بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

درون ریختی های شبه فشرده بر جبرهای باناخ جابه جایی

تدوین

علی حسن زاده

استاد راهنما

دکتر طاهر قاسمی هنری

مرداد ۱۳۹۱

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای علی حسن‌زاده دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

درون‌ریختی‌های شبه فشرده بر جبرهای باناخ جابه‌جایی

در روز چهارشنبه مورخ ۹۱/۵/۲۵ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون هیجده و نیم (۱۸/۵) است.

۱ـ عالی ☑
۲ـ بسیار خوب ☐
۳ـ خوب ☐
۴ـ قابل قبول ☐
۵ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر طاهر قاسمی هنری	دکتر فرید بهروزی	دکتر حکیمه ماهیار

اسمعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران : خیابان شهید مفتح
نرسیده به انقلاب ، پ ۴۳
کدپستی : ۱۴۹۱۱ - ۱۵۷۱۹
تلفن : ۳-۰۲۱-۸۸۳۲۹۲۲۰
کرج : انتهای خیابان شهید
بهشتی میدان دانشگاه
کدپستی : ۳۷۵۵۱ - ۳۱۹۷۹
تلفن : ۰۲۶۱-۴۵۷۹۶۰۰
Iran-Tehran
NO 43, mofateh Ave.
Tarbiat Moallem
University
www.tmu.ac.ir

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون که با توفیق الهی این دوره تحصیلی را با موفقیت به پایان رسانده ام بر خود لازم می دانم از تمام بزرگوارانی که مرا در طی این دوره یاری نموده اند تشکر و قدردانی نمایم.

در ابتدا از پدر و مادر عزیزم که در طول تمام دوران تحصیل همواره حامی و مشوقم بوده اند کمال قدردانی و سپاس را دارم.

از جناب آقای دکتر طاهر قاسمی هنری استاد راهنمای گرامی ام که مفتخر به کسب علم و ادب در محضر ایشان در طول نگارش این دفتر بودم و راهنمایی های ایشان در طول تدوین این پایان نامه همیشه راهگشا بوده، کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از سرکار خانم دکتر ماهیار و جناب آقای دکتر بهروزی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند تشکر و سپاس گزاری می نمایم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر علیرضا مدقالچی و جناب آقای دکتر امیر خسروی که در طول دوره کارشناسی ارشد افتخار شاگردی ایشان را داشته ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

علی حسن زاده

مرداد ۱۳۹۱

چکیده

فرض کنیم B یک جبر باناخ نیم ساده جابه جایی و یکدار باشد. درون ریختی هایی از B را مورد بررسی قرار می دهیم که عملگرهای شبه فشرده هستند. نشان می دهیم اگر فضای سرشت های B همبند باشد و T یک درون ریختی یکانی بر B باشد، آنگاه عملگر T شبه فشرده است اگر و تنها اگر دنباله ی عملگرهای T^n با نرم عملگری به یک درون ریختی یکانی از رتبه یک همگرا باشد.

برای توسیع نتایج فوق برای جبرهای باناخ کلی تر، ابتدا درون ریختی های روی جبرهای باناخ نیمه اول جابه جایی و یکدار با فضای سرشت های همبند را که لزوماً نیم ساده نیستند، مورد بررسی قرار می دهیم. سپس درون ریختی های کراندار بر جبرهای باناخ نیمه اول جابه جایی را در حالت کلی بحث می کنیم و سعی می کنیم نتایج قبلی را بدون فرض همبند بودن فضای سرشت ها، ارتقا ببخشیم.

در نهایت درون ریختی ها بر جبر گروهی $L^{1}(\mathbb{R})$ را مورد بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم که هیچ درون‌ریختی شبه فشرده غیر صفر بر آن وجود ندارد. همچنین نشان می دهیم که درون ریختی های شبه فشرده بر جبر اکسترمال زیر، که یک جبر باناخ نیم ساده منظم و جابه جایی است، همواره فشرده هستند:

$$Ea[-1,1]=\Big\{f_\mu : \mu\in M(\mathbb{C})\& \int_{\mathbb{C}} e^{|Re\lambda|}d|\mu|(\lambda)<\infty\Big\},$$

که در آن f_μ یک تابع پیوسته مختلط بر $[-1,1]$ است که با ضابطه $f_\mu(x)=\int_{\mathbb{C}} e^{x\lambda}d\mu(\lambda)$ تعریف می شود.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 46J05، 46J45، 46J10، 47B48.

