

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

17/1/1971

۴۶۷۳۰

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده عمران

المان جدید برای تحلیل دینامیکی پوسته‌ها با ضخامت متغیر

نگارش: مهرا ن اسلامی نیا

استاد راهنما: دکتر رضا عطار نژاد

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

رشته مهندسی عمران - گرایش سازه

کتابخانه اساتید ارشد
فصلنامه علمی

۱۳۸۷ / ۱۲ / ۱۴

اردیبهشت ۱۳۸۷

۴ ۷۳۵

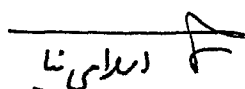
تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب **مران اسلامی نیا** تأیید می‌کند که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشکده فنی دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: **مران اسلامی نیا**

امضاء:


مران اسلامی نیا

تقدیم به پدر و مادر عزیزم.

چکیده

پوسته‌ها با ضخامت متغیر به طور عمده در سازه‌های برجهای خنک کننده نیروگاه‌ها، دودکشهای بلند و یا بالهای هواپیما مورد استفاده قرار می‌گیرد، که در تمامی این موارد تحلیلهای دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. امروزه برای تحلیل پوسته‌ها به طور معمول از المانها و اجزای مسطح یا خمیده استفاده می‌شود که در تمام نقاط این نوع المانها ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای تحلیل پوسته‌ها با ضخامت متغیر باید سازه‌ی مورد نظر را به المانهای کوچکتری که بتوان آنها را با تقریب مناسبی المانهایی با ضخامت ثابت در نظر گرفت، تقسیم کرده و تحلیل مورد نظر را انجام داد. در تحلیلهای دینامیکی که دارای حجم بالایی از محاسبات هستند این تعداد زیاد باعث کاهش چشمگیری در سرعت و دقت محاسبات می‌شود. به همین دلایل نیاز به المان جدید جهت تحلیل دینامیکی پوسته‌ها با ضخامت متغیر می‌باشد.

در این پایان نامه ابتدا با استفاده از روش نرمی و روش تبدیل دیفرانسیلی به ارائه‌ی توابع شکل دقیق استاتیکی و دینامیکی برای تیرهای مستقیم پرداخته و سپس روش را در تعیین تیرهای خمیده به کار برده و برای این گونه از سازه‌ها توابع شکل دقیق ارائه می‌شود. دقت این توابع شکل به حدی است که در تحلیل سازه‌ها تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی و تعیین فرکانسهای نوسان طبیعی با تعداد کمی المان جوابهای دقیق حاصل می‌شود. در نهایت با استفاده از این توابع شکل دقیق برای تیرهای خمیده پوسته‌های عمومی را مورد بررسی قرار داده و یک المان جدید برای پوسته‌های عمومی با ضخامت متغیر ارائه می‌کنیم. با تحلیل مثالهای متنوع دقت روش جدید را با نتایج المانهای مسطح که به صورت گسترده برای تحلیل پوسته‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقایسه کرده و کارایی بالای روش جدید را نشان می‌دهیم.

