بسم الله الرحمن الرحیم

اینجانب مردم حیدریان دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیزعددی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۲۸۳۱۰۳ که در تاریخ ۹۲/۰۶/۲۴ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "بررسی مسأله اشتورم – لیوویل معکوس با مشتق کسری" دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: مریم حیدریان

امضا

تاریخ

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیزعددی

عنوان:

بررسی مسأله اشتورم - لیوویل معکوس با مشتق کسری

استاد راهنما:

دکترعبداله برهانی‌فر

استاد مشاور:

دکتر یاشار عزیزیان

پژوهشگر:

مریم حیدریان

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

وجود نازنین مادرم

به پاس محبت های بی دریغش که هرگز فروکش نمی کند.

آن اسوه ی فداکاری و ایمان که دعای خیرش توشه ی راهم ساخت.

بوسه می زنم بر دست های مهربانت.

// سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.
در آغاز از زحمات بی‌دریغ استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر عبداله برهانی‌فر، صمیمانه کمال تشکر و قدردانی را دارم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر یاشار عزیزیان، که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال تشکر را دارم.
از استاد ادب و معرفت، جناب آقای دکتر محمد ضارب‌نیا، که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

مریم حیدریان
شهریور ۹۲

نام خانوادگی: حیدریان نام: مریم

عنوان پایان‌نامه:
بررسی مسأله اشتورم - لیوویل معکوس با مشتق کسری

استاد راهنما: دکتر عبداله برهانی‌فر
استاد مشاور: دکتر یاشار عزیزیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیزعددی
دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۹۲/۰۶/۲۴ تعداد صفحات: ۸۸

چکیده

در این پایان‌نامه مسأله‌ی معکوس بازیابی جمله‌ی پتانسیل در یک مسأله‌ی اشتورم - لیوویل کسری از یک طیف به‌طور عددی بررسی می‌شود. بازیابی عددی پتانسیل با استفاده از داده‌ی طیفی متناهی را با روش نیوتن ارائه می‌دهیم، اگر $\alpha \in (۱,۲)$ و به اندازه‌ی کافی دور از ۲ باشد، بازیابی‌های رضایت‌بخشی را برای پتانسیل‌های یکنواخت و ناپیوسته داریم. هم‌چنین رفتارهای کیفی توابع ویژه و مقادیر ویژه مورد بررسی قرار گرفته است. محاسبه‌ی عددی مقادیر ویژه و توابع ویژه با استفاده از روش شبه نیوتن صورت می‌گیرد.

کلیدواژه‌ها: تابع میتاگ - لفلر، مسأله‌ی اشتورم - لیوویل، مسأله‌ی معکوس، معادله دیفرانسیل کسری.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

مقدمه

بسیاری از مسائل فیزیک و ریاضی را می‌توان به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل یا معادله‌ی انتگرال فرمول‌بندی کرد. حل این‌گونه معادلات با استفاده از روش‌های عددی، بسیار با اهمیت است. اکثر نویسندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری معتقدند، مفهوم حساب‌های دیفرانسیل کسری از یک سؤال که در سال ۱۶۹۵ در ذهن هوپیتال[1] به وجود آمد، ریشه گرفته است. وی این سؤال را برای ویلهلم لایبنیتز[2] نوشت و خواست مفهوم $\frac{d^n y}{dx^n}$ را برای مشتق مرتبه‌ی $n \in \mathbb{N}_۰ = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ زمانی که $n = \frac{۱}{۲}$، جستجو کند (پس اگر $n = \frac{۱}{۲}$ باشد چه معنی می‌دهد؟).

لایبنیتز در جوابش (۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵) به هوپیتال این‌گونه نوشت: "در این یک تناقض آشکار است که ممکن است روزی به نتیجه‌ای مهم منجر شود."

موضوع حساب‌های دیفرانسیل کسری (مشتقات هر مرتبه‌ی پیچیده، واقعی و اختیاری) عمومیت و اهمیت قابل ملاحظه‌ی خود را در طول سه دهه‌ی گذشته به خاطر کاربردهای ثابت شده‌اش در زمینه‌های وسیع و بی‌شمار علوم و مهندسی به‌دست آورده است.

