحصیل، تقدیر و تشکر کنم. نمی توانم معنایی بالاتر از تشکر بر زبان جاری سازم و سپاس خود را در وصف استادان خویش آشکار نمایم، که هر چه گویم و سرایم، کم گفته ام. بدون شک جایگاه و منزلت استاد، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی آنان، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگارم. اساتیدی که الفبای پژوهش و نگارش را در سایه صبر و مهربانی از ایشان آموختم. آنان که گلاب گلبرگ وجودشان مایه موفقیت و تلاشم و شاگردی در محضر بزرگوارشان افتخارم در زندگی است.

مرضیه شریفی، شهریور ۹۲

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

ای پدر از تو هر چه می گویم باز هم کم می‌آورم خورشیدی شدی و از روشنایی‌ات جان گرفتم و در ناامیدی‌ها نازم را کشیدی و لبریزم کردی از شوق اکنون حاصل دستان خسته‌ات رمز موفقیتم شد به خودم تبریک می گویم که تو را دارم و دنیا با همه ی بزرگیش مثل تو را ندارد.....

و تو ای مادر، ای شوق زیبایی نفس کشیدن ای روح مهربان هستی‌ام، تو رنگ شادی‌هایم شدی و لحظه‌ها را با تمام وجود از من دور کردی و عمری خستگی‌ها را به جان خریدی تا بتوانی طعم خوش موفقیت را به من بچشانی.

چکیده

در این پایان‌نامه به معرفی فضای متریک جزئی پرداخته و وجود و یکتایی نقطه ثابت را برای نگاشت‌های انقباضی ضعیف تعمیم‌یافته، φ-انقباض ضعیف تعمیم‌یافته و انقباض تعمیم‌یافته بررسی می‌کنیم. همچنین نگاشت‌های چندمقداری g-تقریبی را در فضای متریک جزئی ارائه داده و وجود نقطه ثابت مشترک را برای این نگاشت‌ها که در شرایط انقباض تعمیم‌یافته صدق می‌کند، در فضای متریک جزئی مرتب اثبات می‌کنیم. به‌علاوه مفهوم یک متر هاوسدرف جزئی را مطرح کرده و شرایط وجود نقاط ثابت را برای تعدادی نگاشت غیرخطی چندمقداری بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: نقطه ثابت، فضای متریک جزئی، نقطه ثابت مشترک، انقباض ضعیف تعمیم‌یافته، فضای متریک جزئی مرتب، نگاشت چندمقداری، متر هاوسدرف جزئی.

فهرست مطالب

فهرست مطالب **ب**

۱ مفاهیم اولیه ومقدمات **۱**

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ تعاریف ۱

۲ معرفی فضای متریک جزئی **۱۰**

۱.۲ مقدمه ۱۰

۲.۲ تعاریف ۱۱

۳.۲ بررسی اصل انقباض باناخ در فضای متریک جزئی ۱۳

۳ نقطه ثابت برای نگاشت‌های تک‌مقداری **۲۰**

۱.۳ مقدمه ۲۰

۲.۳ نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی ضعیف تعمیم‌یافته ۲۱

۱.۲.۳ نگاشت‌هایی با خواص P یا Q ۲۸

۳.۳ نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های ϕ-انقباض ضعیف تعمیم‌یافته ۳۰

۴.۳ نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی تعمیم‌یافته ۳۶

۴ نقطه ثابت برای نگاشت‌های چندمقداری **۴۴**

۱.۴ مقدمه ۴۴

۲.۴ نقطه ثابت مشترک نگاشت‌های چندمقداری g-تقریبی در فضای متریک جزئی مرتب . . . ۴۸

۳.۴ نقطه ثابت نگاشت انقباضی چندمقداری نادلر و قضیه نقطه ثابت سوزوکی برای نگاشت چندمقداری تعمیم‌یافته ۶۰

۴.۴ نقطه ثابت مشترک برای انقباض‌های چندمقداری تعمیم‌یافته ۷۱

مراجع **۸۳**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۸۶**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۸۹**

پیشگفتار

تا سال ۱۹۶۸ اصل انقباض باناخ، ابزار اصلی و شاید تنها روشی بود که به‌کاربرده شد تا وجود و یکتایی نقاط ثابت را اثبات کند. سپس این اصل برای انقباض‌های تعمیم‌یافته از نگاشت‌های چندمقداری و برای دو نگاشت که یکی تک‌مقداری و دیگری چندمقداری بود، توسعه داده شد [۱۱].