فصل اول

۱

مقدمه

۱

۴

(۱-۱) روشهای موجود برای تحلیل پوسته‌ها

۴

(۱-۱-۱) المان‌های مسطح

۷

(۲-۱-۱) المان‌هایی با هندسه منحنی

۸

(۳-۱-۱) پوسته‌های دوار با تقارن مرکزی

۹

(۲-۱) مطالب ارائه شده در این پایان‌نامه

۹

(۱-۲-۱) فصل دوم: روش اجزای محدود

۱۰

(۲-۲-۱) فصل سوم: تیرها با مقطع متغیر

۱۰

(۳-۲-۱) فصل چهارم: تیرهای خمیده

۱۰

(۴-۲-۱) فصل پنجم: ورق‌ها

۱۰

(۵-۲-۱) فصل ششم: پوسته‌های دوار

۱۱

(۶-۲-۱) فصل هفتم: پوسته‌های عمومی

۱۱

(۶-۲-۱) فصل هشتم: گامهای آتی

۱۲

فصل دوم: تحلیل سازه‌ها به روش اجزای محدود

۱۲

مقدمه

۱۲

(۱-۲) کلیات روش اجزای محدود

۱۴

(۲-۲) توابع شکلی و انواع آن

۱۵	۳-۲) روش اجزای محدود در تیرهای مستقیم
۱۸	۴-۲) روش اجزای محدود در تیرهای خمیده
۲۲	۵-۲) روش اجزای محدود برای ورق‌ها (صفحات)
۲۶	۶-۲) روش اجزای محدود برای پوسته‌ها با محور تقارن
۲۹	۷-۲) روش اجزای محدود برای پوسته‌های عمومی
۳۵	فصل سوم: المان جدید برای تحلیل تیرها با مقطع متغیر
۳۵	مقدمه
۳۵	۱-۳) توابع شکلی برای تحلیل استاتیکی
۳۹	۲-۳) محاسبه بردار $\{b\}$ و ماتریس‌های سختی گرهی
۴۱	۳-۳) توابع شکل دینامیکی برای تیرهای مقطع متغیر
۴۲	۴-۳) روش تبدیل دیفرانسیلی برای حل معادله دیفرانسیل نوسان
۴۶	۵-۳) مثال‌های عددی
۴۶	۱-۵-۳) مثال ۱: تیر با مقطع ثابت
۵۱	۲-۵-۳) مثال ۲: تیر با تغییرات خطی در ارتفاع آن
۵۶	۳-۵-۳) مثال ۳: تیر با تغییرات سهمومی در ارتفاع
۶۰	۶-۳) نتیجه‌گیری
۶۱	فصل چهارم: المان جدید برای تحلیل تیرهای خمیده با مقطع
	متغیر
۶۱	مقدمه

۶۱	۱-۴) توابع شکل استاتیکی
۶۸	۲-۴) توابع شکل دینامیکی
۷۱	۳-۴) مثالهای عددی
۷۱	۱-۳-۴) مثال ۱: تیر نیم دایره با مقطع ثابت
۷۸	۲-۳-۴) مثال ۲: تیر نیم دایره با تغییرات خطی در ارتفاع
۸۳	۳-۳-۴) مثال ۳: تیر سهوی با تغییرات درجه دوم در ارتفاع
۸۸	۴-۴) نتیجه گیری
۸۹	فصل پنجم: المان جدید برای تحلیل صفحات با ضخامت
۸۹	متغیر
۸۹	مقدمه
۸۹	۱-۵) ضرایب اصلاحی
۹۱	۱-۲-۵) حالت اول
۹۴	۲-۲-۵) حالت دوم
۹۷	۳-۲-۵) حالت سوم
۹۹	۴-۲-۵) حالت چهارم
۱۰۲	۳-۵) تحلیل ورقها با ضخامت متغیر با استفاده از توابع شکل تیرها
۱۰۳	۱-۳-۵) مثال ۱: ورق با تغییرات خطی در ضخامت
۱۰۶	۲-۳-۵) مثال ۲: ورق با تغییرات درجه دو در ضخامت
۱۰۹	۴-۵) نتیجه گیری

۱۱۰ فصل ششم: المان جدید پوسته‌های دوار با محور تقارن

۱۱۰ مقدمه

۱۱۰ ۱-۶) تحلیل پوسته‌های دوار با محور تقارن با استفاده از تیرهای خمیده

۱۱۱ ۳-۶) مثال‌های عددی

۱۱۲ ۱-۳-۶) مثال ۱: استوانه‌ای با ضخامت متغیر

۱۱۵ ۲-۳-۶) مثال ۲: گنبدی به شکل نیم کره با ضخامت متغیر

۱۱۸ ۳-۳-۶) مثال ۳: گنبد کروی با تغییرات درجه دو در ضخامت

۱۲۱ ۴-۶) نتیجه‌گیری

۱۲۲ فصل هفتم: المان جدید پوسته‌های عمومی

۱۲۷ مقدمه

۱۲۷ ۲-۷) تیرهای خمیده معادل جهت تعیین توابع شکل

۱۲۴ ۳-۷) مثال‌های عددی

۱۲۴ ۲-۳-۷) مثال ۱: صفحه مستطیلی با ضخامت ثابت

۱۲۶ ۳-۳-۷) مثال ۲: پوسته نیم استوانه با ضخامت متغیر

۱۲۹ ۴-۳-۷) مثال ۳: پوسته به شکل ربع دایره و ضخامت متغیر

۱۳۳ ۴-۷) نتیجه‌گیری

۱۳۴ فصل هشتم: گامهای آتی

۱۳۷ مراجع

فهرست جداول

فصل دوم

۲۵	جدول ۱-۲: توابع شکلی ورق‌ها
۳۲	جدول ۲-۲: توابع پایه برای u
۳۲	جدول ۳-۲: توابع پایه برای v
۳۲	جدول ۴-۲: توابع پایه برای w