واژه های کلیدی: درون ریختی، عملگر فردهولم، شبه فشرده، نیم ساده، نیمه اول، جبر باناخ جابه جایی.

مقدمه

درون ریختی ها روی جبرهای یکدار، عملگرهای خطی هستند که ضرب را نیز حفظ می کنند. در این پایان نامه درون ریختی ها را یکانی فرض می کنیم، یعنی درون ریختی هایی را در نظر می گیریم که عنصر یکه را به یکه می برند. عملگرهای شبه فشرده روی یک فضای باناخ، در حقیقت حالت کلی تری از عملگرهای فشرده هستند. در سال ۱۹۸۰ هربرت کاموویتس[۱] در مقاله [21]، که درون ریختی های فشرده روی جبرهای باناخ را بحث می کرد، نشان داد که اگر T یک درون ریختی **فشرده** بر جبر باناخ نیم ساده جابه جایی یکدار B باشد که به وسیله خود نگاشت $\phi : X \to X$ القا می شود که در آن X، فضای سرشت های B، همبند است، آنگاه $x_\circ \in X$ وجود دارد به طوری که $\bigcap_{n=\circ}^{\infty} \phi_n(X) = \{x_\circ\}$.

در سال ۲۰۰۵، فینشتین[۲] و کاموویتس نشان دادند که این نتیجه برای درون ریختی های **شبه فشرده** روی جبرهای باناخ نیم ساده جابه جایی یکدار هم معتبر است. در سال ۲۰۱۰ این نتیجه توسط فینشتین و کاموویتس به جبرهای باناخ **نیمه اول** جابه جایی یکدار هم گسترش یافت و نتیجه حتی برای جبرهای باناخ نیمه اول جابه جایی که فضای سرشت های آن لزوماً همبند نیست، نیز مورد بررسی قرار گرفت.

در این پایان نامه که براساس مقاله [12] و بخشی از مقاله ی [11] تنظیم شده است، در مورد درون ریختی های شبه فشرده روی جبرهای باناخ جابه جایی یکدار در شرایطی خاص بحث می کنیم. در فصل یک مفاهیم اولیه آنالیز و جبرهای باناخ را یاد آوری می کنیم. در فصل بعدی عملگرهای فردهولم را معرفی می کنیم. در همین فصل، قضیه زیر را برای جبرهای باناخ نیم ساده جابه جایی یکدار اثبات می کنیم:

قضیه : فرض کنیم B یک جبر باناخ نیم ساده جابه جایی یکدار باشد که X فضای سرشت های آن همبند است. اگر T یک درون ریختی شبه فشرده بر B باشد که به وسیله خود نگاشت ϕ بر X القا می شود آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

(الف) عملگرهای T^n با نرم عملگر به یک درون ریختی یکانی S از رتبه یک بر B همگرا هستند. به

---
۱ Herbert Kamowitz
۲ Joel F. Feinstein

علاوه $x_\circ \in X$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $f \in B$، $Sf = \hat{f}(x_\circ)1$. این نقطه $x_\circ$ یک نقطه ثابت یکتا از ϕ است.

(ب) به ازای هر $\varepsilon > \circ$، یک عدد صحیح مثبت N وجود دارد به طوری که $\phi_N(X) \subset B(x_\circ, \varepsilon)$.

(ج) $\bigcap_{n=\circ}^{\infty} \phi_n(X) = \{x_\circ\}$.

در فصل ۳ برای توسیع نتایج فصل قبلی برای جبرهای باناخ کلی تر، با کاربردی از قضیه ودربورن[3] نشان می دهیم که هر جبر باناخ نیمه اول جابه جایی متناهی بعد با C^*-جبر $\mathbb{C}^n$ یکریخت است. با ملاحظه این حقیقت و نتیجه ای از قضیه خود توان شیلوف [4]، قضیه فوق را برای درون ریختی های یکانی کراندار روی جبرهای باناخ نیمه اول جابه جایی، که فضای سرشت های آن همبند است توسیع می دهیم. در ادامه حالتی را بحث می کنیم که جبر باناخ جابه جایی، بدون عضو یکه است، در حالی که از یکدار شده جبر باناخ A استفاده خواهیم کرد. در بخش بعدی این فصل سعی می کنیم نتایج فوق را بیشتر توسیع دهیم و برای همین منظور، قضایای فوق را برای جبرهای باناخ نیمه اول جابه جایی، که فضای سرشت های آن ها لزوماً همبند نیستند، بحث می کنیم و قضیه زیر را که یکی از اهداف اصلی این پایان نامه است، اثبات می کنیم:

قضیه : فرض کنیم B یک جبر باناخ نیمه اول جابه جایی یکدار باشد و T یک درون ریختی یکانی کراندار بر روی B باشد. در این صورت T شبه فشرده است اگر و تنها اگر عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که عملگرهای $(T^{kn})_{k=1}^{\infty}$ با نرم عملگر به یک درون ریختی یکانی از رتبه متناهی همگرا باشد.

در فصل ۴ جبر های باناخ سری های توانی را مورد بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم که فضاهای تحلیلی $A(\bar{\mathbb{D}})$ و $H^p(\mathbb{D})$ ($p \in [\circ, \infty)$) را می توان به عنوان جبر های باناخ رادیکال از سری های توانی تلقی کرد که برای آن ها هر درون ریختی شبه فشرده، فشرده است.

در فصل ۵ درون ریختی های روی $L^1(\mathbb{R})$ را مورد بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم که هیچ درون ریختی شبه فشرده غیرصفر بر روی آن وجود ندارد. در بخش بعدی همین فصل جبر اکسترمال $Ea(K)$ را معرفی کرده و نشان می دهیم $Ea(K)$ یک جبر باناخ نیم ساده منظم است که هر درون ریختی شبه فشرده بر آن، فشرده است.

[3] Wedderburn
[4] Šilov

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه از آنالیز تابعی و جبرهای باناخ

۱.۱ مفاهیمی از جبرها

در این بخش برخی مفاهیم اساسی جبر را از فصل اول کتاب دیلز [۱] [6] یاد آوری می کنیم. بخصوص جبرهای نیم ساده و نیمه اول را بحث می کنیم که مکرراً در سایر فصول استفاده خواهیم کرد. همچنین جبر ماتریس ها را که در فصل ۳ نیاز خواهد شد معرفی می کنیم.

در سراسر این پایان نامه منظور از میدان $\mathbb{K}$ ، میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است.

تعریف ۱.۱.۱. *یک جبر روی میدان $\mathbb{K}$ یک فضای برداری $(A,+)$ روی میدان $\mathbb{K}$ است که دارای یک عمل دیگری هم هست که با $\cdot$ نشان می دهیم، به طوری که $(A,\cdot)$ یک نیم گروه است و شرایط زیر نیز برقرار هستند:*

(الف) *برای هر* $a,b \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{K}$، $\alpha(a\cdot b)=(\alpha a)\cdot b=a\cdot(\alpha b)$

(ب) *برای هر* $a,b,c \in A$، $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ و $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

معمولاً به جای $a\cdot b$ از نماد ab استفاده می شود که ما نیز همین نماد را به کار می بریم.

جبر A جابه جایی است اگر $(A,\cdot)$ جابه جایی باشد. عنصر e_A از جبر A را عضو یکه A گوییم اگر $e_A \neq 0$ و e_A عنصر یکه نیم گروه $(A,\cdot)$ باشد. جبر A را یکدار گوییم هرگاه جبر A دارای عنصر یکه باشد.

مثال ۲.۱.۱. فضای برداری $\mathbb{K}^n$ جبر جابه جایی یکدار روی $\mathbb{K}$ نسبت به اعمال مؤلفه ای است.

مثال ۳.۱.۱. مجموعه همه نگاشت های خطی روی فضای برداری E با ترکیب عملگرها به عنوان ضرب، یک جبر است که با نماد $\mathcal{L}(E)$ نشان داده می شود.

---
[۱] Dales

نگاشت های خطی را تبدیلات خطی یا عملگرهای خطی (یا به اختصار عملگرها) هم می‌گویند.

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باشد.*

(الف) زیرمجموعه S از A را جابه جایی گوییم اگر به ازای هر $a,b \in S$، $ab = ba$. جابه جاگر S مجموعه

$$S^c = \{b \in A : ab = ba \ \ (a \in S)\}$$

است. A^c را مرکز A گوییم و با نماد $\mathfrak{Z}(A)$ نشان می دهیم.