اصل انقباض ضعیف تعمیمی از اصل انقباض باناخ است که ابتدا توسط **آلبر** [۱] و همکارانش در سال ۱۹۹۷، برای نگاشت‌های تک‌مقداری در فضای هیلبرت تعریف و وجود نقاط ثابت را اثبات کردند. سپس این اصل توسط **روآدیس**[۲] به فضاهای متریک توسعه داده شد و او نشان داد که اکثر نتایج این مولفان برای هر فضای باناخ درست است [۲۰].

خان [۳] و همکاران او استفاده از یک تابع کنترلی را در نظریه نقطه ثابت فضاهای متریک آغاز کردند و آن‌را تابع فاصله جای‌گزین نامیدند [۱۱].

بعد از پیدایش اصل انقباض باناخ، تنوعی از تعمیم، گسترش و کاربردهای این اصل به‌دست آمد. **نادلر** [۴] اولین کسی بود که نگاشت‌های چندمقداری و انقباض‌ها را ترکیب کرد. او نتایج جالب توجهی برای انقباض‌های چندمقداری اثبات کرد. تئوری نگاشت‌های چندمقداری کاربردهایی در اقتصاد، بهینه‌سازی محدب و نظریه کنترل بهینه دارد. از طرف دیگر، اصل انقباض باناخ به‌طورگسترده در اثبات وجود جواب‌های معادلات عملگر، از جمله معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرال کاربرد دارد [۹].

---

[۱] Alber

[۲] Rhoades

[۳] Khan

[۴] Nadler

این اصل در اشکال متفاوتی تعمیم داده شده است. برای نمونه، **ماتئوس** [5] مفهوم یک متر جزئی را در شبکه‌های جریان داده و اطلاعات به‌کار برد [۱۵، ۱۶]. یک انگیزه طرح مفهوم متر جزئی این بود که مدل‌های ریاضی مناسبی در تئوری شمارش و محاسبه به‌دست آید و اصل انقباض باناخ به این فضاها تعمیم یابد [۲].

آیدی [6]، **عباس** [7] و **وترو** [8] یک متر هاوسدرف جزئی را مطرح‌کردند و قضیه نقطه ثابت نادلر را به فضاهای متریک جزئی توسعه دادند. سپس تئوری نقطه ثابت برای نگاشت‌های چندمقداری روی فضای متریک جزئی با استفاده از متر هاوسدرف جزئی آغاز شد [۹].

در سال ۱۹۳۷ **ون نیومن** [9] تئوری نقطه ثابت را برای نگاشت‌های چندمقداری در مطالعه نظریه بازی‌ها بیان کرد. قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های چندمقداری، در نظریه کنترل واقعاً مفید هستند و به‌طور مکرر در حل بعضی از مسائل اقتصادی به‌کار رفته‌اند. او مفهوم متر هاوسدرف را به‌کار برد تا اصل انقباض چندمقداری را که شامل اصل انقباض باناخ به عنوان یک حالت ویژه است، اثبات کند [۱].

داگ [10] قضایای نقطه ثابت ترکیبی را ثابت کرد و برخی کاربردهای آن‌را به‌دست آورد. **هانگ** [11] و **شن** [12] نتایج نقطه ثابت مشترک برای عملگرهای چندمقداری انقباضی تعمیم‌یافته را در یک فضای متریک کامل اثبات کردند [۱۴].