فصل سوم

۴۰	جدول ۱-۳: مشتق اول و دوم b_i ها
۴۴	جدول ۲-۳: شرایط مرزی برای تعیین $\{b\}$
۵۰	جدول ۳-۳: مثال ۱ - فرکانس زاویه‌ای مود اول نوسان طبیعی
۵۳	جدول ۴-۳: مثال ۲ - تغییر مکان وسط تیر را تحت بار استاتیکی متمرکز
۵۵	جدول ۵-۳: مثال ۲ - فرکانس زاویه‌ای مود اول نوسان طبیعی
۵۷	جدول ۶-۳: مثال ۳ - تغییر انتهای تیر را تحت بار استاتیکی متمرکز
۵۹	جدول ۷-۳: مثال ۳ - فرکانس زاویه‌ای مود اول نوسان طبیعی

فصل چهارم

۶۵	جدول ۱-۴: روابط محاسبه $\{b\}$ و $\{c\}$ به روش بار واحد
۶۶	جدول ۲-۴: روابط محاسبه مشتقات $\{b\}$ و $\{c\}$
۶۷	جدول ۳-۴: ماتریس‌های سختی گرهی

- جدول ۴-۴: شرایط مرزی برای تعیین اجزای {b} و {c} ۷۰
- جدول ۴-۵: روابط تعیین ماتریس‌های سختی دینامیکی گرهی ۷۱
- جدول ۴-۶: مثال ۱ - حالات مختلف المان بندی در تحلیل تیرهای خمیده ۷۲
- جدول ۴-۷: تغییر مکان وسط تیر تحت بار استاتیکی ۷۵
- جدول ۴-۸: مثال ۱ - فرکانس زاویه‌ای مود اول ۷۵
- جدول ۴-۹: مثال ۲ - حالات مختلف المان بندی در تحلیل تیرهای خمیده ۷۷
- جدول ۴-۱۰: مثال ۲ - تغییر مکان وسط تیر تحت بار استاتیکی ۸۰
- جدول ۴-۱۱: مثال ۲ - فرکانس زاویه‌ای مود اول ۸۰
- جدول ۴-۱۲: مثال ۳ - تغییر مکان انتهایی تیر تحت بار استاتیکی ۸۵
- جدول ۴-۱۳: مثال ۳ - فرکانس زاویه‌ای مود اول ۸۵

فصل پنجم

- جدول ۵-۱: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار متمرکز ۹۱
- جدول ۵-۲: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار گسترده ۹۲
- جدول ۵-۳: فرکانس‌های مود اول نوسانی ۹۲
- جدول ۵-۴: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار متمرکز ۹۴
- جدول ۵-۵: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار گسترده ۹۴
- جدول ۵-۶: فرکانس‌های مود اول نوسانی ۹۵
- جدول ۵-۷: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار متمرکز ۹۶
- جدول ۵-۸: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار گسترده ۹۷

- ۹۷ جدول ۵-۹: فرکانس های مود اول نوسانی
- ۹۸ جدول ۵-۱۰: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار متمرکز
- ۹۹ جدول ۵-۱۱: تغییر مکان نقطه میانی تحت بار گسترده
- ۱۰۰ جدول ۵-۱۲: فرکانس های مود اول نوسانی
- ۱۰۳ جدول ۵-۱۳: مثال ۱- تغییر مکان نقطه میانی تحت بار متمرکز
- ۱۰۳ جدول ۵-۱۴: مثال ۱ - فرکانس های مود اول نوسانی
- ۱۰۵ جدول ۵-۱۵: مثال ۲- تغییر مکان نقطه میانی تحت بار گسترده
- ۱۰۶ جدول ۵-۱۶: مثال ۲ - فرکانس های مود اول نوسانی

فصل ششم

- ۱۱۲ جدول ۶-۱: مثال ۱- تغییر مکان نقطه‌ی انتهایی تحت بار گسترده
- ۱۱۲ جدول ۶-۲: مثال ۱ - فرکانس های مود اول نوسانی
- ۱۱۴ جدول ۶-۳: مثال ۲: حالت‌های مختلف المان بندی
- ۱۱۵ جدول ۶-۴: مثال ۲ - تغییر مکان بالای پوسته تحت بار استاتیکی
- ۱۱۵ جدول ۶-۵: مثال ۲ - فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۱۸ جدول ۶-۶: مثال ۳ - تغییر مکان بالای پوسته تحت بار استاتیکی
- ۱۱۸ جدول ۶-۷: مثال ۳ - فرکانس زاویه‌ای مود اول

