دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

مجموعه های احاطه گر مستقل در گراف ها

نگارش:

معصومه معلومات

استاد راهنما: **حمیدرضا میمنی**

استاد مشاور: **فرح بخش کمالی**

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

خرداد ماه ۱۳۹۳

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **معصومه معلومات** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه/ رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه/ رساله قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

معصومه معلومات

امضا

تهران - لویزان - کدپستی ۱۶۷۸۸۱۵۸۱۱ - صندوق پستی ۱۳۶-۱۶۷۸۵ - تلفن ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰
نمابر ۲۲۹۷۰۰۳۳ - پست الکترونیکی: **sru@sru.ac.ir**

شماره: ۹۴۲/۱۴
تاریخ: ۹۴/۶/۱۰
پیوست:

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد خانم معصومه معلومات رشته ریاضی محض تحت عنوان «مجموعه های احاطه گر مستقل در گراف ها» در تاریخ ۱۳۹۳/۰۳/۳۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی برگزار گردید و نتیجه به شرح ذیل می‌باشد.

☐ قبول (با درجه عالی امتیاز ۱۹) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

نوروزی

۱. عالی (۲۰-۱۹)
۲. بسیار خوب (۱۸،۹۹-۱۸)
۳. خوب (۱۷،۹۹-۱۶)
۴. قابل قبول (۱۵،۹۹-۱۴)
۵. غیرقابل قبول (کمتر از ۱۴)

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر حمید رضا میمنی	استاد	
استاد مشاور	دکتر فرحبخش کمالی	استادیار	
داور داخلی	دکتر فرزانه نوروزی	استادیار	
داور خارجی	دکتر سیامک یاسمی	استاد	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر فرزانه نوروزی	استادیار	

دکتر ایوب اسماعیل پور
رئیس دانشکده علوم پایه

تهران، لویزان، کد پستی: ۱۵۸۱۱-۱۶۷۸۸
صندوق پستی: ۱۶۳-۱۶۷۸۵
تلفن: ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰ فکس: ۲۲۹۷۰۰۳۳
Email:sru@sru.ac.ir
www.srttu.edu

تقدیم به :

سایبان سرم، پدرم...

باغبان دلم، مادرم ...

خواهر و برادر بهتر از جانم .

تشکر

اینک که به فضل خداوند این پایان‌نامه به سرانجام رسیده، وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد گرامی دکتر میمنی به خاطر راهنمایی‌ها و زحمات فراوانشان با سمت استاد راهنما و همچنین استاد دکتر کمالی با سمت مشاور تشکر کنم.

چکیده

در این پایان نامه، نتایج برگزیده ای از مجموعه های احاطه گر مستقل در گراف ها بررسی شده است. این نتایج کلید ایجاد روابط بین عدد احاطه گری مستقل و سایر پارامترها از جمله: عدد احاطه گری، عدد استقلال و عدد رنگی می باشد. علاوه بر این، این نتایج کران بالای بهینه ای روی عدد احاطه گری مستقل در شرایطی از مرتبه خودش، مرتبه و ماکسیمم درجه، مرتبه و مینیمم درجه را می سازند. نتایج وابسته به ساختار گراف های احاطه گر-کامل ارائه شده است. نتایج عدد احاطه گری مستقل در خانواده های مختلفی از گراف ها، از جمله گراف های مسطح، گراف های مثلث -آزاد و گراف هایی با قطر محدود بیان شده است. سئوالات پیچیده ای مربوط به عدد احاطه گری مستقل نیز مطرح شده است.

در این جا چند مسأله باز و حدس جالب را روی عدد احاطه گری مستقل عنوان کرده و چند سوال جذاب برای گراف های مسطح مطرح کرده و ارزش آنها بررسی می شود.

به ویژه، برای هر گراف مکعبی همبند از مرتبه بیشتر از ۱۰، کران های بالا برای گراف های ۴ -منتظم همبند، مقدار کلی ماکزیمم نسبت عدد احاطه گری مستقل به عدد احاطه گری را حدس زده و برای هر گراف مکعبی همبند با محیط کمتر از ۶ مقدار $i(G) < n/3$ به دست می آید. چندین سوال باز جذاب بیان شده، از جمله این که هر گراف مثلث -آزاد با $\delta(G) \geq n/10$، $i(G) \leq n/2$ دارد، که اگر پاسخ داده شوند اندکی از پیچیدگی های عدد احاطه گری مستقل کاسته می شود.