هانگ مفاهیم مقادیر تقریبی، مقادیر تقریبی مقایسه‌پذیر، مقادیر تقریبی مقایسه‌پذیر پایینی و بالایی را ارائه داد. این تعاریف، ابزار بسیار مفیدی برای اثبات وجود یک نقطه ثابت از یک عملگر چندمقداری در یک فضای

[5] Matthews

[6] Aydi

[7] Abbas

[8] Vetro

[9] Von Neumann

[10] Dhage

[11] Hong

[12] Shen

متریک مرتب هستند. عباس و **اردوران** [۱۳] مفهوم این تعاریف را با استفاده از خودنگاشت‌های g توسعه و نگاشت‌های چندمقداری g-تقریبی را ارائه دادند. آنها مفاهیم g-تقریبی مقایسه‌پذیر، g-تقریبی مقایسه‌پذیر بالایی و g-تقریبی مقایسه‌پذیر پایینی را نیز معرفی کردند [۱۴].

این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد .

در فصل اول برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌گردد.

در فصل دوم به معرفی فضای متریک جزئی پرداخته و وجود نقطه ثابت برای خودنگاشت انقباضی در فضای متریک جزئی اثبات می‌شود.

در فصل سوم وجود و یکتایی نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی ضعیف تعمیم‌یافته، φ-انقباض ضعیف تعمیم‌یافته و انقباض تعمیم‌یافته بررسی می‌گردد.

در فصل چهارم نتایج نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های چندمقداری که در شرایط انقباضی تعمیم‌یافته صدق می‌کند، در فضای متریک جزئی به‌دست می‌آید.

این مقاله از مرجع [۳] استخراج شده است.

[۱۳] Erduran

فصل ۱

مفاهیم اولیه ومقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل با مفاهیم جدید آشنا می‌شویم و تعاریفی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $T: X \longrightarrow X$ یک نگاشت روی مجموعه‌ی X باشد در این‌صورت $x \in X$ را نقطه‌ی ثابت T نامند، اگر $T(x) = x$ باشد.

مجموعه‌ی همه‌ی نقاط ثابت T را با نماد $Fix(T)$ یا $F(T)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$Fix(T) = \{x \in X : \; Tx = x\} = F(T)$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $T: X \longrightarrow X$ یک خودنگاشت با مجموعه نقاط ثابت $F(T) \neq \emptyset$ باشد. در این‌صورت T دارای خاصیت P است اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $F(T^n) = F(T)$ باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض‌کنید $S,T:X\longrightarrow X$ خودنگاشت‌هایی با $F(T)\cap F(S)\neq\emptyset$ باشد. در این‌صورت T,S دارای خاصیت Q هستند اگر به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $F(T^n)\cap F(S^n)=F(T)\cap F(S)$ باشد.

مثال ۴.۲.۱. *فرض‌کنید $S,T:X\longrightarrow X$ به‌صورت $Tx=x^۲$ و $Sx=\frac{x}{۳}$ باشد. در این‌صورت T,S دارای خاصیت Q هستند.*

تعریف ۵.۲.۱. تابع $\psi:[۰,\infty)\longrightarrow[۰,\infty)$ یک تابع فاصله جای‌گزین نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

i) ψ یکنوای صعودی و پیوسته باشد.

ii) $\psi(t)=۰ \quad\Leftrightarrow\quad t=۰$

مجموعه همه توابع فاصله جای‌گزین با Λ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱. فرض‌کنید (X,d) یک فضای متریک و $CB(X)$ خانواده‌ی همه زیرمجموعه‌های کراندار، بسته و ناتهی X باشد. در این‌صورت نقطه $x\in X$ یک نقطه ثابت نگاشت چندمقداری $T:X\to CB(X)$ است اگر $x\in Tx$ باشد. به‌علاوه عضو $x\in X$، نقطه ثابت مشترک نگاشت‌های $T,S:X\to CB(X)$ نامیده می‌شود اگر $x\in Tx\cap Sx$ باشد.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $g:X\longrightarrow X$ و $T:X\longrightarrow CB(X)$ باشد. نقطه $x\in X$،

(i) : یک نقطه‌ی انطباقی از زوج (g,T) است، اگر $gx\in Tx$ باشد.

