دانشگاه یزد
دانشکده ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض— جبر

ابرگروه‌ها، فضاهای الحاقی، ساختارهای بازه‌ای و روابط دوتایی

استاد راهنما: دکتر منصور قدیری هراتی

استاد مشاور: دکتر محمدعلی ایرانمنش

پژوهش و نگارش: علی الماسی‌کیا

مهرماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

مادر فداکار و مهربانم

او که همچون ستاره‌ای مقدس تا ابد در آسمان قلبم ثابت و درخشان خواهد ماند.

قدردانی و تشکر

پروردگار مهربان را سپاس می‌گویم که در پناه الطاف خاصه‌اش توفیق آن را یافتم تا در راه کسب علم و معرفت قدمی هرچند ناچیز بردارم.

درون بیکران خود را نثار خانواده‌ام، دایی‌های بزرگوار و خاله‌های مهربانم می‌کنم که با پایه‌گذاری خشت خشت بنای فکریم، در امر تحصیل یاریم نموده و هرچه دارم از وجود مقدسشان است.

از مقام شامخ استاد گرانمایه‌ام جناب آقای دکتر قدیری که در نهایت لطف و بزرگواری مرا در انجام هرچه بهتر این پایان نامه یاری نمودند، قدردانی می‌نمایم. از استاد ارجمند جناب آقای دکتر ایرانمنش که در سمت استاد مشاور بر بنده منت نهاده و راهنمایی‌های باارزشی ارائه نمودند، کمال تشکر را دارم. اهورای پاک یاورشان و سرفرازی رفیقشان باد.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر دواز که از وجود ارزشمندشان بهره بردم و داوری داخلی این پژوهش را قبول زحمت فرمودند، صمیمانه سپاسگزارم.

از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر میر وکیلی که داوری خارجی این پژوهش را بر عهده داشتند و راهنمایی‌های سازنده‌شان منجر به منسجم‌تر شدن پایان‌نامه گردید تشکر فراوان دارم.

از صاحب‌نظران بزرگوار جناب آقای دکتر Masorous و جناب آقای دکتر Cosmin Pelea و سرکار خانم دکتر Irina Creasti که در پیشبرد این پژوهش بسیار مرا یاری فرمودند بی‌نهایت سپاسگزارم.

از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر انوریه و جناب آقای دکتر خورشیدی که در طول دوره‌ی کارشناسی ارشد افتخاری شاگردی آن‌ها را داشته‌ام صمیمانه سپاسگزارم.

با سپاس فراوان از تمام استادان، معلمان، دوستان و بزرگوارانی که جرعه‌نوش جام محبت و خوشه‌چین خرمن معرفت ایشان بوده‌ام.

چکیده

هدف اصلیِ این پایان‌نامه بررسی ابرگروه‌های وابسته به روابط دوتایی و ارتباط این مبحث با مباحث فضاهای الحاقی و ساختارهای بازه‌ای است. در فصل اول مفاهیم و تعاریف اولیه‌ای که در سراسر پایان نامه مورد نیاز هستند را بیان می‌کنیم. ابرگروه‌های وابسته به روابط دوتایی، منظم بودن این ابرگروه و همچنین ابرگروه‌های وابسته به روابط دوتایی خاص از قبیل اجتماع، اشتراک و ... در فصل دوم مورد بررسی قرار می‌گیرند. در فصل سوم به معرفی ابرگراف‌ها و ابرگروه‌های وابسته به ابرگراف‌ها، گراف‌های همبند و درخت‌ها خواهیم پرداخت. سرانجام در فصل چهارم گفتاری در باب فضاهای الحاقی و به‌دست آوردن فضاهای الحاقی از ابرفضاهای برداری خواهیم داشت. همچنین در این فصل با مفهوم ساختار بازه‌ای آشنا خواهیم شد و تناظری که این مفهوم با مفاهیم مطرح شده در فصل‌های قبل دارد را تشریح می‌کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

در سال ۱۹۳۴ مارتی [۲۵] در هشتمین کنفرانس ریاضیدانان اسکاندیناوی با ارائه‌ی مقاله‌ای، تعمیمی از مفهوم گروه‌ها را معرفی نموده و نظریه ابرساختارها را بنا کرد. اگرچه مارتی در سن جوانی در طول جنگ جهانی دوم درگذشت و نتوانست بیش از دو یا سه مقاله در این زمینه ارائه دهد، اما بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف ریاضی در این زمینه کار کردند.

