دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک ذرات بنیادی

عنوان

مروری بر مدل‌های حل پذیر و شبه حل پذیر

استاد راهنما

دکتر عزیز اله شفیع خانی

دانشجو

مریم السادات سیدرضوی

مهر ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک ذرات بنیادی

عنوان

مروری بر مدل‌های حل پذیر و شبه حل پذیر

استاد راهنما

دکتر عزیز اله شفیع خانی

استاد مشاور

دکتر محمد خرمی

دانشجو

مریم السادات سیدرضوی

مهر ۱۳۹۲

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق به

دانشگاه الزهراء (س) است

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوار ترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به مهربانترین نگاه زندگیم، چشمان همیشه نگران مادرم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

و

اکنون حاصل دستان خسته اتان رمز موفقیتم شد

گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

بوسه بر دستان پر مهرتان

و

تقدیم به همسفر مهربان زندگی ام

که با هم آغاز کردیم، درکنار هم آموختیم و به امید هم به آینده چشم می دوزیم

به همسرم

که مسیح وار با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه بود

قلبم لبریز از عشق اوست و موفقیتش منتهای آرزویم.

و

تقدیم به خواهرم که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است.

چگونه سپاس گویم مهربانی و لطفتان را که سرشار از عشق و یقین است. چگونه سپاس گویم تاثیر علم آموزیتان را که چراغ روشن هدایت را بر کلبه محقر وجودم فروزان ساخته است. آری در مقابل این همه عظمت و شکوهتان مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف.

تقدیم به او که آموخت مرا تا بیاموزم

آقای دکتر عزیزاله شفیع خانی

چکیده

از بدو پیدایش مکانیک کوانتومی تلاش‌های زیادی برای حل مسائل فیزیکی با استفاده از روش مکانیک ماتریسی هایزنبرگ و یا حل معادله شرودینگر شده‌است. اما تعداد کلاس‌های مسائلی که قابل حل هستند، محدود است. برهمین‌اساس یکی از روش‌های بدیل استفاده از تقارن‌های هامیلتونی است. اگر بتوانیم هامیلتونی را برحسب نمایش‌های دیفرانسیلی مولدهای گروه تقارنی مورد نظر بنویسیم، در آن صورت چون پایه‌های عناصر جبر را می‌دانیم، می‌توانیم تمام و یا بخشی از طیف انرژی را بدست آوریم، که به دستهٔ اول حل‌پذیر و به دستهٔ دوم شبه‌حل‌پذیر گویند. حال ما در این پژوهش به دنبال یافتن دسته‌ای جدید از مسائل حل‌پذیر و یا شبه‌حل‌پذیر هستیم که امکان حل آنها با روش‌های دیگر نمی‌باشد.

فهرست مطالب:

عنوان **شماره صفحه**

پیوست‌ها

فهرست شکل‌ها:

شماره شکل **شماره صفحه**

فصل ۱

پیشگفتار

پیشگفتار

فیزیک تلاشی است که انسان برای شناخت پدیده‌های این جهان انجام می‌دهد. عمر فیزیک را می‌توان به اندازه عمر انسان برروی کره خاکی دانست. فیزیک جدید دانش بررسی انرژی و برهمکنش آن با ماده است. از آنجا که انرژی در تاریخ کیهان نقش اساسی بازی می‌کند، و همه برای تبدیل می‌بایست با انرژی تعامل و برهمکنش داشته باشند، دانش فیزیک را «دانش بنیادین» نیز نامیده‌اند. امروزه فیزیک بسیارگسترده شده است. از ساختارهای بسیار بزرگ مانند کهکشانها و خوشه‌های کهکشانی گرفته تا ذرات بی‌نهایت ریز و حتی سیستم‌های اقتصادی، زیستی و مانند آنها در فیزیک بررسی می‌شوند. در یک تعریف بلندپروازانه (شاید هم خودخواهانه) از فیزیک، می‌توان گفت: فیزیک مجموعه کارهائی است که فیزیکدانان انجام می‌دهند.