در این پایان‌نامه مشتقات کسری را بر روی مسائل اشتورم - لیوویل به‌کار می‌بریم. مسأله‌ی اشتورم - لیوویل اغلب به عنوان یک زیرمسأله در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با روش جداسازی متغیرها ظاهر می‌شود، یک مسأله‌ی اشتورم - لیوویل نوع خاصی از یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دو، با بعضی از شرایط مرزی است.

[1] Hopital
[2] Wilhelm Leibniz

چارلز اشتورم[۱] ریاضیدان سوئیسی در سال ۱۸۳۳ مقاله‌ای تحت موضوع معادلات دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبه‌ی دوم به آکادمی علوم ارائه داد که در سال ۱۸۳۶ توسط مقاله‌ی مفصل دیگری دنبال شد. بعدها ژوزف لیوویل[۲] که همکار و یکی از نزدیکان اشتورم در پاریس بود، موضوع را دنبال کرد، که اولین تفسیر کامل از نوسان، مقاله و جداسازی قضایایی که نام اشتورم را در برداشتند شامل می‌شد. تحت همکاری لیوویل قواعد اساسی از آن‌چه که به عنوان نظریه‌ی اشتورم - لیوویل شناخته شده بود، بنا نهاده شد و مقالاتی که در سال‌های ۱۸۳۷ - ۱۸۳۶ توسط این دو ریاضیدان منتشر شد، شامل بسیاری از خواص مسائل مقدار مرزی بود.

این پایان‌نامه براساس مراجع (میتوز[۳]، ۱۹۹۸؛ پودلابنی[۴]، ۱۹۹۹؛ بورگ[۵]، ۱۹۴۶) نوشته و به صورت زیر تدوین شده است:

در فصل اول این پایان‌نامه برخی تعاریف و مفاهیم اولیه را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم مسائل اشتورم - لیوویل و معکوس آن با مشتق معمولی معرفی می‌گردد. در فصل سوم مسأله‌ی اشتورم - لیوویل معکوس کسری را بررسی می‌کنیم و در فصل چهارم به نتایج و بحث‌های عددی پیرامون مسأله‌ی اشتورم - لیوویل می‌پردازیم.

[۱] Charlz Sturm
[۲] Josef Liouville
[۳] Mitoz
[۴] Podlubny
[۵] Borg

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه می‌شود. بیشتر تعاریف این فصل از (میتوز[۱]، ۱۳۷۰؛ کیلباس[۲]، ۲۰۰۶؛ پودلابنی[۳]، ۱۹۹۹) است.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ مجموعه‌ای است با دو عمل $+ : V \times V \to V$ و $. : \mathbb{F} \times V \to V$، به طوری‌که

(الف) $(V, +)$ یک گروه آبلی است.

(ب) به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $\nu \in V$، $(\alpha.\beta).\nu = \alpha.(\beta.\nu)$.

(ج) به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $\nu \in V$، $(\alpha + \beta).\nu = \alpha.\nu + \beta.\nu$.

(د) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و $\nu, \omega \in V$، $\alpha.(\nu + \omega) = \alpha.\nu + \alpha.\omega$.

(ر) به ازای هر $\nu \in V$، $1.\nu = \nu$ (در اینجا $1 \in \mathbb{F}$).

یک فضای برداری به صورت $(V, \mathbb{F})$ نشان داده می‌شود. هر عضو یک فضای برداری را یک بردار می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $(V, \mathbb{F})$ یک فضای برداری و W یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از V باشد. در این صورت $(W, \mathbb{F})$ را یک زیرفضا از $(V, \mathbb{F})$ گوییم، هرگاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $\nu_1, \nu_2 \in W$ داشته باشیم $\alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \in V$.

مثال ۱.۱.۱. *فرض کنید $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ و $V = \mathbb{R}^n$. در این صورت $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ با جمع برداری و ضرب اسکالر در بردار زیر یک فضای برداری است:*

---
[۱] Mitoz
[۲] Kilbas
[۳] Podlubny

$$\nu+\omega=\begin{pmatrix}\nu_1+\omega_1\\ \nu_2+\omega_2\\ \vdots\\ \nu_n+\omega_n\end{pmatrix},\quad \alpha.\nu=\begin{pmatrix}\alpha\nu_1\\ \alpha\nu_2\\ \vdots\\ \alpha\nu_n\end{pmatrix}.$$

فضای برداری $(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ به طور مشابه تعریف می‌شود.

