بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

گرایش کاربردی

عنوان

به‌کارگیری توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مسائلی در محیط متخلخل و اختر فیزیک

نگارش

سعید کاظم

استادراهنما

دکتر سعید عباس‌بندی

استادمشاور

دکتر داود رستمی

شهریور ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

چکیده

رشته‌ی ریاضیات کاربردی و خصوصا گرایش عددی روش‌های تقریبی برای حل مسایل پیچیده درعلوم مختلف به خصوص علوم مهندسی ارایه می‌دهد. این مسایل غالبا به‌صورت معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی ظاهر می شوند.

بسیاری از مسایل در مکانیک سیالات و اختر فیزیک منجر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می شود. بسیاری از این مسایل فاقد جواب تحلیلی می باشد. لذا روش های عددی برای حل آن کار ساز می باشد. در این پایان نامه با بکارگیری توابع پایه ای شعاعی و استفاده از روش هم محلی به حل برخی از مسایل در محیط متخلخل و اختر فیزیک می پردازیم. جهت بهبود در تقریب تابع مجهول با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی ایده هایی به منظور برقراری شرایط مسایل و کاهش خطا بیان می شود.

فهرست مطالب

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه

۱-۱ تاریخچه

استفاده از روش‌های توابع پایه‌ای شعاعی در درونیابی یک مجموعه از نقاط پراکنده یکی از مباحث مهم در نظریه‌ی تقریب می‌باشد. در این روش‌ها داده‌ها توسط ترکیب خطی از انتقال‌های یک تابع درونیابی می‌شوند. مزیت اصلی این روش‌ها نسبت به درونیابی چندجمله‌ای قابلیت استفاده ساده‌تر از آنها در بعدهای بالاتر می‌باشد.

استفاده از این پایه‌ها در حل مسائل زمین‌شناسی، ژئوفیزیک، نقشه‌برداری و هواشناسی بوده است، همچنین این روش‌ها در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معمولی به کار می‌روند. استفاده از روش‌های توابع شعاعی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی روش‌های بدون شبکه[1] می‌باشند. در روش‌های بدون شبکه نیازی به تولید یک شبکه منظم در دامنه‌ی مسأله نمی‌باشد که با توجه به هزینه‌ی محاسباتی بالای تولید شبکه، این خصوصیت مزیت اصلی این روش‌ها نسبت به روش‌های

1) Meshless method

تفاضلات متناهی و المان‌های محدود و . . .می‌باشد. در ادامه تاریخچه‌ی مختصری از روش‌های بدون شبکه در نظریه‌ی تقریب ارائه می‌شود و به لیستی از مقالات مهم اشاره می‌شود. در اواخر دهه ۱۹۶۰ شپارد[1] استفاده از روشی را برای مدل‌بندی سطح پیشنهاد کرد که به عنوان توابع شپارد معروف است. استفاده‌ی دیگر از روش‌های بدون شبکه در اوایل دهه ۱۹۷۰ توسط رولند هاردی[2] [۱, ۲] در زمینه‌ی زمین‌شناسی پیشنهاد شد.

ایده‌های پیشنهادی توسط هاردی با نام روش‌های چند ربعی[3] (MQ) و چندربعی معکوس[4] (IMQ) شناخته می‌شوند. در همین حین، جین دوچون[5] ایده‌ی تغییراتی مربوط به اسپلاین‌های صفحه‌ای باریک[6] (TPS)، یا به طور کلی اسپلاین‌های چندمعیاره[7] را فرمول‌بندی کرد [۳].