کلمات کلیدی: احاطه گری مستقل،کران های نورهاوس - گادمن.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست نمادها

مجموعه احاطه گر با اندازه $\gamma(G)$ .... $\gamma - set$

مجموعه احاطه گر مستقل با اندازه $i(G)$ .... $i - set$

همسایگی اختصاصی بیرونی راس v .... $epn(v)$

دو رأس مجاور u, v .... $u \perp v$

دو رأس غیر مجاور u, v .... $u \nmid v$

مجموعه رئوس انحصاری .... V_{ex}

مجموعه احاطه گر مستقل .... IDS

همسایه اختصاصی .... PN

حتما باقی .... $a.a.s$

یکنواخت تصادفی .... $u.a.r$

گراف های مکعبی از مرتبه n .... Q_n

حاصلضرب دکارتی دو گراف G, H .... $G \Box H$

عدد رنگی گراف G .... $\chi(G)$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم ابتدایی

۱.۱ مقدمه

در این فصل، ابتدا مفاهیم اولیه مورد نیاز بیان شده است؛ سپس exp گراف را معرفی کرده و به کمک قضایایی که بیان می شود، می توان بیشتر با ویژگی های این گراف آشنا شد.

۲.۱ مفاهیم و قضایای ابتدایی

تعریف ۱.۲.۱. *گراف G دوتایی $G = (V, E)$ است که در آن $V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ...v_n\}$ یک مجموعه غیرتهی (موسوم به مجموعه رئوس) و $E = E(G)$ زیرمجموعه ای از زیرمجموعه های دو عضوی $V(G)$ (موسوم به مجموعه یال ها) است. اگر $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ گویند v_i و v_j مجاورند و برای سادگی با $v_iv_j \in E$ نشان می دهند.*

تعریف ۲.۲.۱. *تعداد رئوس در گراف G را مرتبه گراف و تعداد یال ها در گراف G را اندازه گراف می نامند.*

تعریف ۳.۲.۱. *رأس v در گراف G را در نظر بگیرید. همسایگی باز رأس v را با $N(v)$ نشان می دهند که*

$$N(v) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. *همسایگی بسته v را با $N[v]$ نشان می دهند که $N[v] = \{v\} \cup N(v)$ است.*

تعریف ۵.۲.۱. *همسایگی باز یک زیرمجموعه S از رئوس G را با $N(S)$ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می شود:*

$$N(S) = \cup_{v\in S} N(v).$$

تعریف ۶.۲.۱. درجه v یعنی $degv$ برابر تعداد رئوسی است که در مجاورت v هستند. یعنی $degv = |N(v)|$. بنابراین، درجه رأس v در گراف G عبارت است از تعداد یال هایی که با v برخورد دارند. مینیمم درجه را با δ و ماکسیمم درجه را با Δ و درجه دیگر رئوس مانند v_iرا با $d(v_i)$ یا d_i نمایش می دهند. رأسی از درجه صفر یک رأس ایزوله نامیده می شود، در حالی که راسی از درجه ۱ ، یک رأس انتهایی یا برگ گفته می شود.

تعریف ۷.۲.۱. هرگاه درجه همه رئوس گراف Gبا هم برابر باشند، گراف G را منتظم نامند، و اگر همه رئوس از درجه kباشند، آن را $k-$منتظم گویند.

تعریف ۸.۲.۱. گراف $H = (\ V(H)\ ,\ E(H)\ )$را زیرگراف گراف $G = (\ V(G)\ ,\ E(G)\ )$گویند، هرگاه

$$V(H) \subseteq V(G)\ \ ،\ \ E(H) \subseteq E(G).$$

تعریف ۹.۲.۱. دو گراف $G_۱, G_۲$یکریخت هستند، اگر یک تابع یک به یک مانند φ از $V(G_۱)$به روی $V(G_۲)$موجود باشد، به گونه ای که $uv \in E(G_۱)$ اگر و تنها اگر $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G_۲)$. تابع φ یک یکریختی نامیده می شود. اگر $G_۱, G_۲$یکریخت باشند، آنگاه می نویسیم $G_۱ \cong G_۲$.

تعریف ۱۰.۲.۱. گشت در G، دنبالهٔ ناتهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_kv_k$ است، که جمله های آن متناوبا رأس ها و یال ها هستند، به طوری که برای $۱ \leq i \leq k$ ، دو انتهای e_i ، $v_i, v_{i-۱}$هستند. گویند Wگشتی از $v_۰$به v_k، یا گشت $(v_۰, v_k)$، است. رأس های $v_۰$ ،v_kرا به ترتیب مبدا و انتهای W و $v_۱, v_۲, ..., v_{k-۱}$ رأس های داخلی اش می نامند. عدد صحیح kطول W است.