فیزیک معاصر همواره بطور قراردادی نمی‌اندیشد و روشهای مختلفی را برای بررسی پدیده‌ها بکار می‌گیرد. یکی از تغییرات بزرگی که در قرن بیستم در فیزیک ایجاد شد، نقشی است که به مفهوم تقارن نسبت داده شد و روزبه‌روز بر اهمیت آن نیز افزوده می‌شود. تقارن در مطالعه جامدات تا کامل شدن یک نظریه میدان‌وحدت‌یافته بکارگرفته می‌شود. تا پیش از سال ۱۹۶۰ مفهوم تقارن به‌صورت دقیق و کاربردی وارد فیزیک نشده بود. یعنی تا پیش از آن تقارن در مفهومی‌ترین حالت خود یک تعریف ریاضی بود و در عمل و دنیای واقعی تعریف‌پیداکردن و آزمایش آن، دور از انتظار می‌نمود. اما در همین سال‌ها، با آشکار شدن تقارن‌های پی‌درپی در مکانیک کوانتمی و دنیای ذرات بدون گسترش (بدون بعد) فردی به نام ویگنر[۱] مفهوم تقارن را به‌عنوان یک کمیت فیزیکی مطرح ساخت. این فیزیکدان با شرح و بسط یک تئوری قدیمی ریاضی که ظاهراً هیچ ارتباط جدیدی با فیزیک ندارد راه‌گشای سال‌های آیندهٔ فیزیک ذرات بنیادی شد. وینگر در کتاب E. P Wigner, 1959, Group Theory از ریاضیات گروه و تقارن برای رسیدن به این هدف استفاده کرد.[۱]

---

۱ E. P. Wigner

ساختارهای متقارن فراوانی در طبیعت وجود دارد که دانه‌های برف یکی از نمونه‌های آن است. اگر یک دانه برف را ۶۰ یا ۱۲۰ یا ۱۸۰ درجه (بطور کلی مضرب درستی از۶۰ درجه) دوران دهیم، شکل حاصل، از شکل قبلی غیر قابل تشخیص خواهد بود. دراین‌صورت می‌گوییم که شکل دانهٔ برف تحت دوران‌هایی که مضرب ۶۰ درجه هستند تغییرناپذیر (ناوردا) است. روش مناسب ریاضی برای توصیف چنین تقارنی در ریاضیات، استفاده از نظریه گروه‌ها است. نظریه گروه‌ها بخوبی می‌تواند تقارن فیزیکی را توصیف کند. یک ریاضیدان مثال برف را تحت گروه (۶)**C** ناوردا می‌نامند.

هدف اصلی علم فیزیک توصیف تمام پدیده‌های طبیعی قابل مشاهده و غیر قابل مشاهده برای بشر، توسط مدل‌های ریاضی (به اصطلاح کمی کردن طبیعت) است. اگر بطور وسیع‌تر سخن بگوییم، هدف اصلی علم فیزیک بررسی و تحلیل طبیعت است و همواره این علم در پی آن است که رفتار طبیعت را در شرایط گوناگون درک و پیش بینی کند. در این راستا، مبحث تقارن سیستم‌های فیزیکی برای فیزیکدانان بسیار حائز اهمیت است. چرا که در بسیاری از موارد، فیزیکدانان بدون وارد شدن در بسیاری از محاسبات پیچیده، با استفاده از تقارن‌های سیستم‌های فیزیکی مورد مطالعه، می‌توانند اطلاعات مفید و زیادی در مورد آن سیستم‌ها بدست بیاورند. براین اساس، همواره بخشی از فعالیت‌های فیزیکدانان معطوف به کشف تقارن‌های طبیعت است. به‌عنوان مثال می‌توان از تقارن نوسانگر هماهنگ، تقارن‌های تقریبی طعم برای طبقه بندی ذرات، تقارن دورانی، تقارن‌های پیمانه‌ائی، تقارن‌های فضا و زمان نام برد. که اکثر این گروه‌های تقارنی در رده گروه‌های لی کلاسیک قرار دارند. با تعمیم گروه‌های کلاسیک، فیزیکدانان امکانات بیشتری برای توصیف پدیده‌های فیزیکی در اختیار خواهند داشت. اولین بار گروه‌های کوانتومی به عنوان تعمیمی از گروه‌های کلاسیک مستقل از ریاضیات در بررسی ساختارهای جبری مدل‌های فیزیکی ظاهر شدند. از آن پس، مطالعات وسیع‌تری برای شناخت این گروه‌ها و جبر حاکم بر مولدهای بی‌نهایت کوچک این گروه‌ها در فضایی که گروه‌ها روی آن عمل می‌کنند، شروع شد. فیزیکدانان بر این باورند که رده تعمیم یافته علاوه بر کلاس قبلی (گروه‌های کلاسیکی) ، در برگیرنده بسیاری از مسائل جدید می‌باشد، بدین منظور شاخه تحقیقاتی جدیدی را بنیان نهاده‌اند.

بعد از گذشت چندین دهه ازحضور گروه‌های لی کلاسیک و اخیراً گروه‌های تعمیم یافته کوانتومی در فیزیک، هنوز مسائلی وجود دارد که مورد بررسی قرار نگرفته‌اند و کاربردهای فیزیکی آنها هنوز مشخص نشده است. به‌عنوان مثال می‌توان از نمایش‌های دیفرانسیلی جبرهای لی کلاسیک و نمایش‌های تفاضلی جبرهای کوانتومی نام برد.