ایده‌ی توابع شپارد توسط پیتر لنکستر و سالکاوسکاس[8] تعمیم یافت. روش آنها اکنون با نام روش کمترین مربعات متحرک معروف است. یک مقاله‌ی مهم دیگر که به مقایسه‌ی تمامی روش‌های درونیابی داده‌های پراکنده موجود در اوایل دهه ۱۹۸۰ می‌پردازد توسط ریچارد فرانکی ارائه شد [۴]. در این مقایسه او نتیجه می‌گیرد که چندربعی‌ها و اسپلاین‌های صفحه‌ای باریک بهترین روش‌های موجود در آن زمان می‌باشند. همچنین فرانکی حدس می‌زند که ماتریس درونیابی حاصل از (MQ) معکوس‌پذیر است. این مقایسه در تایید MQ و TPS و حدس مربوطه یک جهش در تحقیقات روی توابع پایه‌ای شعاعی محسوب می‌شود. آنالیز این روش‌ها بر این پایه بنا شده است که این ایده را می‌توان به عنوان حالت خاصی از مسأله‌ی درونیابی هرمیت ـ بیرخوف درنظر گرفت. در یک نوشته منتشر نشده [۵] والی مدیچ و نلسون[9] با استفاده از ایده‌ی تغییراتی، صحت حدس فرانکی را تایید کردند و یک چارچوب کلی برای درونیابی چندمتغیری ارائه دادند. تقریباً در همین زمان چالز میچلی[10] [۶] حدس فرانکی را

1) D. Shepard 2) Rolland Hardy 3) Multiquadric 4) Inverse multiquadric 5) Jean Duchon 6) Thin plate splines 7) Polyharmonic splines 8) Peter Lancaster and Kes Šalkauskas 9) Wally Madych and S.A. Nelson 10) Charles Micchelly

اثبات کرد. ایده‌ی او بر پایه‌ی توابع معین مثبت مشروط بود. همچنین وندلند[1] اولین کسی است که یک کلاس از توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده را معرفی کرد و توانست یک ایده‌ی ساده برای محاسبات روش‌های بدون شبکه با تابع پایه‌ای شعاعی ارائه کند.

در ادامه بسیاری از این نتایج را به تفضیل بیشتر بیان می‌کنیم. هر چند در این پایان‌نامه، کمتر به اثبات این نتایج می‌پردازیم و برای جزئیات بیشتر به نوشته‌های اصلی یا کتاب توابع پایه‌ای شعاعی [۷] نوشته بوهمن[2] ارجاع می‌دهیم.

با وجود این همه کارهای انجام شده روی توابع پایه‌ای شعاعی برای تقریب داده‌های پراکنده و یا به طور کلی برای تئوری درونیابی، تنها اخیراً شاهد استفاده از آنها برای معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) هستیم. این ایده که جواب کلی PDE را مستقیماً با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی تقریب می‌زند از این جهت جالب است که نیازی به شبکه‌بندی ندارد.

از زمان کار اولیه‌ی کانزا [۸]، تعداد زیادی مقاله در مورد این روش نوشته شده است. به عنوان مثال، دوبال و همکاران[3] [۹]، موریس و کانزا[4] [۱۰] و شاران و دیگران[5] [۱۱] را ببینید. با وجود جواب نسبتاً خوب آنها، تمام کارهای انجام شده تنها مربوط به استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برای جواب عددی PDEs بر پایه‌ی شهود به جای آنالیز ریاضی بوده است.

فرانکی و شابک[6] [۱۲] توانسته‌اند حداقل برای معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت یک اثبات همگرایی و کران خطا برای تکنیک‌های توابع پایه‌ای شعاعی بر پایه‌ی هم مکانی به دست آورند.

در ادامه‌ی این فصل مفاهیم اصلی درونیابی داده‌های پراکنده و توابع معین مثبت ارائه می‌شود. در فصل‌های بعد بیشتر به جزئیات آنها خواهیم پرداخت. در فصل ۲ توابع پایه‌ای شعاعی و ابزارهای لازم برای آنالیز آنها ارائه کرده و مباحثی را در مورد کران‌های خطای موجود برای تقریب با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی مطرح می‌کنیم.

1) Holger Wendland 2) Buhmann 3) Dubal et al 4) Moridis and Kansa 5) Sharan et al 6) Franke and Schaback

در فصل ۳ ایده‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی مطرح می‌کنیم و در فصل ۴ به حل مسائل دارسین[1] در محیط متخلخل و مسائل لین-ام‌دن[2] در اختر فیزیک می‌پردازیم. در انتها نیز در رابطه با همگرایی مسائل حل شده و تاثیر پارامتر شکلی در سرعت همگرایی آنها ایده هایی رامطرح می کنیم.