(ii) : یک نقطه‌ی ثابت مشترک از زوج (g,T) است، اگر $x=gx\in Tx$ باشد.

$C(g,T)$ مجموعه همه‌ی نقاط انطباقی زوج (g,T) و $F(g,T)$ مجموعه همه‌ی نقاط ثابت مشترک زوج (g,T) را مشخص می‌کنند.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $f:X\longrightarrow X$، $T:X\longrightarrow CB(X)$ و $fTx\in CB(X)$ باشد. زوج (f,T) را،

۱. تعویض‌پذیر نامیم، اگر به ازای هر $x\in X$، $Tfx=fTx$ باشد.

۲. به‌طورضعیف سازگار گوییم، اگر در نقاط انطباقی‌شان تعویض‌پذیر باشند، یعنی $fTx = Tfx$ هنگامی‌که $x \in C(f, T)$ است.

۳. (IT)-تعویض‌پذیر در $x \in X$ نامیم اگر $fTx \subseteq Tfx$ باشد.

مثال ۹.۲.۱. *فرض کنید $X = \{۰, ۱\}$ با متر معمولی باشد. $f : X \longrightarrow X$ و $T : X \longrightarrow CB(X)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید،*

$$f(x) = \begin{cases} ۰, & x = ۰ \\ ۱, & x = ۱ \end{cases}, \qquad T(x) = \begin{cases} \{۰\}, & x = ۰ \\ \{۰, ۱\}, & x = ۱ \end{cases}$$

زوج (f, T) تعویض‌پذیر، به‌طورضعیف سازگار و در نقطه صفر IT-تعویض‌پذیر می‌باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید $T : X \longrightarrow CB(X)$ باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow X$، T-به‌طورضعیف تعویض‌پذیر در $x \in X$ نامیده می‌شود اگر $f^۲x \in Tfx$.

تعریف ۱۱.۲.۱. نگاشت $f : X \longrightarrow X$ نسبت به $T : X \longrightarrow CB(X)$ خودتوان منطبق نامیده می‌شود اگر برای $x \in C(f, T)$، $f^۲(x) = f(x)$ باشد. نقطه x، یک نقطه‌ی خودتوانی منطبق نامیده می‌شود.

اکنون مثالی از زوج هیبریدی $\{f, T\}$ را ارائه می‌دهیم که در آن f، T-به‌طورضعیف تعویض‌پذیر در نقطه $x \in C(f, T)$ باشد.

مثال ۱۲.۲.۱. *فرض کنید $X = [۰, \infty)$ با متر معمولی باشد. $f : X \longrightarrow X$ و $T : X \longrightarrow CB(X)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید*

$$f(x) = \begin{cases} ۰, & ۰ \leq x < ۱ \\ x + ۱, & ۱ \leq x < \infty \end{cases}, \quad T(x) = \begin{cases} \{x\}, & ۰ \leq x < ۱ \\ [۱, x + ۲], & ۱ \leq x < \infty \end{cases}$$

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که f در نقطه $x = ۰ \in C(f, T)$، T-به‌طورضعیف تعویض‌پذیر می‌باشد.

مثال ۱.۲.۱۳. *فرض کنید* $X=\mathbb{R}$ *با متر معمولی باشد.* $f:X\longrightarrow X$ *و* $T:X\longrightarrow CB(X)$ *را به‌صورت زیر تعریف کنید*

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x\leq 0 \\ -\dfrac{2}{x}, & 0<x \end{cases}, \quad T(x)=\begin{cases} \{x\}, & x\leq -1 \\ [x,1], & -1<x\leq 1 \\ [1,x], & 1<x<\infty \end{cases}$$

که $C(f,T)=\{-1\}$ *و* f *نسبت به* T *خودتوان منطبق می‌باشد. همچنین نقطه* $x=-1$ *یک نقطه ثابت مشترک زوج* (f,T) *است به‌طوری‌که* $x=-1=f(-1)\in T(-1)$.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید $\leq$ یک رابطه روی مجموعه‌ی ناتهی X باشد، بنابراین $\leq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی نامیده می‌شود اگر و فقط اگر رابطه $\leq$ روی X انعکاسی، متعدی و پادمتقارن باشد.