فصل هفتم

- ۱۲۲ جدول ۷-۱: توابع پایه برای U
- ۱۲۳ جدول ۷-۲: توابع پایه برای V

- ۱۲۴ جدول ۳-۷: مثال ۱ - تغییر مکان میانی ورق تحت بار استاتیکی
- ۱۲۵ جدول ۴-۷: مثال ۱ - فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۲۷ جدول ۵-۷: مثال ۲ - حالت‌های مختلف المان بندی $N_s \times N_t$
- ۱۲۷ جدول ۶-۷: مثال ۲ - تغییر مکان بالای پوسته (نقطه A) تحت بار استاتیکی
- ۱۲۸ جدول ۷-۷: مثال ۲ - فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۳۰ جدول ۸-۷: مثال ۳ - حالت‌های مختلف المان بندی $N_s \times N_t$
- ۱۳۰ جدول ۹-۷: مثال ۳ - تغییر مکان بالای پوسته (نقطه A) تحت بار استاتیکی
- ۱۳۱ جدول ۱۰-۷: مثال ۳ - فرکانس زاویه‌ای مود اول

فصل اول

- ۱ شکل ۱-۱: Fukouka Dome, Japan, 1993
- ۲ شکل ۲-۱: مخازن کرووی (Courtesy Chicago bridge and Iron Co.) [۱]
- ۲ شکل ۳-۱: Parabolic Vaults, Church, St.Louis County, MO [۱]
- ۳ شکل ۵-۱: اجزای پوسته در بدنه کشتی [۲]
- ۴ شکل ۶-۱: نمونه ای از المان های مستطیلی [۶]
- ۵ شکل ۷-۱: المان بندی با استفاده از المان های مستطیلی [۳]
- ۶ شکل ۸-۱: نمونه ای از المان های مثلثی [۶]
- ۶ شکل ۹-۱: المان بندی با استفاده از المان های مثلثی [۳]
- ۷ شکل ۱۰-۱: المان منحنی [۷]
- ۸ شکل ۱۱-۱: المان مرسوم برای پوسته های دوار [۳]

فصل دوم

- ۱۸ شکل ۱-۲: جزئیات تیر خمیده بصورت عمومی
- ۲۱ شکل ۲-۲: بار گذاری تیر خمیده
- ۲۴ شکل ۳-۲: تغییر مکان یک ورق ناشی از تغییر مکان واحد در یکی از گره های المان
- ۲۵ شکل ۴-۲: توابع شکلی تیر
- ۲۷ شکل ۵-۲: پوسته دوار [۳]

شکل ۶-۲ المان برای تحلیل پوسته‌ها در حالت عمومی

۳۰

فصل سوم

شکل ۱-۳: تیر با مقطع متغیر

۳۶

شکل ۲-۳: تعریف b_1 و b_2

۳۷

شکل ۳-۳: تعریف b_3 و b_4

۳۷

شکل ۴-۳: تعریف b_1 تا b_4 با استفاده از قضیه تقابل کار

۳۸

شکل ۵-۳: مثال ۱ - تیر با مقطع ثابت

۴۷

شکل ۶-۳: مثال ۱ - توابع شکل تیر با مقطع ثابت

۴۷

شکل ۷-۳: مثال ۱ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.2$ s

۴۸

شکل ۸-۳: مثال ۱ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s

۴۸

شکل ۹-۳: مثال ۱ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.8$ s

۴۹

شکل ۱۰-۳: مثال ۱ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=1$ s

۴۹

شکل ۱۱-۳: مثال ۱ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول نوسان طبیعی