بعدها کونتزمن [۲۱] در فرانسه و گریفیتس [۱۷]، وال [۴۱]، درشر و اوره [۱۵] در ایالات متحده و اوتومی [۲۹] در ژاپن، در این زمینه تحقیقاتی به عمل آورده و این نظریه را تعمیم داده و قضایای مختلفی را در این زمینه بیان کردند.

در دهه‌ی پنجاه دربوهلاف [۱۶] در چکسلواکی روی کلاس‌هایی از ابرگروه‌ها و بوسیونی [۲] در ایتالیا روی شرایط شرکت‌پذیری از ابرگروه‌ها کار کردند. در فرانسه سید[۳۵] روی ابرگروه‌وارها مطالعاتی انجام داد. در یونان میتاس [۲۶] نظریه‌ی ابرگروه‌های کانونی را بنا نهاد و در ایالات متحده روث [۳۳] این نظریه را مورد بررسی قرار داد. کوسکاس [۱۹] در فرانسه روی شرکت‌پذیری نیم ابرگروه‌وارها بحث کرد. مک مولن [۲۷] در استرالیا نظریه جبری از ابرگروه‌ها را گسترش داده و در آنالیز هارمونیک مورد استفاده قرار داد.

مفهوم فضاهای الحاقی نخستین بار توسط پرنویتز [۳۱] مطرح شد و پس از وی جانتوسیاک [۱۸] این مفهوم را در شاخه‌های مختلف هندسه مورد مطالعه قرار داد. روزنبرگ [۳۲] در سال ۱۹۹۸ برای اولین بار رابطه‌ی بین ابرساختارها و روابط دوتایی را در نظر گرفت. پس از او کورسینی [۸] در سال ۲۰۰۰ ابرساختارهای وابسته به روابط دوتایی را مورد مطالعه قرار داد. پس از وی دسالوو و لوفارو [۱۴] و اسپارتالیس [۳۴] نتایج جدیدی را در این زمینه به‌دست آوردند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ ابرگروه‌ها و روابط دوتایی

تعاریف و مفاهیم بیان شده در این قسمت مربوط به مراجع [۵] و [٦] می‌باشند.

مفهوم ابرگروه‌ها اولین بار توسط مارتی در هشتمین کنفرانس ریاضیدانان اسکاندیناوی مطرح شد. نخستین ارتباط بین ابرساختارها و روابط دوتایی در سال ۱۹۹۸ و توسط نیمینن[۱] [۲۸] مطرح شد که یک ابرگروه را به یک گراف همبند ساده وابسته کرد. در همین راستا، چندین مقاله توسط کورسینی و روزنبرگ که ابرعمل های متفاوتی را به گراف‌ها وابسته می‌کردند به رشته تحریر درآمد. بعد از آن چوالینا[۲] [۳] تناظری را بین ابرگروه‌ها و مجموعه‌های جزئاً مرتب یافت. روزنبرگ [۳۲] تعریف چوالینا را تعمیم بخشید و به هر ابرگروه‌وار یک رابطه‌ی دوتایی وابسته کرد. در سال ۲۰۰۰ ابرگروه روزنبرگ توسط کورسینی [۸] و در سال ۲۰۰۲ توسط کورسینی و لئورئانو[۳] [۱۰] مورد پژوهش و بررسی قرار گرفت، که ابرگروه های وابسته به اجتماع، اشتراک، حاصلضرب، حاصلضرب دکارتی و حد مستقیم روابط را در پژوهش‌هایشان در نظر گرفتند.

البته هنوز مسائل حل نشده در این موضوع وجود دارد. یکی از این مسائل این است که چگونه می‌توان شرایط لازم و کافی برای ابرگروه‌وارهای وابسته به اجتماع، اشتراک، حاصلضرب و ... یافت به گونه‌ای که ابرگروه شوند. اخیراً اسپارتالیس[۴]، دسالوو[۵] و لوفارو[٦] نتایج جدیدی را در ابرساختارهای وابسته به روابط دوتایی به دست آورده‌اند.