(i) : انعکاسی است اگر و تنها اگر برای هر $a\in X$، $a\leq a$ باشد.

(ii) : پادمتقارن است اگر و تنها اگر $a\leq b$ و $b\leq a$ نتیجه دهد $a=b$ برای $a,b\in X$.

(iii) : متعدی است اگر و تنها اگر $a\leq b$ و $b\leq c$ نتیجه دهد $a\leq c$ برای $a,b,c\in X$.

زوج مرتب $(X,\leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲.۱۵. *اگر* X *یک مجموعه‌ی ناتهی باشد.* $P(X)$ *مجموعه توانی* X*، با رابطه شمول* $\subseteq$ *روی* $P(X)$ *یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.*

تعریف ۱.۲.۱۶. برای دو زیرمجموعه A,B از X، $A\leq_1 B$ است اگر برای هر $x\in A$، وجود داشته باشد $y\in B$ به‌طوری‌که $x\leq y$ باشد و $A\leq B$ است اگر هر $x\in A$ و $y\in B$، $x\leq y$ را نتیجه دهد.

مثال ۱.۲.۱۷. *فرض کنید* $X=\mathbb{R}$، $A=[0,1]$ *و* $B=[\frac{1}{2},3]$ *باشد، در این‌صورت* $A\leq_1 B$ *است. اگر* $A=[0,1]$ *و* $B=[2,3]$ *باشد آنگاه* $A\leq B$ *می‌باشد.*

تعریف ۱.۲.۱۸. A) تابع $f:X\to\mathbb{R}$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی نامیده می‌شود، اگر برای هر $\{x_n\}\subseteq X$ و $x\in X$، که $x_n\to x$ همگرا باشد، داشته باشیم $f(x)\leq \liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

B) تابع $f:X\to\mathbb{R}$ نیم‌پیوسته‌ی بالایی نامیده می‌شود، اگر برای هر $\{x_n\}\subseteq X$ و $x\in X$، که $x_n\to x$ همگرا باشد، داشته باشیم $\limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le f(x)$.

مثال ۱.۲.۱۹. *توابع f,g تعریف‌شده به‌صورت زیر نیم‌پیوسته‌ی بالایی در نقطه‌ی $x_\circ=\circ$ هستند.*

$$f(x)=\begin{cases} sin(\frac{۱}{x}), & x\neq \circ \\ ۱, & x=\circ \end{cases} \quad , \qquad g(x)=\begin{cases} -۱, & x<\circ \\ ۱, & x\geq \circ \end{cases}$$

و توابع k,h نیم‌پیوسته‌ی پایینی می‌باشند.

$$k(x)=\begin{cases} \frac{x}{۲}, & x\in[\circ,۱] \\ \frac{e^{۱-x}}{۲}, & x>۱ \end{cases} \quad , \qquad h(x)=\begin{cases} \circ, & |x|\geq ۱ \\ ۱, & |x|<۱ \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۲۰. فرض‌کنید (X,d) یک فضای متریک و $CB(X)$ خانواده‌ی همه زیرمجموعه‌های کراندار، بسته و ناتهی X باشد. در این‌صورت:

a) نگاشت $T:X\to X$ یک انقباض(باناخ) است اگر به ازای هر $x,y\in X$، ثابت $k\in(\circ,۱)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $d(Tx,Ty)\le k\ d(x,y)$.