مثال ۲.۱.۱. *فرض کنید $(V,\mathbb{F})=(\mathbb{R}^{n\times n},\mathbb{R})$ و $W=\{A\in\mathbb{R}^n : A^n=0\}$. در این صورت $(W,\mathbb{F})$ یک زیرفضای $(V,\mathbb{F})$ است.*

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ و $m\in\mathbb{N}$. مجموعه‌ی همه‌ی توابع بر Ω به توی $\mathbb{R}$ را که خود و مشتقاتشان تا مرتبه‌ی m-ام بر Ω پیوسته است با $C^m(\Omega)$ نمایش می‌دهیم، به‌عبارت دیگر

$$C^m(\Omega)=\{u:\Omega\to\mathbb{R}\mid \text{بر}\ \Omega\ \text{پیوسته باشد}\ u^{(k)}\ ;k=0,1,\cdots,m\}$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک نرم روی V تابعی است مانند $\|.\|$، از V به $\mathbb{R}$ به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x\in V$، $\|x\|\geq 0$. علاوه بر این $\|x\|=0$ اگر و تنها اگر $x=0$،

(ب) به ازای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ و $x\in V$، $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$،

(ج) به ازای هر $x,y\in V$، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $V=\mathbb{C}^n$، نرم را نرم برداری و در صورتی که $V=\mathbb{C}^{n\times n}$، نرم را نرم ماتریسی می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. گوییم نرم ماتریسی $\|.\|$ روی $\mathbb{C}^{n\times n}$ خاصیت ضربی دارد، هرگاه به ازای هر $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ داشته باشیم

$$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|.$$

مثال ۳.۱.۱. *فرض کنید $V=\mathbb{C}^n$، ملاحظه می‌شود به ازای هر $p\geq 1$، p - نرم بردار $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in V$ که به صورت*

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود، شرایط تعریف ۶.۱.۱ را تأمین می‌کند. به ازای $p=2$ نرم فوق را نرم اقلیدسی می‌نامند.[1]

تعریف ۶.۱.۱. (نرم طبیعی): فرض کنید $\|.\|$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد. در این صورت نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

هم‌چنین داریم:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

تعریف ۷.۱.۱. بردار $x \neq 0$ را بردار ویژه‌ی ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ می‌نامیم، هرگاه اسکالری مانند λ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$Ax = \lambda x,$$

اسکالر λ را مقدار ویژه‌ی ماتریس A می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را طیف A می‌نامند و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهند. شعاع طیفی برابر است با

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

تعریف ۹.۱.۱. عدد شرطی ماتریس A را با $Cond(A)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \sqrt{|\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}|},$$

اگر $Cond(A)$ به عدد یک نزدیک باشد، سیستم را خوش وضع و اگر $Cond(A) \gg 1$ سیستم را بد وضع می‌نامند.

[1] Euclidean Norm

تعریف ۱۰.۱.۱. یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V، تابعی است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V، اسکالر حقیقی (یا مختلط) (x,y) را نسبت می‌دهد به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) (x,x) حقیقی باشد و $(x,x) \geq 0$. علاوه براین $(x,x)=0$ اگر وتنها اگر $x=0$،

(ب) برای هر اسکالر λ، $(x,\lambda y)=\lambda(x,y)$،

(ج) برای هر $z \in V$، $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$،

(د) $(x,y)=\overline{(y,x)}$.

هر فضای برداری مختلط یا حقیقی که یک ضرب داخلی در آن تعریف شده باشد یک فضای حاصل‌ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای نرم‌دار، فضای برداری است که روی آن یک نرم تعریف شده باشد. به سادگی می‌توان دید که اگر V یک فضای حاصل‌ضرب داخلی با ضرب داخلی (x,y) باشد، آن‌گاه $\|.\|=\sqrt{(.,.)}$ یک نرم را روی V تعریف می‌کند. به عبارت دیگر، هر فضای حاصل‌ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار است.