فرض کنیم H یک مجموعه‌ی ناتهی است و مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی از H را با $\mathcal{P}^*(H)$ نشان می‌دهیم.

۱.۱.۱ تعریف. یک ابرعمل روی H، نگاشت $f : H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ می‌باشد.

Nieminen[۱]

Chvalina[۲]

Leoreanu[۳]

Spartalis[۴]

De Salvo[۵]

Lo Faro[٦]

۲.۱.۱ تعریف. مجموعه‌ی H، همراه با یک خانواده Γ از ابرعمل‌ها یک ابرساختار نامیده می‌شود.

معمولاً ابرعمل را با نماد $\circ$ نشان می‌دهیم و تصویر زوج (a,b) از $H^{۲}$ را با نماد $a \circ b$ نشان می‌دهیم و به آن ابرحاصل‌ضرب a و b می‌گوییم. اگر A و B زیر مجموعه‌های ناتهی از H باشند آنگاه

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b$$

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنید H یک مجموعه‌ی ناتهی و $\circ : H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ یک ابرعمل است. دوتایی $(H,\circ)$، ابرگروه‌وار نامیده می‌شود.

۴.۱.۱ تعریف.

(۱) یک نیم‌ابرگروه یک ابرگروه‌وار $(H,\circ)$ است به‌طوری‌که

$$\forall (a,b,c) \in H^{۳}, \qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

(۲) ابرگروه‌وار $(H,\circ)$ را که در شرط زیر صدق می‌کند، شبه ابرگروه می‌نامیم:

$$\forall a \in H\,, \quad H \circ a = a \circ H = H \qquad (*)$$

(شرط $(*)$ را **اصل تکثیر** می‌نامیم)

(۳) نیم ابرگروهی را که شبه ابرگروه نیز باشد، ابرگروه می‌نامیم.

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم H یک ابرگروه و K یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از H است. K زیرابرگروه H نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in K$، $a \circ K = K \circ a = K$.

۶.۱.۱ مثال. مجموعه‌ی $H = \{u,v,w,z\}$ را با ابرعمل زیر در نظر می‌گیریم:

$\circ$	u	v	z	w
u	u	u	$\{u,v,z\}$	H
v	v	v	$\{u,z\}$	H
z	z	z	$\{u,v,z\}$	H
w	w	w	w	H

در این‌صورت $(H,\circ)$ یک ابرگروه و $K = \{u,v,z\}$ یک زیرابرگروه است.

۷.۱.۱ تعریف. زیرابرگروه K از H را بسته از چپ (راست) می نامیم هرگاه برای هر $x, y \in K$ و هر $a \in H$، از $x \in a \circ y$ ($x \in y \circ a$) نتیجه شود که $a \in K$. K را بسته گوییم هرگاه هم از چپ و هم از راست بسته باشد.

۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(H, \circ)$ یک ابرگروه‌وار است. عنصر $e \in H$ همانی راست (همانی چپ) نامیده می‌شود هرگاه:

$$\forall x \in H, \quad x \in x \circ e \quad (x \in e \circ x).$$

$e \in H$ عنصر همانی نامیده می‌شود هرگاه همانی راست و چپ باشد، یعنی به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $x \in x \circ e \cap e \circ x$.

۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(H, \circ)$ یک ابرگروه است که حداقل یک عنصر همانی دارد. عنصر $a' \in H$ معکوس $a \in H$ نامیده می‌شود هرگاه عنصر همانی $e \in H$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$e \in a \circ a' \cap a' \circ a.$$

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(H, \circ)$ و $(K, *)$ ابرگروه‌وار هستند و $f : H \to K$ یک تابع است. در این صورت f یک همریختی است هرگاه برای هر $x, y \in H$، $f(x \circ y) \subseteq f(x) * f(y)$ و f یک همریختی خوب است هرگاه برای هر $(x, y) \in H$، $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$.

مثال‌هایی از ابرگروه‌ها [۱۳].

(۱) اگر H یک مجموعه‌ی ناتهی باشد وبرای هر $x, y \in H$ تعریف کنیم $x \circ y = H$، آن‌گاه $(H, \circ)$ یک ابرگروه است که ابرگروه کلی نامیده می شود.