مثال: فرض کنید $X=[\circ,+\infty)$ با متر به‌صورت $d(x,y)=\begin{cases} x+y, & x\neq y \\ \circ, & x=y \end{cases}$ باشد. برای هر $x\in X$ درنظر بگیرید $Tx=\frac{x}{۳}$ و $k=\frac{۱}{۲}$. در این‌صورت $d(Tx,Ty)\le\frac{۱}{۲}d(x,y)$ است.

b) خودنگاشت $T:X\to X$ یک انقباض تعمیم‌یافته در (X,d) است اگر و تنها اگر به ازای هر $x,y\in X$ و ثابت $k\in(\circ,۱)$ در شرط $d(Tx,Ty)\le k\ m(x,y)$ صدق کند.

$$m(x,y)=max\Big\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{۲}\Big\}$$

مثال: فرض کنید $X=[۱,\infty)$ با متر اقلیدوسی $d(x,y)=|x-y|$ و $T:X\to X$ به‌صورت $Tx=\frac{x}{۳}$ باشد. در این‌صورت به ازای هر $x,y\in X$ با $k=\frac{۱}{۲}$ داریم

$$\frac{۱}{۳}|x-y|\le\frac{۱}{۲}|x-y|\le k\ m(x,y)$$

بنابراین نگاشت T یک انقباض تعمیم‌یافته است.

c) تعمیم دیگری از شرط انقباض، نوع غیرخطی آن یعنی ϕ-انقباض است، که به ازای هر $x, y \in X$، شرط $d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y))$ برقرار باشد و $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ نیم‌پیوسته بالایی از راست است، به‌طوری‌که برای هر $t > 0$، $\phi(t) < t$ می‌باشد.

مثال: مثال (a) را درنظر بگیرید با این تفاوت که به‌جای k، $\phi(t) = \frac{t}{2}$ را قرار دهید.

d) خودنگاشت $T : X \to X$ یک ϕ-انقباض تعمیم‌یافته نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $x, y \in X$ شرط $d(Tx, Ty) \leq \phi(m(x, y))$ برقرار باشد که $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ تابع غیرنزولی و پیوسته است، به‌طوری‌که برای هر $t > 0$، $\phi(t) < t$ باشد.

مثال: مثال (b) را درنظر بگیرید با این تفاوت که به‌جای k، $\phi(t) = \frac{t}{2}$ را قرار دهید.

e) خودنگاشت $T : X \to X$، ϕ-انقباض ضعیف نامیده می‌شود اگر یک نگاشت غیرنزولی و پیوسته $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ با شرط $\phi(0) = 0$ و $\phi(t) > 0$ برای هر $t > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y)). \tag{1.1}$$

اگر قرار دهیم $\phi(t) = (1 - k)t$ که $0 < k < 1$ باشد، این انقباض ضعیف به انقباض باناخ تبدیل می‌شود. انقباض رابطه (1.1) تعمیمی از Φ-انقباض است. به این صورت که اگر ϕ یک تابع پایین نیم‌پیوسته از راست باشد، آنگاه $\Phi(t) = t - \phi(t)$ یک تابع بالا نیم‌پیوسته از راست می‌شود و به‌علاوه رابطه (1.1) به رابطه Φ-انقباض یعنی $d(Tx, Ty) \leq \Phi(d(x, y))$ تبدیل می‌شود.

مثال: فرض کنید $X = [1, \infty)$ با متر اقلیدوسی $d(x, y) = |x - y|$ و $T : X \to X$ به‌صورت $Tx = \frac{x}{3}$ باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in X$ با $\phi(t) = \frac{t}{3}$ داریم

$$\frac{1}{3}|x - y| \leq \frac{2}{3}|x - y| = d(x, y) - \phi(d(x, y))$$

بنابراین خودنگاشت T، ϕ-انقباض ضعیف است.

f) نگاشت‌های $T,S:X\longrightarrow X$، ϕ-انقباض‌های ضعیف تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند اگر یک نگاشت $\phi:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$ با شرط $\phi(0)=0$ و $\phi(t)>0$ برای هر $t>0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x,y\in X$، داشته باشیم

$$d(Tx,Sy)\leq M(x,y)-\phi(M(x,y)).$$

که
$$M(x,y)=max\Big\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Sy),\frac{d(x,Sy)+d(y,Tx)}{2}\Big\}$$