۱-۲ درونیابی داده‌های پراکنده

از مساله درونیابی داده‌های پراکنده به عنوان انگیزه اصلی روش‌های بدون شبکه یاد می‌شود. این مسأله یکی از مسائل اساسی در نظریه‌ی تقریب و مدل‌بندی داده‌ها می‌باشد. خواست ما برای داشتن یک مسأله خوش‌وضع به طور طبیعی منجر به استفاده از مفهوم ماتریس‌های معین مثبت و توابع اکیداً معین مثبت می‌شود. این توابع یک ورودی مستقیم به روش‌های بدون شبکه فراهم می‌کنند. همچنین این روش تقریب، پایه بسیاری از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل (DEs) است.

در بسیاری از رشته‌های علمی با مسأله زیر مواجه هستیم. یک مجموعه از داده‌ها در دست است، می‌خواهیم قانونی بیابیم تا با استفاده از آن اطلاعاتی درباره‌ی فرآیند مورد مطالعه در محل‌های متفاوت از داده‌های به دست آمده، استنباط کنیم بنابراین تلاش می‌کنیم تا تابعی بیابیم که یک تقریب «خوب» برای داده‌های موجود باشد. راه‌های بسیاری وجود دارد ولی تنها معیاری که ما درنظر می‌گیریم این است که می‌خواهیم تقریب ما (که با $S_{f,X}$ نشان می‌دهیم) دقیقاً بر اندازه‌های داده شده در محل‌های متناظر منطبق شود به این ایده، درونیابی گفته می‌شود. اگر مکان‌هایی که اندازه‌ی متناظرشان داده شده است روی یک شبکه‌ی یکنواخت یا معمولی قرار نگرفته باشند، آنگاه به این فرایند درونیابی داده‌های پراکنده گفته می‌شود. به طور دقیق‌تر مسألهٔ زیر را داریم.

1) Darcian 2) Lane-emden

مسأله: داده‌های N ,$j = ۱, ۲, \ldots$,(x_j, y_j) با $y_j \in \mathbb{R}$، $x_j \in \mathbb{R}^d$ و $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_N\}$ داده شده است. تابع (پیوسته) $S_{f,N}$ را به گونه‌ای بیابید که

$$S_{f,N}(x_j) = y_j, \qquad j = ۱, ۲, \ldots, N \qquad (۱-۱)$$

در اینجا x_jها مکان‌های اندازه‌گیری (مکان داده‌ها) و y_jها اندازه‌های متناظر (مقدار داده‌ها) می‌باشند. ما اغلب فرض می‌کنیم که این مقادیر توسط نمونه‌گیری از تابع f در مکان داده‌ها به دست آمده است. یعنی

$$y_j = f(x_j), \qquad j = ۱, ۲, \ldots, N$$

این حقیقت که x_jها می‌توانند در فضای dـبعدی $\mathbb{R}^d$ واقع شوند به این معنی است که فرمول‌بندی مسأله مذکور می‌تواند انواع بسیار مختلفی از مسائل را بپوشاند مثلاً اگر $d = ۱$ داده‌ها می‌تواند یک سری از اندازه‌های گرفته شده در دوره‌های زمانی مشخص باشد بنابراین «مکان داده‌ها» x_jها نشان دهنده‌ی لحظه‌های زمانی خاص می‌باشند. برای $d = ۲$ می‌توانی فرض کنیم که داده‌ها روی ناحیه‌ای مسطح به دست آمده‌اند، در نتیجه x_jها برابر مختصات روی صفحه می‌باشند. برای $d = ۳$ باید وضعیت مشابهی را در فضا درنظر گرفت.

ایده راحت و معمول برای حل مسأله‌ی داده‌های پراکنده این است که فرض کنیم تابع $S_{f,N}$ ترکیب خطی از توابع پایه‌ی مشخص B_k است یعنی

$$S_{f,N}(x) = \sum_{k=۱}^{N} c_k B_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d \qquad (۲-۱)$$

حل مسأله درونیابی تحت این فرض منجر به یک سیستم از معادلات خطی به شکل

$$Ac = y$$

می‌شود که اجزای آن ماتریس درونیاب A به صورت $A_{jk} = B_k(x_j), j, k = ۱, ۲, \ldots, N$ و بردار $c = (c_۱, \ldots, c_N)^T$ مجهول و $y = (y_۱, \ldots, y_N)$ می‌باشد. لذا اگر بخواهیم مقادیر داده‌های

$f_1, f_2, \ldots, f_N$ که در نقاط $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ داده شده است را درونیابی کنیم، با انتخاب یک تابع ساده $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ و

$$S_{f,N}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi(x - x_j)$$

که در آن ثوابت α_jها به وسیلهٔ شرایط درونیابی تعیین می‌گردد، امکان‌پذیر است.