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر یال های $e_۱, e_۲, ..., e_k$ی گشت W مجزا باشند، W را گذر می نامند.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر در گشت Wرأس های $v_۰, v_۱, ..., v_k$ مجزا باشند، Wرا مسیر گویند. مسیر n رأسی را با P_n نمایش می دهند.

تعریف ۱۳.۲.۱. گشت بسته است، اگر طول مثبت داشته باشد و مبدا و انتهای آن یکی باشد. گذر بسته ای که رأس های داخلی و مبدا آن مجزا باشند، دور است. دور n رأسی را با C_n نمایش می دهند.

درست مانند مسیرها، برای نشان دادن این که گرافی متناظر با دور است از اصطلاح « دور » استفاده می کنیم. دور به طول k را $k-$دور گویند. ۳-دور را اغلب مثلث می نامند.

تعریف ۱۴.۲.۱. گراف همبند فاقد دور را درخت می نامند و با T نمایش می دهند.

تعریف ۱۵.۲.۱. برای گراف غیر بدیهی G و هر جفت رأس u,v از G، فاصله $d_G(u,v)$ (یا در صورت مشخص بودن گراف G) بین u,v، طول کوتاهترین $u-v-$مسیر در G است به شرطی که این مسیر وجود داشته باشد. اگر هیچ $u-v-$مسیری وجود نداشته باشد، قرار دهید $d(u,v)=\infty$.

تعریف ۱۶.۲.۱. خروج از مرکز، $e(v)$برای رأس vگراف G فاصله رأس v تا دورترین رأس از vاست. یعنی

$$e(v) = max\{d(v,u) \mid u \in V(G)\}.$$

تعریف ۱۷.۲.۱. قطر گراف همبند G، $diamG$، به صورت

$$diamG = max\{e(v) \mid v \in V(G)\}$$

تعریف می شود.

تعریف ۱۸.۲.۱. محیط گراف همبند G عبارت است از زیر گراف القایی از G توسط رأس هایی مانند v از G به شرط این که $e(v)=diamG$ باشد.

به عبارت دیگر، محیط یک گراف طول کوتاهترین دور گراف می باشد.

مثال: یک دور به طول ۴ (مربع) محیط ۴ دارد. یک مثلث محیط ۳ دارد.

اگر گراف هیچ دوری نداشته باشد، محیط آن نامتناهی است.

تعریف ۱۹.۲.۱. اگر $\emptyset \neq U \subseteq V(G)$، آن گاه زیرگراف $G[U]$ (القا شده توسط مجموعه U) از گراف G، گرافی است که مجموعه رئوس آن U می باشد و مجموعه یال های آن، یال هایی از $E(G)$ می باشد که دوانتهای آن در U هستند.

تعریف ۲۰.۲.۱. برای یک مجموعه Fاز گراف ها، گراف Gرا $F-$ آزاد گویند، اگر شامل هیچ زیرگراف القایی یکریخت با یک عضو F نباشد.

مثال: فرض کنید $F=\{C_۳, C_۴\}$ و $G=C_۶$ باشد. در این صورت G یک گراف $F-$ آزاد است.

نکته ۲۱.۲.۱. یک گراف با محیط ۴ یا بیشتر، مثلث- آزاد است.

تعریف ۲۲.۲.۱. یک ویژگی ارثی از یک گراف، ویژگی است که برای زیرگراف های القایی اش نیز برقرار باشد. یک ویژگی ارثی است، اگر با حذف تعدادی رأس نیز محفوظ بماند. یک کلاس گراف Γ ارثی گفته می شود، اگر نسبت به زیرگراف های القایی اش بسته باشد.

مثالی از کلاس گراف های ارثی، گراف های مستقل هستند.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید Γ یک گروه ارثی و F یک مجموعه از گراف های G که برای هر زیرگراف القایی H از G، $G \notin \Gamma$ اما $H \in \Gamma$ باشد. در این صورت F یک مجموعه از زیرگراف های القایی ممنوع برای Γ است.

مثال: C_nها زیرگراف های القایی ممنوع برای درخت ها می باشند.

تعریف ۲۴.۲.۱. گراف Gرا دوبخشی گویند، هرگاه بتوان رئوس آن را به دو مجموعه Xو Y طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها دیگر در Y باشد. گراف دوبخشی G با دوبخش X و Y را کامل گویند، هرگاه هر رأس در X به هر رأس در Y متصل باشد. چنین گرافی را با $K_{m,n}$ نمایش می دهند.

تعریف ۲۵.۲.۱. گراف G را پنجه-آزاد گویند، هر گاه $K_{۱,۳}-$آزاد باشد.