مثال: فرض کنید $X=[0,1]$ با متر اقلیدوسی $d(x,y)=|x-y|$ باشد. برای هر $x\in[0,1]$، $T,S:X\rightarrow X$ را به‌صورت $Tx=\frac{1}{3}x^2$ و $Sx=0$ درنظر بگیرید. در این‌صورت $d(Tx,Sy)=\frac{1}{3}x^2$ و

$$\begin{aligned}M(x,y)&=max\Big\{|x-y|,x-\frac{1}{3}x^2,y,\frac{1}{2}\big(x+|y-\frac{1}{3}x^2|\big)\Big\}\\&=\begin{cases}x-y, & 0\leq y\leq\frac{1}{3}x^2;\\ x-\frac{1}{3}x^2, & \frac{1}{3}x^2\leq y\leq x-\frac{1}{3}x^2;\\ \frac{1}{2}\big(x+y-\frac{1}{3}x^2\big), & x-\frac{1}{3}x^2\leq y.\end{cases}\end{aligned}$$

برای $\phi(t)=\frac{t^2}{6}$ رابطه‌ی $d(Tx,Sy)\leq M(x,y)-\phi(M(x,y))$ به ازای هر $x,y\in X$ برقرار است.

g) نگاشت چندمقداری $T:X\rightarrow CB(X)$ یک انقباض ضعیف است اگر به ازای هر $x,y\in X$، ثابت $\alpha\in[0,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $H(Tx,Ty)\leq\alpha\ N(x,y)$ شود. H متر هاوسدرف روی $CB(X)$ را نشان می‌دهد که توسط d القا شده است، یعنی، به ازای هر $A,B\in CB(X)$،

$$H(A,B)=max\big\{\sup_{x\in A}d(x,B),\sup_{y\in B}d(y,A)\big\}$$

که
$$d(x,B)=inf\big\{d(x,y):\ y\in B\big\}$$

و
$$N(x,y)=max\Big\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\Big\}$$

h) نگاشت $T:X\rightarrow CB(X)$ یک انقباض است اگر به ازای هر $x,y\in X$، ثابت $k\in(0,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $H(Tx,Ty)\leq k\ d(x,y)$.

مثال: فرض کنید $X = [۱, \infty)$ با متر اقلیدوسی $d(x,y) = |x-y|$ و $T : X \to CB(X)$ به‌صورت $Tx = [۱, \sqrt{x} + ۱]$ باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in X$ با $k = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{۲} \\ &= \frac{|x-y|}{۲} = \frac{۱}{۲} d(x,y) \end{aligned}$$

بنابراین نگاشت چندمقداری T یک انقباض است.

i) نگاشت‌های چندمقداری $T, S : X \to CB(X)$ انقباض‌های ضعیف تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند اگر به ازای هر $x, y \in X$، یک ثابت $\alpha \in [۰, ۱)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $H(Tx, Sy) \leq \alpha\ M(x,y)$.

مثال: فرض کنید $X = [۱, \infty)$ با متر اقلیدوسی $d(x,y) = |x-y|$ و $T, S : X \to CB(X)$ به‌صورت $Tx = Sx = [۱, \frac{\sqrt{x}}{۲} + ۳]$ باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in X$ با $\alpha = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$H(Tx, Sy) = \frac{۱}{۲} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{|x-y|}{۲} = \frac{۱}{۲} d(x,y) \leq \alpha M(x,y)$$

بنابراین نگاشت‌های چندمقداری T, S انقباض‌های ضعیف تعمیم‌یافته هستند.