۵۰

شکل ۱۲-۳: مثال ۲ - تیر با تغییرات خطی در ارتفاع آن

۵۱

شکل ۱۳-۳: مثال ۲ - توابع شکل تیر با تغییرات خطی در ارتفاع آن

۵۲

شکل ۱۴-۳: مثال ۲ - همگرایی تغییر مکان وسط تیر را تحت بار استاتیکی متمرکز

۵۳

شکل ۱۵-۳: مثال ۲ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s

۵۴

شکل ۱۶-۳: مثال ۲ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=1$ s

۵۴

جدول ۵-۳: مثال ۲ - فرکانس زاویه‌ای مود اول نوسان طبیعی

۵۵

- شکل ۳-۱۷: مثال ۲ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول نوسان طبیعی ۵۵
- شکل ۳-۱۸: مثال ۳ - تیر با تغییرات سهومی در ارتفاع ۵۶
- شکل ۳-۱۹: مثال ۳ - توابع شکل تیر با تغییرات درجه دو در ارتفاع ۵۷
- شکل ۳-۲۰: مثال ۳ - همگرایی تغییر مکان انتهایی را تحت بار استاتیکی متم ۵۸
- شکل ۳-۲۱: مثال ۳ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی انتهایی در تحلیل دینامیکی $t=0.5\text{ s}$ ۵۸
- شکل ۳-۲۲: مثال ۳ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی انتهایی در تحلیل دینامیکی $t=1.0\text{ s}$ ۵۸
- شکل ۳-۲۳: مثال ۳ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول نوسان طبیعی ۵۹

فصل چهارم

- شکل ۴-۱: تیر خمیده و بارگذاری آن ۶۳
- شکل ۴-۲: سازه‌های معین معادل برای بارگذاری‌های مختلف ۶۳
- شکل ۴-۳: سازه‌های معین برای تعیین $\{b\}$ و $\{c\}$ ۶۵
- شکل ۴-۴: مثال ۱ - تیر نیم دایره با مقطع ثابت ۷۳
- شکل ۴-۵ الف: مثال ۱ - توابع شکل تغییر مکان مماسی تیر دایره‌ای با مقطع ثابت ۷۴
- شکل ۴-۵ ب: مثال ۱ - توابع شکل تغییر مکان قائم تیر دایره‌ای با مقطع ثابت ۷۵
- شکل ۴-۶: مثال ۱ - همگرایی تغییر مکان وسط تیر تحت بار استاتیکی ۷۶
- شکل ۴-۷: مثال ۱ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول ۷۷
- شکل ۴-۸: مثال ۱ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.5\text{ s}$ ۷۷
- شکل ۴-۹: مثال ۱ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=1.0\text{ s}$ ۷۷
- شکل ۴-۱۰ الف: مثال ۲ - توابع شکل تغییر مکان مماسی تیر دایره‌ای با تغییرات خطی در ارتفاع ۷۹

- شکل ۴-۱۰-ب: مثال ۲ - توابع شکل تغییر مکان قائم تیر دایره‌ای با تغییرات خطی در ارتفاع ۸۰
- شکل ۴-۱۱: مثال ۲ - همگرایی تغییر مکان وسط تیر تحت بار استاتیکی ۸۱
- شکل ۴-۱۲: مثال ۲ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول ۸۲
- شکل ۴-۱۳: مثال ۲ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s ۸۲
- شکل ۴-۱۴: مثال ۲ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s ۸۲
- شکل ۴-۱۵: مثال ۳ - تیر سهوی با تغییرات درجه دوم در ارتفاع ۸۳
- شکل ۴-۱۶-الف: مثال ۳ - توابع شکل تغییر مکان مماسی تیر سهوی با تغییرات درجه دوم در ارتفاع ۸۴
- شکل ۴-۱۶-ب: مثال ۳ - توابع شکل تغییر مکان قائم تیر سهوی با تغییرات درجه دوم در ارتفاع ۸۵
- شکل ۴-۱۷: مثال ۳ - همگرایی تغییر مکان انتهایی تیر تحت بار استاتیکی ۸۶
- شکل ۴-۱۸: مثال ۳ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول ۸۷
- شکل ۴-۱۹: مثال ۳ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی انتهایی در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s ۸۷
- شکل ۴-۲۰: مثال ۳ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی انتهایی در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s ۸۷

فصل پنجم

- شکل ۵-۱: تابع شکل N_1 ورق تعیین شده از توابع تیرها ۹۰
- شکل ۵-۲: تابع شکل ورق N_2 تعیین شده از توابع تیرها ۹۰
- شکل ۵-۳: چهار حالت تکیه گاهی ورقها با ضخامت ثابت برای تعیین ضرایب اصلاحی ۹۱
- شکل ۵-۴: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار متمرکز ۹۲
- شکل ۵-۶: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار گسترده ۹۳
- شکل ۵-۷: خطا و همگرایی فرکانس مود اول نوسان ۹۴