اگر Φ انتخاب شده به‌گونه‌ای باشد که ماتریس درونیابی متناظرشان معین مثبت باشد آنگاه همیشه با مسأله درونیابی خوش‌وضع روبه‌رو خواهیم شد. چون ماتریس‌های معین مثبت، نامنفرد هستند. برای دستیابی به این منظور توابع معین مثبت را معرفی می‌کنیم.

۱-۳ ماتریس‌ها و توابع معین مثبت

ماتریس معین مثبت یک مفهوم استاندارد در جبر خطی است، با این وجود ما تعریف خاصی از آن را به منظور برقراری ارتباط با توابع معین مثبت ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱ـ۲: ماتریس حقیقی متقارن A را نیمه‌معین مثبت گوییم هرگاه فرم درجه دوم متناظرش نامنفی باشد. یعنی

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} c_i c_j A_{ij} \geq 0.$$

برای هر $c = [c_1, \ldots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$. اگر تنها بردار c که نامساوی فوق را به تساوی تبدیل می‌کند بردار صفر باشد، آنگاه A را معین مثبت گوییم.

تعریف ۱ـ۳: یک تابع پیوسته $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ را معین مثبت $\Phi \in PD(\mathbb{R}^d)$ گوییم، اگر برای هر $N \in \mathbb{N}$ و هر مجموعه از نقاط متمایز $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}^N$ صورت

درجه دوم

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_j\bar{\alpha}_j\Phi(x_j-x_i)=\alpha^T\Phi\alpha\geq 0,\qquad \alpha^T=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_N)$$

نامنفی باشد، و تابع Φ اکیداً معین مثبت $\Phi\in SPD(\mathbb{R}^d)$ گوییم اگر صورت درجه دوم به ازای هر $\alpha\in\mathbb{C}^N/\{0\}$ مثبت باشد.

در اینجا از یک تعریف کلی برای توابع مختلط استفاده کردیم این تعریف به ما اجازه می‌دهد که از تکنیک‌هایی مانند تبدیل فوریه و ... استفاده کنیم. تابعی که اکیداً معین مثبت (معین مثبت) باشد آنگاه ماتریس درونیابی مربوطه آن معین مثبت (نیمه معین مثبت) خواهد بود.

توابع معین مثبت اولین بار در اوایل قرن ۲۰ در حوزه آنالیز کلاسیک معرفی شدند. در دهه ۱۹۲۰ ظاهراً ماتیاس[1] برای اولین بار توابع معین مثبت را معرفی کرد و مورد مطالعه قرار داد و ارتباط بین درونیابی داده‌های پراکنده و توابع معین مثبت توسط میچلی[2] مشخص شد.

قضیه ۱ـ۴: فرض کنید Φ تابع معین مثبت باشد آنگاه داریم:

۱) $\Phi(0)\geq 0$،

۲) Φ کراندار است یعنی $|\Phi(x)|\leq\Phi(0);\forall x\in\mathbb{R}^d$،

۳) اگر $\Phi_1,\ldots,\Phi_N$ توابع معین مثبت باشند و $1\leq j\leq N$ ، $c_j\geq 0$ آنگاه $\Phi=\sum_{j=1}^{N}c_j\Phi_j$ نیز تابع معین مثبت است. و اگر یکی از ϕ_jها اکیداً معین مثبت باشد و c_j متناظر آن مثبت باشد آنگاه Φ اکیداً معین مثبت است.

۴) ضرب دو تابع اکیداً معین مثبت، اکیداً معین مثبت است.