شرودینگر در سال ۱۹۲۶[۲] هنگام بررسی آن دسته حالت‌های کوانتومی مکانیکی سامانه‌ای که از مسیر کلاسیک پیروی می‌کردند ؛ یا بعبارت دیگر ؛ هنگام جستجوی حل معادله شرودینگری که در اصل تطابق صدق کند، اولین نمونهٔ دینامیک کوانتومی یعنی بسته موج گاوسی با عدم قطعیت کمینه را بدست آورد. حالتی با کمترین عدم قطعیت با تنها پارامتر مستقل انتخاب شده برای ایجاد پاشندگی نسبی، (انحراف معیار بر میانگین) برابر با مکان و تکانه، هر یک در انرژی بالا به طور یکسان کوچک می‌شوند. بنابراین، وقتی که مقدار انتظاری معادلات حرکت هایزنبرگ صفر هستند به ازای همه ویژه حالت‌های انرژی سیستم، در یک حالت همدوس مقدار چشمداشتی معادلات حرکت دقیقاً معادلات حرکت کلاسیکی هستند و فقط در انرژی بالا پراکندگی کوچکی دارند (انرژی بالا در صورتی ایجاد می‌شود که دامنه نوسانی میانگین و تکانه مقادیر کلاسیکی کوچکی داشته باشند.)[۳] در دهه ۱۹۶۰به این حالت‌ها، که توصیف‌شان از سیستم‌های فیزیکی نزدیکترین توصیف به مکانیک کلاسیک است، حالت‌های همدوس گفته شد. حالت همدوس در مکانیک کوانتوم نوع خاصی از حالت کوانتومی است که دینامیکش تقریباً به رفتار نوسانی یک نوسانگر هماهنگ کلاسیک شباهت دارد.[۴]

ساده‌ترین مسئله در مکانیک کوانتومی، نوسانگر هماهنگ یک بعدی است و تقارن حاکم بر آن، از ساده‌ترین انواع تقارن است. اگر مختصات و ممنتوم را برای چنین سیستم کوانتومی برحسب دو عملگر فنا و خلق a^+ , a تعریف کنیم، به سادگی مشاهده می‌شود که روابط حاکم بر این عملگرها به‌صورت:

$$[a , a^+] = \mathrm{I} \qquad , \qquad [\mathrm{I} , a] = [\mathrm{I}, a^+] = o$$

است، که به جبر هایزنیرگ–وایل مشهور است.

در صورتی که بتوان عملگری را برحسب عملگرهای a^+ , a و یا نمایش های دیفرانسیلی آنها (به‌ترتیب z , $\frac{d}{dz}$) نوشت، به‌چنین نمایشی نمایش دیفرانسیلی آن عملگر گویند. محاسبات با چنین عملگرهائی بسیار ساده است. حال اگر بتوان هر جبر گروه تقارنی یک سیستم فیزیکی را به صورت نمایش فوق نمایش داد، به سادگی اطلاعات زیادی از این سیستم بدست خواهم آمد.

در این مبحث نمایش‌های همدوس برای ما بسیار حائز اهمیت است، به دلیل آنکه، راهی که نمایش‌های جبر را به نمایش‌های جبر هایزنبرگ–وایل مربوط می‌کند از نمایش‌های همدوس می‌گذرد.

در نمایش همدوس بردارهای فضای هیلبرت را برحسب ویژه حالت‌های عملگر فنا بیان می‌کنند و به جای توابع مجذور انتگرال پذیر با توابع تحلیلی سروکار داریم. برای آنکه نمایش همدوس جبرهای لی در حد $\{j\}$های بزرگ ساخته شود، بایستی در جبر $Su(2)$ روابط جابجائی عملگرهای بالابر و پایین‌بر و عملگرهای کارتان در حد j های بزرگ ($2j$ ویژه مقدار کارتان است) نوشته شود، که به روابط جبر هایزنبرگ–وایل برحسب عملگرهای خلق و فنا و عملگر واحد تبدیل می‌شود، که این نمایش همدوس این جبر است. اما برای جبرهای پیچیده‌تر بایستی جبر را برحسب عملگرهای کارتان و ریشه‌ها به نوعی به جبرهای $Su(2)$ تجزیه کرد و نمایش حاصل همان نمایش همدوس جبر می باشد. این نمایش ها به $\{j\}$های متناهی نیز قابل تعمیم می‌باشد. البته در این حالت دیگر رابطه جبر با جبر هایزنبرگ–وایل به سادگی قبل نیست.[۵]

از کاربردهای نمایش‌های دیفرانسیلی جبرهای کلاسیک، حل مسائل کوانتومی است. وجود یک تقارن نهان در مکانیک کوانتومی کلید حل رده‌های گوناگونی از مسائل است.