تعریف ۲۶.۲.۱. گرافی که بتوان در صفحه به گونه ای رسم کرد که هیچ یک از یال هایش یکدیگر را قطع نکنند، گراف مسطح نامیده می شود. گرافی که به این ترتیب در صفحه رسم شود، گراف نشانده شده در صفحه نامیده می شود.

نشاندن گراف در صفحه معادل نشاندن آن روی کره است.

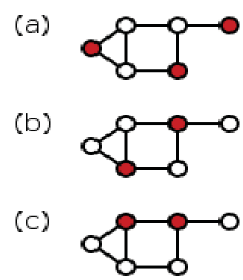
تعریف ۲۷.۲.۱. ستاره S_r، گراف دوبخشی کامل $K_{۱,r}$ است. یک ستاره دوگانه، درختی است که تنها دو رأس آن از درجه یک نیستند. $S_{r,s}$ نمایش یک ستاره دوگانه است که یکی از رئوس غیربرگ به r رأس و دیگری به s رأس متصل است.

تعریف ۲۸.۲.۱. مجموعه های احاطه گر

یک مجموعه احاطه گر S در گراف G، یک مجموعه از رئوس G است به طوری که هر رأسی که در S نیست مجاور با یک رأس در S باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱. *مجموعه احاطه گر S، مجموعه احاطه گر مینیمال است، اگر هیچ زیرمجموعه سره ای از S یک مجموعه احاطه گر نباشد.*

تعریف ۳۰.۲.۱. *عدد احاطه گری G را با $\gamma(G)$ نشان می دهند که کمترین تعداد عناصر یک مجموعه احاطه گر G است.*



شکل ۱.۱: مجموعه های احاطه گر (رئوس رنگی)

با توجه به شکل داریم: $\gamma(G) = ۲$.

تعریف ۳۱.۲.۱. *عدد احاطه گری بالایی G را با $\Gamma(G)$ نشان می دهند که بیشترین اندازه از یک مجموعه احاطه گر مینیمال است.*

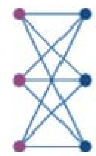
تعریف ۳۲.۲.۱. ***یک مجموعه مستقل*** *است، اگر هیچ دو رأسی از آن با هم مجاور نباشند.*

تعریف ۳۳.۲.۱. *یک مجموعه مستقل S از رأس های گراف G مجموعه مستقل ماکسیمال نامیده می شود، اگر S زیرمجموعه سره از مجموعه مستقل دیگری از رأس های G نباشد.*

تعریف ۳۴.۲.۱. *عدد استقلال G را با $\alpha(G)$ نشان می دهند که بیشترین تعداد عناصر یک مجموعه مستقل از رأس های G است.*

تعریف ۳۵.۲.۱. مجموعه احاطه گر مستقل

مجموعه احاطه گر $S \subseteq V$ را احاطه گر مستقل نامند، هرگاه S یک مجموعه مستقل از رئوس باشد.



شکل ۱.۲: $\alpha(K_{3,3}) = 3$

به طور هم ارز، یک مجموعه احاطه گر مستقل، یک مجموعه مستقل ماکسیمال است.

عدد احاطه گری مستقل G را با $i(G)$ نشان می دهند که کمترین تعداد عناصر یک مجموعه احاطه گر مستقل از رأس های G است.

در نتیجه: $\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G)$ می باشد.

تعریف ۳۶.۲.۱. *یک مجموعه احاطه گر از G با اندازه $\gamma(G)$ را، یک $\gamma-$مجموعه می نامند و یک مجموعه احاطه گر مستقل با اندازه $i(G)$ را یک $i-$مجموعه می گویند.*

تعریف ۳۷.۲.۱. *به مجموعه S از رئوس G، غیر زائد گفته می شود، اگر برای هر رأس $\underline{v \in S}$ رأس $w \in N[v]$ موجود باشد به طوری که $w \notin N[S - \{v\}]$.*

یا به عبارت دیگر، S یک مجموعه غیر زائد از رئوس G است، اگر برای هر رأس $v \in S$

$$N[S - \{v\}] \neq N[S].$$

به هر رأس v با این ویژگی، یک رأس غیر زائد می گویند.

تعریف ۳۸.۲.۱. *مجموعه S از رئوس G که غیر زائد نباشد را مجموعه زائد گویند.*

در نتیجه مجموعه S از رئوس G زائد است، اگر و فقط اگر رأس $v \in S$ موجود باشد که

$$N[S - \{v\}] = N[S].$$

عدد غیر زائد پایینی، کمترین تعداد عناصر یک مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رئوس G است و با $ir(G)$ نشان می دهند.

عدد غیر زائد بالایی، بیشترین تعداد عناصر یک مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رئوس G است و با $Ir(G)$ نشان می دهند.