*(ب) عنصر $p \in A$ را **خود توان** گوییم اگر $p^2 = p$. یک عنصر خود توان در $\mathfrak{Z}(A)$ را خود توان مرکزی گوییم. مجموعه عناصر خودتوان A را با $\mathfrak{I}(A)$ نشان می دهیم.*

*(ج) عناصر $a,b \in A$ را در A **متعامد** گوییم و با $a \perp b$ نشان می دهیم هرگاه $ab = ba = 0$.*

تعریف ۵.۱.۱. *فرض کنیم A و B دو جبر باشند. یک **همریختی** از A به توی B، نگاشت خطی $\theta : A \to B$ است به طوری که*

$$\theta(ab) = \theta(a)\theta(b) \quad (a,b \in A).$$

فرض کنیم A و B جبرهای یکدار باشند. همریختی $\theta : A \to B$ را یکانی گوییم اگر $\theta(e_A) = e_B$.

ملاحظه ۶.۱.۱. *(الف) اگر در تعریف فوق B را میدان $\mathbb{K}$ در نظر بگیریم و θ همریختی غیر صفر باشد در این صورت θ را یک **سرشت** گوییم و اگر $\mathbb{K}$ را $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم θ را **همریختی مختلط** هم می گویند.*

*(ب) فرض کنیم A و B دو جبر باشند. همریختی $\theta : A \to B$ را **یکریختی** گوییم هرگاه یک به یک و پوشا باشد. همریختی $\theta : A \to A$ را **درون ریختی** گوییم و درون ریختی را که یکریختی هم هست، **خودریختی** گوییم.*

قضیه ۷.۱.۱. [31, 10.6] *اگر θ یک همریختی مختلط روی یک جبر مختلط A با عضو یکه e باشد، آنگاه $\theta(e) = 1$، و برای عناصر وارون پذیر $x \in A$، $\theta(x)$ مخالف صفر است.*

تعریف ۸.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باشد. زیرفضای برداری I از A را یک **ایده آل** چپ گوییم هرگاه $AI \subset I$. به طریق مشابه ایده آل راست هم تعریف می شود. I را یک ایده آل (دو طرفه) گوییم هرگاه I ایده آل راست و چپ جبر A باشد.*

ایده آل I از A را سره گوییم هرگاه $I \neq A$.

مثال ۹.۱.۱. مجموعه عملگرهایی از رتبه متناهی (عملگرهایی که بردشان متناهی بعد است)، روی فضای برداری E را با نماد $\mathcal{E}(E)$ یا $\mathcal{FL}(E)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم I یک ایده آل در جبر A باشد. فضای خارج قسمت A/I همراه با ضرب تعریف شده به وسیله فرمول $(a+I)(b+I) = ab + I \ (a, b \in A)$ یک جبر است. جبر A/I را* ***جبر خارج قسمت*** *گوییم.*

تعریف ۱۱.۱.۱. *ایده آل چپ سره I از جبر A را* ***ایده آل چپ مدولی*** *گوییم هرگاه $u \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $A(e_A - u) \subset I$، که در آن $A(e_A - u) := \{x - xu : x \in A\}$.*

اگر جبر A یکدار و جابه جایی باشد به جای ایده آل چپ مدولی تنها از کلمه ایده آل استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱۲.۱.۱. *ایده آل P از جبر A را* ***ایده آل اول*** *گوییم اگر P یک ایده آل سره باشد واگر $IJ \subset P$ (که I و J ایده آل هایی در A هستند) آنگاه $I \subset P$ یا $J \subset P$.*

ایده آل Q از جبر A را **نیمه اول** گوییم اگر Q یک ایده آل سره بوده و هرگاه I یک ایده آل در A باشد که $I^{۲} \subset Q$، آنگاه $I \subset Q$.

جبر A یک جبر اول (نیمه اول) است هرگاه ایده آل صفر یک ایده آل اول (نیمه اول) در A باشد.

توجه کنیم که ایده آل های اول همواره نیمه اول هستند.