هنوز بسیاری از مسائل کوانتومی وجود دارند که به روش‌های معمول قابل حل نمی‌باشند. روش حل مرسوم در حل معادله شرودینگر، حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو می‌باشد که حل آن بخشی از مسائل را می‌پوشاند. که اصطلاحاً به این مسائل، مسائل "حل‌پذیر" گویند و مسائلی که طیف انرژی‌هایش را نمی‌توان به‌طور تحلیلی بدست آورد یعنی نتوان طیف ویژه مقادیر را به شکل تابع صریحی از پارامترهای هامیلتونی نوشت ، اصطلاحاً "حل‌ناپذیر"

گویند.[۶]

حال اگر هامیلتونی هر سیستم کوانتومی را با یک ماتریس هرمیتی بی‌نهایت بعدی نمایش دهیم، تعیین طیف انرژی‌های هامیلتونی معادل قطری کردن ماتریس هرمیتی است. اما، تعداد کمی از مسائل مکانیک کوانتومی هستند که می‌توان آنها را با استفاده از تقارن‌هایشان قطری کرد. اگر هامیلتونی یک سیستم کوانتومی در نمایش ماتریسی دارای یک بلوک مربعی غیر صفر در سمت چپ بالا و بلوک‌های صفر در سمت راست بالا و سمت چپ پائین باشد، امکان تعیین بخشی از طیف انرژی آن سیستم وجود دارد. چرا که به سادگی می‌توان بلوک مربعی را که ماتریسی با بعد متناهی است قطری کرد و طیف انرژی آن بخش را بدست‌آورد، به‌چنین مسائلی، مسائل "شبه‌حل‌پذیر" گویند. اگر بتوان هامیلتونی سیستم مورد نظر را برحسب نمایش‌های دیفرانسیلی یک جبر لی نوشت در آن صورت می‌توان بدون حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دو، بخشی از طیف انرژی و تابع حالت‌های آن را بدست‌آورد. به بیان ساده‌تر ؛ مسائل شبه‌حل‌پذیر دارای فضای نمایشی با بعد محدود از توابع موج برای جبر تقارنی خود می‌باشند، که در این صورت هامیلتونی آنها به یک ترکیب خطی از مولدهای جبر روی فضای نمایش محدود می‌شود. در اینجا با استفاده از یک تبدیل پیمانه‌ائی و با انجام محاسبات جبری می‌توان قسمتی از طیف ویژه مقادیر مسئله را بدست‌آورد. به‌عنوان مثال برای بدست آوردن پتانسیل شبه‌حل‌پذیر یک بعدی (سیستمی با یک درجه آزادی) می‌توان از نمایش جبر $Su(۲)$ که از رتبه یک می باشد استفاده کرد. اگر هامیلتونی که بدین طریق ساخته می‌شود مستقل از j باشد، مسئله تبدیل به مسئله نوسانگر هماهنگ می‌شود. موارد یک بعدی این مسائل نسبتاً آسان است، چرا که این مولدها در فضای فوک–بارگمن به‌صورت عملگرهای دیفرانسیلی مرتبه اول نمایش داده می‌شوند. اما در ابعاد بالاتر به‌دلیل مشتقات مختلط مسئله کمی پیچیده‌تر می‌شود.[۵]

از آنجائی‌که برای نوشتن شکل دیفرانسیلی مولدهای جبر آشنایی با حالت‌های همدوس نیاز است در فصل ۲ حالت‌های همدوس و خواص آن، فضای فوک–بارگمن و حالت‌های همدوس گروه $Su(۲)$ بررسی می‌شود. در فصل ۳ با استفاده از حالت‌های همدوس‌تعمیم‌یافته، محاسبه نمایش‌های دیفرانسیلی مولدهای جبرهای $Su(۲)$ و

$Su(3)$ ارائه می‌شود. و در فصل ۴ روشی برای بدست آوردن پتانسیل‌های شبه‌حل‌پذیر بیان می‌شود و با تعمیم آن تعدادی از پتانسیل‌های شبه‌حل‌پذیر دوبعدی و یک مورد سه بعدی را در فصل ۵ بدست می‌آوریم و با ذکر نمونه‌هایی از پتانسیل‌هایی که قبلاً با روش‌های تحلیلی حل شده‌اند، سادگی و کاربرد روش موجود در پایان‌نامه را بیان می‌کنیم.

فصل ۲

حالت‌های همدوس