(۲) فرض کنیم $(S, .)$ یک نیم‌گروه و P یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از S است. برای هر $x, y \in S$ تعریف می‌کنیم $x \circ y = xPy$. در این صورت $(S, \circ)$ یک نیم‌ابرگروه است. اگر $(S, .)$ یک گروه باشد، آنگاه $(S, \circ)$ یک ابرگروه است که P- ابرگروه نامیده می‌شود.

(۳) اگر G یک گروه باشد و برای هر $x, y \in G$، $\langle x, y \rangle$ نشان دهنده‌ی زیرگروه تولید

شده توسط x و y باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $x \circ y = \langle x, y \rangle$. به دست می‌آوریم که $(G, \circ)$ یک ابرگروه است.

(۴) اگر $(G, .)$ یک گروه و H زیرگروه نرمال G باشد و برای هر $x, y \in G$، تعریف کنیم $x \circ y = xyH$، آنگاه $(G, \circ)$ یک ابرگروه است.

(۵) فرض کنیم $(G, .)$ یک گروه و H یک زیرگروه غیرنرمال آن است. اگر $G/H = \{xH | x \in G\}$، آنگاه $(G/H, \circ)$ یک ابرگروه است که برای $xH, yH \in G/H$ داریم:

$$xH \circ yH = \{zH | z \in xHy\}.$$

۱۱.۱.۱ تعریف. یک ابرگروه‌وار جزئی، مجموعه‌ای ناتهی مانند H همراه با تابعی از $H \times H$ به مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های H می‌باشد.

۱۲.۱.۱ تعریف. برای هر رابطه‌ی دوتایی ρ روی H دو مجموعه‌ی دامنه و برد ρ را به ترتیب با $dom(\rho)$ و $ran(\rho)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} dom(\rho) &= \{x \in H | \exists y \in H \ : \ (x, y) \in \rho\} \\ ran(\rho) &= \{y \in H | \exists z \in H \ : \ (z, y) \in \rho\} \end{aligned}$$

اگر $dom(\rho) = H$ آنگاه ρ را با دامنه کامل می‌نامیم. به طور مشابه ρ را با برد کامل می نامیم، هرگاه $ran(\rho) = H$.

۱۳.۱.۱ تعریف. [۳۲]. رابطه‌ی دوتایی ρ را شبه‌ترتیب گوییم هرگاه بازتابی و انتقالی باشد.

۱۴.۱.۱ تعریف. برای رابطه‌ی دوتایی ρ روی H و برای هر $k \geq ۲$ مجموعه‌ی ρ^k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho^k = \{(a_۱, a_{k+۱}) | \exists (a_۲, \ldots, a_k) \in H^{k-۱} : (a_۱, a_۲) \in \rho, \ldots, (a_k, a_{k+۱}) \in \rho\}.$$

بنابراین در حالت خاص که $k = ۲$، مجموعه‌ی $\rho^۲$ به صورت زیر است:

$$\rho^۲ = \{(x, y) | \exists u \in H \, ; \, (x, u) \in \rho, (u, y) \in \rho\}.$$

۱۵.۱.۱ تعریف. برای رابطه‌ی دوتایی ρ عنصر x را خارجی می‌نامیم هرگاه عضوی چون $h \in H$ یافت شود که $(h,x) \notin \rho^{2}$. در غیر این‌صورت x را یک عنصر داخلی می‌نامیم.

۱۶.۱.۱ مثال. فرض کنیم $H = \{x,y,z\}$. در این صورت رابطه‌ی ρ را روی H با مجموعه‌ی $\rho = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,x),(z,x)\}$ تعریف می‌کنیم. به وضوح $dom(\rho) = ran(\rho) = H$. از طرفی $\rho^{2} = H^{2}$ و بنابراین برای ρ تمام عناصر داخلی بوده و عنصر خارجی ندارد.

پیش از بیان مفهوم رابطه‌ی منظم به معرفی دو نماد می‌پردازیم:

- اگر $\{A,B\} \subset \mathcal{P}^{*}(H)$، آنگاه برای نشان دادن اینکه برای هر $a \in A$، $b \in B$ وجود دارد که $a\rho b$ و نیز برای هر $b \in B$، $a \in A$ وجود دارد که که $a\rho b$، از نماد $A\bar{\rho}B$ استفاده می‌کنیم.