تعریف ۱۳.۱.۱. *جبر A را* ***حوزه*** *گوییم هرگاه $A \neq ۰$ و به ازای هر $a, b \in A$، اگر $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$. جبر جابه جایی را که یک حوزه باشد یک* ***حوزه صحیح*** *گوییم.*

ملاحظه ۱۴.۱.۱. [6, 1.3.46(i)] *هرگاه A یک جبر جابه جایی غیر صفر باشد، A یک حوزه صحیح است اگر و تنها اگر A یک جبر اول باشد.*

قضیه ۱۵.۱.۱. [6, 1.3.56] *فرض کنیم A یک جبر مختلط متناهی بعد غیر صفر باشد که یک حوزه است. در این صورت A دارای عضو یکه e است و $A = \mathbb{C} \cdot e$.*

قضیه ۱.۱.۱۶. [6, 1.3.57] *اگر A جبر مختلط جابه جایی باشد و P ایده آل اول با همبعد متناهی در A باشد، آنگاه P ایده آل مدولی ماکسیمال از همبعد یک است.*

تعریف ۱.۱.۱۷. *فرض کنیم I یک ایده آل چپ در جبر A باشد. خارج قسمت I عبارتست از:*

$$I : A = \{a \in A : aA \subset I\}$$

خارج قسمت یک ایده آل چپ مدولی ماکسیمال را یک **ایده آل اولیه** گوییم. جبر A **اولیه** است هرگاه ۰ (ایده آل صفر) یک ایده آل اولیه باشد.

قضیه ۱.۱.۱۸. [6, 1.4.38] *فرض کنیم I یک ایده آل از همبعد متناهی در یک جبر مختلط A باشد. عبارت های زیر روی I معادلند:*

(الف) I یک ایده آل اول است؛

(ب) I یک ایده آل مدولی ماکسیمال است؛

(ج) I یک ایده آل اولیه است؛

(د) برای یک $n \in \mathbb{N}$، $A/I \cong \mathbb{M}_n$. ($\mathbb{M}_n$ جبر ماتریس های مختلط $n \times n$ است که در ادامه معرفی خواهد شد.)

تعریف ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم A و B دو جبر باشند.* ***رادیکال (جیکوبسن [۲])*** *جبر A را اشتراک همه ایده آل های اولیه از A تعریف کرده و با نماد $radA$ نمایش می دهیم.*

به وضوح $radA$ یک ایده آل در A است.

جبر A را **نیم ساده** گوییم اگر $radA = 0$، و رادیکال جبر گوییم هرگاه $radA = A$.

ضمناً رادیکال A برابر اشتراک ایده آل های چپ مدولی ماکسیمال A است [6, 1.5.2].

جبر A را **ساده** گوییم اگر $A^2 \neq 0$ و ایده آل های صفر و A تنها ایده آل های A باشند.

قضیه ۱.۱.۲۰. [6, 1.5.3] *فرض کنیم A یک جبر باشند. اگر $a \in A$ و $b \in radA$ طوری باشد که $a = ab$، آنگاه $a = 0$.*

---
[۲] Jacobson

قضیه ۲۱.۱.۱. [6, 1.5.4] *فرض کنیم A یک جبر باشد. اگر I یک ایده آل در A باشد. آنگاه می توان گفت $radI = I \cap \ radA$. به ویژه اگر A نیم ساده باشد آنگاه I هم نیم ساده است.*

تعریف ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باشد.* ***رادیکال اول*** *A را اشتراک همه ایده آل های اول A تعریف می کنیم و با نماد $\beta(A)$ نمایش می دهیم.*

قضیه ۲۳.۱.۱. [6, 1.5.23] *اگر I یک ایده آل در جبر A باشد آنگاه $\beta(I) = I \cap \beta(A)$.*

قضیه ۲۴.۱.۱. [6, 1.5.24] *جبر A نیمه اول است اگر و فقط اگر $\beta(A) = ۰$.*

قضیه ۲۵.۱.۱. [6, 1.5.25] *جبر A نیمه اول است اگر و فقط اگر A شامل هیچ ایده آل پوچ توان غیر صفر نباشد.*

رادیکال اول جبر A یک ایده آل پوچ جزء $radA$ است [6, 1.5.26]، یعنی $\beta(A) \subset radA$. پس اگر جبر A نیم ساده باشد آنگاه نیمه اول هم است.