1) Mathias 2) Michelli

مثال: نقطه‌ی y را در $\mathbb{R}^d$ ثابت فرض کنید. در این صورت تابع $\Phi(x) = e^{xy}$ روی $\mathbb{R}^d$ معین مثبت است چرا که فرم درجه دوم آن به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_j c_k \Phi(x_j - x_k) &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_j c_k e^{(x_j - x_k)y} \\ &= \sum_{j=1}^{N} c_j e^{x_j y} \sum_{k=1}^{N} c_k e^{x_k y} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{N} c_j e^{x_j y}\right]^2 \geq 0.\end{aligned}$$

فصل دوم

توابع پایه‌ای شعاعی و آنالیز آنها

در این فصل به درون‌یابی با توابع پایه‌ی شعاعی می‌پردازیم. ابتدا درون‌یابی روی داده‌های پراکنده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توابع معین مثبت، معین مثبت مشروط، به طورکامل یکنوا و شعاعی آشنا می‌شویم. با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی، درون‌یابی را روی داده‌های پراکنده انجام می‌دهیم و در نهایت نیز دقت و پایداری این نوع درون‌یابی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲-۱ مقدمه

درون‌یابی توابع کاربرد بسیار مهمی در اکثر شاخه‌های علمی دارد، اما مشکل اصلی بیش‌تر روش‌های سنتی درون‌یابی این است که این روش‌ها نیازمند تولید شبکه در دامنه هستند. این به این معنا است که این روش‌ها نیازمند اطلاعات منظم در دامنه هستند، اما در بسیاری جاها امکان استخراج اطلاعات منظم وجود ندارد و داده‌ها به صورت پراکنده در دامنه پخش شده‌اند. علاوه بر این روش‌هایی که براساس گسسته‌سازی شبکه‌ای بنا می‌شوند زمان زیادی را جهت تولید شبکه صرف می‌کنند. ضمن این که

پیچیدگی این روش‌ها با افزایش بعد مساله بسیار زیاد می‌شود. این مشکلات باعث ظهور روش‌هایی به نام روش‌های بی‌نیاز از شبکه شد. انگیزه‌ی نخست استفاده از روش‌های بی‌نیاز از شبکه، کاربرد آن در نقشه‌برداری، نقشه‌کشی و هواشناسی بوده است و بعدها ان روش‌ها در حل عددی معادلات با مشتقات پاره‌ای، هوش مصنوعی، نظریه‌ی یادگیری، شبکه‌های عصبی، نظریه‌ی نمونه‌گیری و بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گرفت [۱۳]. نخستین بار در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰، شپارد روش بی‌نیاز از شبکه را مورد استفاده قرار داد. وی با استفاده از توابعی به نام توابع شپارد، درون‌یابی را برای داده‌های نامنظم انجام داد و روشی برای مدل‌سازی رویه‌ها پیشنهاد کرد [۱۴].

روشی مناسب جهت درون‌یابی براساس داده‌های نامنظم این است که تابع درون‌یاب را به صورت ترکیب خطی از توابعی مشخص به نام توابع پایه در نظر بگیریم. بنابه نتیجه‌ای از قضیه‌ی میرهابر و کارتیس، درون‌یابی توابع چندمتغیره روی داده‌های پراکنده تنها زمانی خوش طرح است که توابع پایه وابسته به داده‌ها باشند.

دسته‌ای از توابع به نام توابع معین مثبت مشروط، انتخاب مناسبی به عنوان پایه در روش‌های بی‌نیاز از شبکه هستند. ویژگی این نوع توابع پایایی آن‌ها تحت انتقال است. اما اگر پایه‌ی انتخابی دارای پایایی تحت تمام تبدیلات اقلیدسی (انتقال، دوران و انعکاس) باشد، انتخاب مناسب‌تری است. این خاصیت خوب در دسته‌ای از توابع به نام توابع شعاعی یافت می‌شود. این توابع که هم معین مثبت مشروط هستند و هم تحت تمام تبدیلات اقلیدسی پایا هستند، به عنوان پایه در روش‌های بی‌نیاز از شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرند و به توابع پایه‌ی شعاعی معروف هستند. از مهم‌ترین توابع پایه‌ی شعاعی می‌توان به مولتی کوادریک (MQ)، مولتی کوادریک وارون (IMQ)، گاوسی و اسپلاین‌های صفحه باریک (TPS) اشاره کرد.

در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰، هاردی برای اولین بار روش‌های بدون شبکه را براساس توابع پایه‌ی شعاعی مولتی کوادریک (MQ) و مولتی کوادریک وارون (IMQ) در نقشه‌برداری استفاده کرد [۱, ۲, ۵]. در