- اگر $\{A,B\} \subset \mathcal{P}^{*}(H)$، آنگاه برای نشان دادن اینکه برای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ داریم $a\rho b$، از نماد $A\bar{\bar{\rho}}B$ استفاده می‌کنیم.

۱۷.۱.۱ تعریف. رابطه‌ی هم‌ارزی ρ روی H منظم از چپ (راست) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $(x,y) \in H \times H$ استلزام زیر برقرار باشد:

$$x\rho y \Rightarrow \forall a \in H, \quad (a \circ x)\bar{\rho}(a \circ y).\, (x\rho y \Rightarrow \forall a \in H, \quad (x \circ a)\bar{\rho}(y \circ a))$$

ρ منظم نامیده می‌شود هرگاه هم از راست و هم از چپ منظم باشد.

۲.۱ گراف و ابرگراف

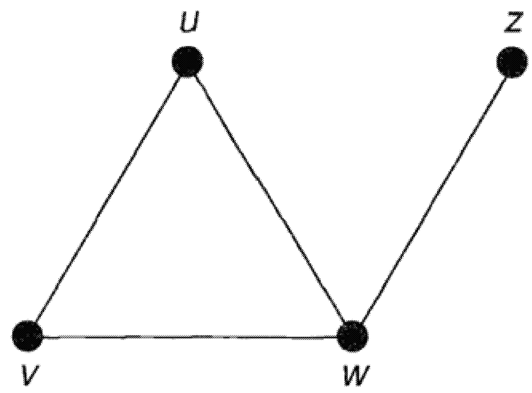
تعاریف و مفاهیم مطرح شده در این بخش مربوط به مراجع [۱] و [۳۸] می‌باشند.

۱.۲.۱ تعریف. یک گراف عبارت است از یک زوج $G = (V, E)$ که در آن V مجموعه‌ای ناتهی است که آن را مجموعه‌ی راس‌ها و E را مجموعه‌ی یال‌ها می‌نامیم و داریم $E \subseteq V \times V$. همچنین $|V| = n$ را تعداد راس‌ها و $|E| = m$ را تعداد یال‌های گراف می‌نامیم.

اگر x و y دو راس از گراف G باشند، آن‌گاه (x, y) نشان‌دهنده‌ی یال از x به y است و در حالت کلی $(x, y) \neq (y, x)$، زیرا جهت مهم است. یال رسم شده از یک راس به خودش، یعنی $(x, x) \in E$، را طوقه می‌نامیم. گرافی که در آن جهت یال مهم نباشد را گراف بدون جهت می‌نامیم.

۲.۲.۱ تعریف. گراف G را در نظر بگیرید. یک گشت در G دنباله‌ای متناهی از یال‌ها به صورت $x_۰x_۱, x_۱x_۲, \ldots, x_{n-۱}x_n$ است. تعداد یال‌ها در یک گشت طول آن است. یک گشت که تمام یال‌های آن مجزا باشد را گذر می‌نامیم. گذری که تمام رئوس $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ مجزا باشند (به جز $x_۰ = x_n$)، را یک مسیر می‌نامیم. مسیر بسته‌ای را که دارای حداقل یک یال باشد یک دور یا مدار می‌نامیم. توجه کنید که هر طوقه و یا هر جفت یال موازی یک دور می‌سازند.

۳.۲.۱ مثال. شکل زیر گراف ساده‌ی G را نشان می‌دهد که مجموعه‌ی راس‌هایش $V(G) = \{u, v, w, z\}$ و مجموعه‌ی یال‌هایش $E(G) = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}, \{w, z\}\}$ می‌باشد.



۴.۲.۱ تعریف. گرافی را که بین هر دو راسش مسیری وجود دارد، گراف همبند می‌نامیم. گراف همبندی که دور نداشته باشد درخت نامیده می‌شود.

۵.۲.۱ تعریف. گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با هم برابر باشند، گراف منتظم نام دارد. اگر درجه‌ی هر راس r باشد، گراف را r- منتظم می‌نامیم. همچنین یک گراف ساده را که هر دو راس متمایز آن مجاور باشند، یک گراف کامل می‌نامیم.