- شکل ۵-۸: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار متمرکز ۹۵
- شکل ۵-۹: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار گسترده ۹۶
- شکل ۵-۱۰: خطا و همگرایی فرکانس مود اول نوسان ۹۷
- شکل ۵-۱۱: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار متمرکز ۹۷
- شکل ۵-۱۲: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار گسترده ۹۸
- شکل ۵-۱۳: خطا و همگرایی فرکانس مود اول نوسان ۹۹
- شکل ۵-۱۴: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار متمرکز ۱۰۰
- شکل ۵-۱۵: خطا و همگرایی تحلیل تحت بار گسترده ۱۰۰
- شکل ۵-۱۶: خطا و همگرایی فرکانس مود اول نوسان ۱۰۱
- شکل ۵-۱۷: مثال ۱- همگرایی تحلیل تحت بار متمرکز ۱۰۴
- شکل ۵-۱۸: مثال ۱- همگرایی فرکانس مود اول نوسان ۱۰۵
- شکل ۴-۱۹: مثال ۱- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s ۱۰۵
- شکل ۴-۲۰: مثال ۱- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s ۱۰۵
- شکل ۵-۲۱: مثال ۲- همگرایی تحلیل تحت بار گسترده ۱۰۶
- شکل ۵-۲۲: مثال ۲- همگرایی فرکانس مود اول نوسان ۱۰۷
- شکل ۵-۲۳: مثال ۲- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s ۱۰۸
- شکل ۵-۲۴: مثال ۲- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی میانی در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s ۱۰۸

فصل ششم

- شکل ۶-۱: مثال ۱- مخزن استوانه‌ای با ضخامت متغیر خطی ۱۱۲

- ۱۱۳ شکل ۶-۲: مثال ۲- همگرایی تحلیل تحت بار گسترده
- ۱۱۴ شکل ۶-۳: مثال ۱- همگرایی فرکانس مود اول نوسان
- ۱۱۴ شکل ۶-۴: مثال ۱- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی انتهایی در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s
- ۱۱۴ شکل ۶-۵: مثال ۱- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی انتهایی در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s
- ۱۱۵ شکل ۶-۶: مثال ۲- : گنبد نیم کره با ضخامت متغیر
- ۱۱۶ شکل ۶-۷: مثال ۲- همگرایی تغییر مکان بالای پوسته تحت بار استاتیکی
- ۱۱۷ شکل ۶-۸: مثال ۲- همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۱۸ شکل ۶-۹: مثال ۲- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s
- ۱۱۹ شکل ۶-۱۰: مثال ۲- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s
- ۱۲۰ شکل ۶-۱۱: مثال ۳- گنبد کروی با تغییرات درجه دو در ضخامت
- ۱۲۱ شکل ۶-۱۲: مثال ۳- همگرایی تغییر مکان بالای پوسته تحت بار استاتیکی
- ۱۲۲ شکل ۶-۱۳: مثال ۳- همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۲۲ شکل ۶-۱۴: مثال ۳- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s
- ۱۲۲ شکل ۶-۱۵: مثال ۳- همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s

فصل هفتم

- ۱۲۶ شکل ۷-۱: مثال ۱- همگرایی تغییر مکان میانی ورق تحت بار استاتیکی
- ۱۲۶ شکل ۷-۲: مثال ۱- همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۲۷ شکل ۷-۳: مثال ۲- پوسته نیم استوانه با ضخامت متغیر

- ۱۲۸ شکل ۴-۷: مثال ۲ - همگرایی تغییر مکان بالای (نقطه A) پوسته تحت بار استاتیکی
- ۱۲۹ شکل ۵-۷: مثال ۲ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۲۹ شکل ۶-۷: مثال ۲ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s
- ۱۳۰ شکل ۷-۷: مثال ۲ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s
- ۱۳۰ شکل ۸-۷: مثال ۲ - پوسته ربع دایره با ضخامت متغیر
- ۱۳۲ شکل ۹-۷: مثال ۳ - همگرایی تغییر مکان بالای (نقطه A) پوسته تحت بار استاتیکی
- ۱۳۲ شکل ۱۰-۷: مثال ۳ - همگرایی فرکانس زاویه‌ای مود اول
- ۱۳۳ شکل ۱۱-۷: مثال ۳ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=0.5$ s
- ۱۳۳ شکل ۱۲-۷: مثال ۳ - همگرایی در تغییر مکان نقطه‌ی بالایی پوسته در تحلیل دینامیکی $t=1.0$ s

فصل هشتم

- ۱۳۶ شکل ۱-۸: تیر مقطع متغیر تحت بار محوری
- ۱۳۷ شکل ۲-۸: معادله انحنای تار خنثی به عنوان تار خنثی تیر خمیده