۲.۱ یاد آوری از آنالیز تابعی

در این بخش مفاهیم اولیه از فضاهای باناخ را از کتاب کانوی [۳] [5] و نئر [۴] [28] یادآوری می کنیم. از جمله عملگرهای خطی روی فضای باناخ و دوگان یک فضای نرمدار و الحاقی یک عملگر را بحث می کنیم. همچنین تعاریف و قضایای مهم عملگرهای فشرده روی فضای باناخ هم آورده می شود.

تعریف ۱.۲.۱. *فضای برداری E همراه با یک نرم را فضای نرمدار گوییم. فضای نرمداری را که نسبت به متر تعریف شده به وسیله نرم کامل باشد فضای باناخ گوییم.*

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم E فضای نرمدار و F یک فضای باناخ باشد. مجموعه همه عملگرهای خطی و پیوسته از E به توی F را با $\mathcal{B}(E,F)$ نشان می دهیم. $\mathcal{B}(E,F)$ با نرم زیر یک فضای باناخ است[31, 4.1]؛

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\} \quad (T \in \mathcal{B}(E,F)).$$

[۳] Conway
[۴] Nair

عملگر خطی T را کراندار گوییم هرگاه $\|T\| < \infty$.

یک عملگر خطی بین دو فضای نرمدار، پیوسته است اگر و تنها اگر کراندارباشد [5, III.2.1].

قضیه ۱.۲.۳. [5, III.3.1] *اگر E فضای برداری متناهی بعد روی میدان $\mathbb{K}$ باشد آنگاه هر دو نرم روی E معادلند.*

قضیه ۱.۲.۴. [5, III.3.3] *اگر E یک فضای نرمدار و M یک زیرفضای برداری متناهی بعد در E باشد آنگاه M بسته است. لذا هر نرم روی یک فضای برداری متناهی بعد کامل است.*

قضیه ۱.۲.۵. [5, III.4.2] *اگر M یک زیرفضای بسته از فضای باناخ E باشد آنگاه E/M با نرم تعریف شده به صورت زیر یک فضای باناخ است:*

$$\|x + M\| = inf\{\|x + y\| : y \in M\}.$$

نرم فوق را **نرم خارج قسمتی** گوییم.

اگر E یک فضای نرمدار باشد. E^* دوگان فضای E را خانواده همه تابعک های خطی و کراندار روی E تعریف می کنیم.

با نرم عملگری ($\|f\| = sup\{|f(x)| : \|x\| \leq ۱\}$)، E^* یک فضای باناخ است [5, III.5.4].

تعریف ۱.۲.۶. *فرض کنیم E یک فضای نرمدار باشد.* ***توپولوژی ضعیف*** *روی E، ضعیف ترین توپولوژی روی E است به طوری که هر $x^* \in E^*$ را پیوسته سازد.*

توپولوژی ضعیف را با wk یا $\sigma(E, E^*)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۲.۷. *اگر E یک فضای نرمدار باشد،* ***توپولوژی ضعیف ستاره*** *روی E^*، ضعیف ترین توپولوژی روی E^* است به طوری که برای هر $x \in E$، نگاشت $x^* \mapsto \langle x, x^* \rangle$ پیوسته باشد.*

توپولوژی ضعیف ستاره را با wk^* یا $\sigma(E^*, E)$ نشان می دهیم.

ملاحظه ۱.۲.۸. *برای $x \in E$ و $x^* \in E^*$ نمادهای زیر برای نمایش مقدار تابع x^* در x بکار می رود:*

$$x^*(x) = \langle x, x^* \rangle = (x^*, x)$$

قضیه ۹.۲.۱. [5, VI.1.1] *اگر E و F دو فضای باناخ و $T : E \to F$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه T کراندار (پیوسته) است اگر و تنها اگر $T : (E, wk) \to (F, wk)$ پیوسته باشد.*

فرض کنیم $T \in \mathcal{B}(E, F)$. **الحاقی عملگر** T را با T^* نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T^* : F^* \to E^* \qquad \langle x, T^*(y^*)\rangle = \langle T(x), y^*\rangle$$

با فرض اینکه E و F فضاهای باناخ هستند نگاشت $T^* : (F^*, wk^*) \to (E^*, wk^*)$ پیوسته است. البته علاوه بر پیوستگی ضعیف ستاره با نرم هم پیوسته است؛ یعنی $T^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$ [31, 4.10].