۶.۲.۱ تعریف. طول کوتاهترین مسیر از x به y را در صورت وجود فاصله‌ی آن دو راس نامیده و با $d(x,y)$ نشان می‌دهیم. در صورتی که مسیری بین x و y وجود نداشته باشد فاصله را ∞ تعریف می‌کنیم.

توجه کنید که $d(x,x)=0$ و $d(x,y)=d(y,x)$ و $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

۷.۲.۱ تعریف. در هر گراف همبند G قطر را به‌صورت

$$\delta(G)=max\left\{d(x,y)|x\neq y\,,\,x,y\in V\right\},$$

تعریف می‌کنیم.

حال به معرفی ابرگراف‌ها می‌پردازیم.

۸.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ یک مجموعه‌ی متناهی است. یک ابرگراف روی X، خانواده‌ی $H=(E_1,E_2,\ldots,E_m)$ از زیرمجموعه‌های X است به‌طوری

که

$E_i \neq \emptyset \quad (i = ۱, ۲, \ldots, m)$ (۱)

$\bigcup_{i=۱}^{m} E_i = X$. (۲)

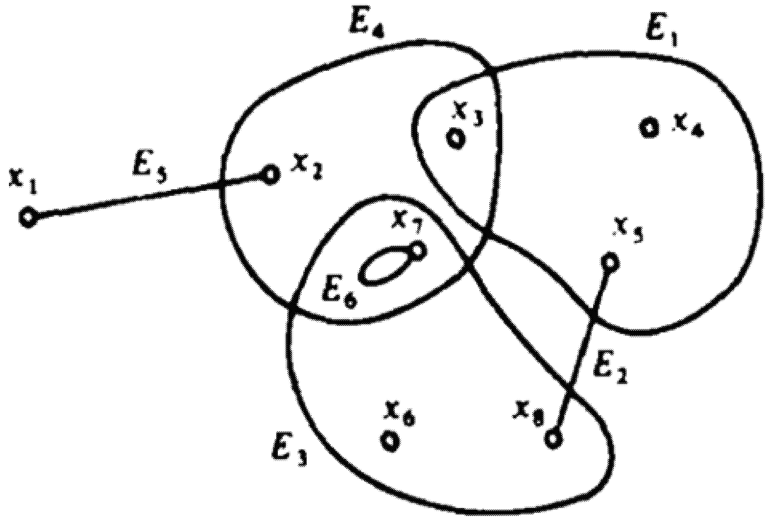
اگر علاوه بر دو شرط بالا شرط زیر را نیز اضافه کنیم، آن‌گاه ابرگراف $H = (E_۱, E_۲, \ldots, E_m)$ را یک ابرگراف ساده یا خانواده‌ی اسپرنر می‌نامیم.

$E_i \subset E_j \Rightarrow i = j$. (۳)

عناصر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ از X را رئوس و مجموعه‌های $E_۱, E_۲, \ldots, E_m$ را یال‌های ابرگراف می‌نامیم. گراف ساده ابرگراف ساده‌ای است که هریک از یال‌هایش دارای عدد اصلی ۲ هستند؛ گراف چندگانه (گراف همراه با طوقه و یال‌های چندگانه) ابرگرافی است که هر یالش عدد اصلی کوچکتر یا مساوی ۲ داشته باشد. می‌توانیم یک ابرگراف را توسط ماتریس وقوعش تعریف کنیم. ماتریس وقوع را به صورت $A = ((a_{ij}))$ نشان می‌دهیم که ستون‌های این ماتریس نشان‌دهنده‌ی یال‌های $E_۱, E_۲, \ldots, E_m$ و سطرهای ماتریس وقوع همان راس‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ می‌باشند. همچنین داریم:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۰ & x_i \notin E_j \\ ۱ & x_i \in E_j \end{cases}$$

برای مثال در شکل زیر ابرگرافی مانند H را مشاهده می‌کنیم:



ماتریس وقوع این ابرگراف به فرم زیر است:

$$
A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

۳.۱ فضاهای الحاقی و ابرفضاهای برداری

تعاریف و مثال‌های مطرح شده در این بخش مربوط به مراجع [٦]، [۳٦] و [۳۷] می‌باشند.

مفهوم فضاهای الحاقی نخستین بار توسط پرنویتز[۷] معرفی شد و پس از آن توسط خود وی به همراه جانتوسیاک [۸] در شاخه‌های مختلف هندسه مورد استفاده قرار گرفت.