j) نگاشت $T : X \to CB(X)$، ϕ-انقباض ضعیف نامیده می‌شود اگر نگاشت $\phi : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ با شرط $\phi(۰) = ۰$ و $\phi(t) > ۰$ برای هر $t > ۰$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$H(Tx, Ty) \leq d(x,y) - \phi(d(x,y)).$$

مثال: فرض کنید $X = [۳, \infty)$ با متر اقلیدوسی $d(x,y) = |x-y|$ و $T : X \to CB(X)$ به‌صورت $Tx = [۱, \frac{x}{۳} + ۱]$ باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in X$ با $\phi(t) = \frac{t}{۶}$ داریم

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &= |\frac{x}{۳} - \frac{y}{۳}| \leq \frac{۱}{۲} |x-y| \leq \frac{۵}{۶} |x-y| \\ &= d(x,y) - \frac{۱}{۶} d(x,y) = d(x,y) - \phi(d(x,y)) \end{aligned}$$

بنابراین نگاشت T، ϕ-انقباض ضعیف است.

k) نگاشت‌های $T, S : X \longrightarrow CB(X)$، ϕ-انقباض ضعیف تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند اگر یک نگاشت $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ با شرط $\phi(0) = 0$ و $\phi(t) > 0$ برای هر $t > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$H(Tx, Sy) \leq M(x, y) - \phi(M(x, y)).$$

مثال: فرض کنید $X = [1, \infty)$ با متر اقلیدوسی $d(x, y) = |x - y|$ و $T, S : X \to CB(X)$ به‌صورت $Tx = Sx = [1, \sqrt{x} + 2]$ باشد. در این‌صورت به ازای هر $x, y \in X$ با $\phi(t) = \frac{t}{2}$ داریم

$$\begin{aligned} H(Tx, Sy) &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{2} \\ &= \frac{|x - y|}{2} = \frac{1}{2} d(x, y) \leq \frac{1}{2} M(x, y) \\ &= M(x, y) - \frac{1}{2} M(x, y) = M(x, y) - \phi(M(x, y)) \end{aligned}$$

بنابراین نگاشت‌های T, S، ϕ-انقباض ضعیف تعمیم‌یافته هستند.

تعریف ۲۱.۲.۱. اصل انقباض باناخ: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت انقباض با ثابت $k \in (0, 1)$ باشد به‌طوری‌که $d(Tx, Ty) \leq k\ d(x, y)$، در این‌صورت T یک نقطه ثابت منحصربه‌فرد $v \in X$ دارد.

مثال ۲۲.۲.۱. *در مثال (a) از تعریف قبل، T یک انقباض است و یک نقطه ثابت یکتا در $v = 0$ دارد.*

فصل ۲

معرفی فضای متریک جزئی

۱.۲ مقدمه

*مفهوم فضای متریک در سال ۱۹۰۶ توسط **فرشه**[۱] معرفی شد. بعداً، تعدادی محقق تلاش کردند که مفهوم فضاهای متریک را به فضاهای متریک‌نما، شبه‌متریک و نیمه‌متری تعمیم دهند. در این پایان‌نامه، تعمیم دیگری از فضای متریک را که **فضای متریک جزئی** [۲] نامیده می‌شود، درنظر می‌گیریم. این مفهوم توسط **ماتئوس**[۳] برای حل برخی اشکال‌ها در تئوری دامنه تعریف از علم کامپیوتر مطرح شد [۴].*

در واقع مفهوم یک فضای متریک جزئی (PMS) در سال ۱۹۹۲ توسط ماتئوس معرفی شد. PMS تعمیمی از فضای متریک معمولی است، که $d(x,x)$ لزوماً صفر نیست [۱۵، ۱۶].

از جمله نتایجی که ماتئوس به‌دست آورد، یک نگاشت انقباضی باناخ برای این فضاها بود. به ویژه، او رابطه‌ی دقیقی بین فضاهای متریک جزئی و به اصطلاح فضاهای شبه‌متریک برقرار کرد [۱۷]. اکنون به تعریف فضای

[۱]Frechet

[۲]Partial metric space (PMS)

[۳]Matthews