تعریف ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم E و F دو فضای باناخ و $T : E \to F$ تبدیل خطی باشد. عملگر T فشرده است اگر $clT(ballE)$ در Y فشرده باشد، که در آن $ballE$ گوی یکه E و cl نمادی برای بستار مجموعه است.*

همه عملگرهای فشرده از E به توی F را با $\mathcal{B}_\circ(E, F)$ یا $\mathcal{K}(E, F)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱۱.۲.۱. [28, Theorem 9.1] *فرض کنیم E و F دو فضای باناخ و $T : E \to F$ عملگر خطی باشد. در این صورت T عملگر فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در E، شامل زیر دنباله $\{x_{n_i}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_i}\}$ به نقطه ای از F همگرا باشد.*

قضیه ۱۲.۲.۱. [5, VI.3.5] (*الف*) *اگر E و F دو فضای باناخ باشند، $\mathcal{K}(E, F)$ یک زیر فضای بسته در $\mathcal{B}(E, F)$ است.*

(*ب*) *اگر $S \in \mathcal{K}(E)$ و $T \in \mathcal{B}(E)$، آنگاه $TS \in \mathcal{K}(E)$ و $ST \in \mathcal{K}(E)$.*

قضیه ۱۳.۲.۱. [5, VI.3.6] *اگر E یک فضای باناخ باشد؛ $\mathcal{K}(E)$ یک ایده آل بسته در جبر $\mathcal{B}(E)$ است. ($\mathcal{B}(E)$ با ترکیب عملگرها یک جبر است)*

اگر E و F دو فضای باناخ باشد مجموعه همه عملگرهای خطی [و کراندار] با رتبه متناهی را با $\mathcal{F}(E, F)$ نشان می دهیم.

توجه داشته باشید که $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, F)$ و در حقیقت بستار $\mathcal{F}$ جزء $\mathcal{K}$ است [5, p. 174].

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، مجموعه $A \subset X$ را **ناهمبند** گوییم اگر بتوانیم آن را به صورت اجتماع دو مجموعه ناتهی، باز (نسبت به A) و از هم جدا بنویسیم. در غیر این صورت مجموعه A را همبند گوییم.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد دو عبارت زیر باهم معادلند:

(الف) $A \subset X$ ناهمبند است.

(ب) زیر مجموعه سره و ناتهی E از A وجود دارد که هم باز و هم بسته است.

نگاشت های پیوسته خاصیت همبندی را حفظ می کنند [26, 23.5].

در پایان این بخش فضای ضرب داخلی و نامساوی کوشی - شوارتز را یادآوری می کنیم:

تعریف ۱.۲.۱۴. *اگر E یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، یک ضرب **داخلی** روی E، نگاشت $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ است به طوری که به ازای $x, y, z \in E$ و اسکالر $\alpha \in \mathbb{K}$، شرایط زیر برقرار باشد:*

(الف) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$، که در آن $\overline{\langle y, x\rangle}$ مزدوج مختلط $\langle y, x\rangle$ است.

(ب) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ و $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(ج) $\langle x, x\rangle \geq ۰$ و تساوی تنها در حالت $x = ۰$ برقرار باشد.

*یک فضای برداری همراه با یک ضرب داخلی را یک **فضای ضرب داخلی** گوییم.*

قضیه ۱.۲.۱۵. **(*نامساوی کوشی - شوارتز*)** [5, I.1.4] *برای عناصر x و y در یک فضای ضرب داخلی داریم* $|\langle x, y\rangle|^۲ \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

۱.۳ جبرهای باناخ

در این بخش، مفهوم جبر باناخ را معرفی می کنیم. مفهوم طیف، نظریه گلفاند و فضای سرشت ها در جبرهای باناخ، از جمله مباحثی است که در این بخش از کتاب های کانوی [5] و رودین [۵] [31] بطور خلاصه بحث خواهد شد.

تعریف ۱.۳.۱. *یک **جبر نرمدار**، یک جبر A روی میدان $\mathbb{K}$ همراه با نرم $\|.\|$ است، به طوری که به ازای هر*

[۵] Rudin

a و b عضو A شرط زیر برقرار باشد:

$$\|ab\| \leq \|a\|.\|b\| \quad (\text{ویژگی زیر ضربی})$$

جبر نرمداری را که نسبت به نرم اش کامل باشد، یک **جبر باناخ** گوییم.