زمینه‌های متعددی در ارتباط نزدیک با مفهوم فضاهای الحاقی وجود دارند. برای مثال گراف‌های همبند را می‌توان در این حوزه مورد بحث قرار داد و یا ابرگروه‌های کانونی نوع خاصی از فضاهای الحاقی هستند.

نمادگذاری. مجموعه‌ی $\{x|a \in x \circ b\}$ را برای سهولت با a/b نشان می‌دهیم.

۱.۳.۱ تعریف. ابرگروه H یک فضای الحاقی نامیده می‌شود هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

الف) H جابجایی باشد.

ب) برای هر $(a, b, c, d) \in H^۴$ استلزام زیر برقرار باشد

$$a/b \cap c/d \neq \emptyset \Longrightarrow a \circ d \cap b \circ c \neq \emptyset.$$

تعریفی معادل تعریف فوق برای فضای الحاقی وجود دارد که به صورت زیر بیان می‌شود:

۲.۳.۱ تعریف. [۳۲]. ابرگروه جابجایی $H = \langle H; \circ \rangle$ فضای الحاقی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b, c, d \in H$ اگر $x \in H$ وجود داشته باشد که $a \in b \circ x$ و $c \in d \circ x$ آنگاه $a \circ d \cap b \circ c \neq \emptyset$.

۳.۳.۱ مثال. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان مرتب F است. اگر برای هر $a, b \in V$ ابرعمل را به صورت زیر تعریف کنیم

$$a \circ b = \{\lambda a + \mu b | \lambda > ۰, \mu > ۰, \lambda + \mu = ۱\},$$

آنگاه $(V, \circ)$ یک فضای الحاقی است (که فضای الحاقی آفین روی F نامیده می‌شود).

---

[۷] W. Prenowitz

[۸] J. Jantosciak

۴.۳.۱ تعریف. فضای الحاقی $(H, \circ)$ هندسی نامیده می‌شود هرگاه $x \in H$ وجود داشته باشد به طوری که $x \circ x = \{x\} = x/x$.

۵.۳.۱ مثال. یک بازه‌ی حقیقی باز را با $)a, b($ نمادگذاری می‌کنیم. حال ابرعمل زیر را روی صفحه دکارتی $\mathbb{R}^۲$ تعریف می‌کنیم:

برای عناصر متمایز $(x_۱, x_۲)$ و $(y_۱, y_۲)$ از $\mathbb{R}^۲$ داشته باشیم،

$$(x_۱, x_۲) \circ (y_۱, y_۲) = \{(z_۱, z_۲) | z_۱ \in)x_۱, x_۲(, \ z_۲ \in)x_۲, y_۲(\},$$

و برای تمام عناصر $(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲$ داشته باشیم

$$(x_۱, x_۲) \circ (x_۱, x_۲) = (x_۱, x_۲).$$

در این‌صورت $(\mathbb{R}^۲, \circ)$ یک فضای الحاقی هندسی است.

۶.۳.۱ مثال. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف ساده همبند است. ابرعمل $< \circ >$ روی V را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای عناصر متمایز x و y از V، داشته باشیم $x \circ x = x$ و $x \circ y$ مجموعه‌ی همه نقاط $z \in V$ باشد که متعلق به مسیری مانند $\gamma x - y$ باشند. دراین‌صورت $(V, \circ)$ یک فضای الحاقی غیرهندسی است که هر عنصرش یک عنصر همانی است.

۷.۳.۱ تعریف. [۳۷]. جایگشت تعمیم یافته روی مجموعه‌ی ناتهی X یک نگاشت $f : X \to \mathcal{P}^*(X)$ است به طوری

$$\bigcup_{x \in X} f(x) = f(X) = X.$$

مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌های تعمیم یافته روی X را با M_X نشان می‌دهیم. برای $f \in M_X$، معکوس f را با $\bar{f}$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{f} = \{y \in X | x \in f(y)\}.$$

گوییم جایگشت تعمیم یافته در شرط θ صدق می‌کند هرگاه از $x \in X$ و $y \in f(x)$ بتوان نتیجه گرفت که $f(y) = f(x)$. تمام جایگشت‌های تعمیم یافته که در شرط θ صدق