اگر A دارای عضو یکه e باشد، فرض می شود که $\|e\| = ۱$.

قضیه ۲.۳.۱. [5, VII.1.3] *اگر A یک جبر باناخ بدون عضو یکه باشد قرار می دهیم $A_۱ = A \times \mathbb{K}$. اعمال جبری روی $A_۱$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:*

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$$

$$\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$$

همچنین تعریف می کنیم $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$. در این صورت $A_۱$ با این نرم و اعمال فوق یک جبر باناخ با عضو یکه $(۰, ۱)$ است و نگاشت $a \to (a, ۰)$ یک یکریختی طولپایی از A به توی $A_۱$ است. $A_۱$ را یکدار شده جبر باناخ A گوییم و با نماد $A^\#$ هم نمایش داده می شود.

حال چند مثال مهم از جبرهای باناخ را مرور می کنیم.

۱) فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. $C_۰(X)$ یک جبر باناخ با ضرب نقطه به نقطه است و اگر X فشرده نباشد، بدون عضو یکه است.

۲) اگر E یک فضای باناخ باشد، $\mathcal{B}(E)$ مجموعه همه عملگرهای کراندار، با ترکیب عملگرها یک جبر باناخ یکدار است که یکه آن تابع همانی است.

۳) اگر E یک فضای باناخ باشد،$\mathcal{K}(E)$ مجموعه همه عملگرهای فشرده، یک ایده آل بسته در $\mathcal{B}(E)$ است و در نتیجه یک جبر باناخ است. اگر $dimE = \infty$، $\mathcal{K}(E)$ بدون عضو یکه است.

اگر A یک جبر باناخ جابه جایی یکدار باشد، آنگاه هر ایده آل سره، جزء یک ایده آل ماکسیمال است [5, VII.2.5].

اگر A یک جبر باناخ و M ایده آل بسته سره از A باشد، A/M یک جبر باناخ است [5, VII.2.6].

بخصوص $\mathcal{B}(E)/\mathcal{K}(E)$ (با نرم خارج قسمت) یک جبر باناخ است که آن را **جبر کالکین**[۶] گوییم.

اگر A یک جبر مختلط یکدار باشد، مجموعه همه عناصر وارون پذیر A را با $G(A)$ نشان می دهیم. به وضوح $G(A)$ یک گروه است.

تعریف ۱.۳.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in A$. **طیف** a را با $\sigma(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:*

$$\sigma(a) = \{\alpha \in \mathbb{K} : a - \alpha \notin G(A)\}.$$

مجموعه **حلال** a به صورت $\rho(a) := \mathbb{K} - \sigma(a)$ تعریف می شود.

قضیه ۱.۳.۴. [5, VII.3.6] *اگر A یک جبر باناخ یکدار روی $\mathbb{C}$ باشد، برای هر $a \in A$، $\sigma(a)$ زیر مجموعه فشرده ناتهی از $\mathbb{C}$ است.*

در ادامه همین فصل، میدان $\mathbb{K}$ را میدان مختلط $\mathbb{C}$ در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۳.۵. *اگر A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in A$، **شعاع طیفی** a را با $r(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:*

$$r(a) = sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(a)\}$$

چون $\sigma(a) \neq \varnothing$ و کراندار است، لذا $r(a)$ خوش تعریف و متناهی است.

قضیه ۱.۳.۶. [5, VII.3.8] *فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in A$. در این صورت*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

قضیه ۱.۳.۷. [31, 10.31] *فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه جایی یکدار و $P(z)$ یک چندجمله ای باشد و $x \in A$. در این صورت اگر $P(x) = 0$ آنگاه $\sigma(x)$ جزء مجموعه صفرهای $P(z)$ است.*

به قضیه ای در رابطه با ایده آل های ماکسیمال و همریختی ها در یک جبر باناخ جابه جایی توجه کنیم:

قضیه ۱.۳.۸. [31, 11.5] *اگر A یک جبر باناخ جابه جایی یکدار باشد، هر ایده آل ماکسیمال، هسته یک همریختی مختلط است و بر عکس.*

---
[۶] Calkin