مثال ۴.۱.۱. *فرض کنید $V=\mathbb{R}^n$، در این‌صورت $\|.\|_p$ یک نرم روی V تعریف می‌کند.*

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر $L^2[a,b]=\{f|f:[a,b]\to\mathbb{R}, \int_a^b |f(t)|^2dt<\infty\}$ داریم

$$\|f\|_2^2=\int_a^b |f(t)|^2dt$$

تعریف ۱۳.۱.۱. تابع گاما به صورت انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

ویژگی اساسی تابع گاما رابطه‌ی زیر است:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

که به سادگی توسط انتگرال جزءبه جزء اثبات می‌شود:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = [-e^{-t}t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).$$

قضیه ۱.۱.۱. *(نمایش حدی تابع گاما) تابع گاما را می‌توان توسط حد زیر نیز نمایش داد:*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)},$$

اثبات. برای اثبات این ویژگی، از تابع کمکی

$$f_n(z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n dt$$

استفاده می‌کنیم که با تغییر متغیر $\tau = \frac{t}{n}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)(z+n)}. \end{aligned}$$

با حدگیری از رابطه‌ی فوق و با استفاده از

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{t}{n})^n = e^{-t}$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z).$$

که با توجه به روابط فوق اثبات تمام است . □

تعریف ۱۴.۱.۱. تبدیل لاپلاس[1] تابع $f(t)$، برای $t \geq 0$ با نماد $F(s)$ یا $L\{f(t)\}$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

اگر این انتگرال موجود باشد، تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌نامیم و آن را با نماد $L^{-1}\{f(s)\}$ نمایش می‌دهیم. در رابطه‌ی فوق s عددی حقیقی است.

در جدول (۱.۱)، تبدیل لاپلاس برخی از توابع ارائه شده است.

جدول ۱.۱: تبدیل لاپلاس برخی از توابع

$f(t)$	$F(s)$
a	$\frac{a}{s}$
kt^n	$k\frac{n!}{s^{n+1}}$
ke^{at}	$\frac{k}{s-a}$
$kcosat$	$k\frac{s}{s^2+a^2}$
$ksinat$	$k\frac{a}{s^2+a^2}$
$kcoshat$	$k\frac{s}{s^2-a^2}$
$ksinhat$	$k\frac{a}{s^2-a^2}$

قضیه ۲.۱.۱. *اگر $F(s) = L[f(t)]$ و $G(s) = L[g(t)]$ هر دو به ازای $s > 0$ موجود باشند، آن‌گاه*

$$L[h(t)] = H(s) = F(s)G(s),$$

که در آن

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

تابع h به پیچش g و f معروف است و با $h = f * g$ نمایش داده می‌شود.

[1] Laplace Transformation

تعریف ۱.۱.۱۵. تابع بتا [1] معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(z,w)=\int_{۰}^{۱} x^{z-۱}(۱-x)^{w-۱}dx, \quad (Re(z)>۰, \quad Re(w)>۰).$$

چون مساحت زیر منحنی توزیع بتا مانند هر تابع چگالی دیگر، برابر یک است، بنابراین

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\Gamma(z+w)}{\Gamma(z)\Gamma(w)} x^{z-۱}(۱-x)^{w-۱}dx=۱,$$

درنتیجه

$$\int_{۰}^{۱} x^{z-۱}(۱-x)^{w-۱}dx=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

به عبارت دیگر

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

تعریف ۱.۱.۱۶. تابع میتاگ ـ لفلر [2]

تابع استاندارد میتاگ ـ لفلر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha}(z):=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+۱)}, \quad (\alpha>۰),$$

همچنین تابع میتاگ ـ لفلر دو پارامتری به وسیله‌ی بسط زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha,\beta}(z):=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}, \quad (\alpha>۰,\beta>۰).$$

با استفاده از تعریف داریم:

$$E_{۱,۱}(z):=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+۱)}=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z,$$
$$E_{۱,۲}(z):=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+۲)}=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{(k+۱)!}=\frac{۱}{z}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^{k+۱}}{(k+۱)!}=\frac{e^z-۱}{z},$$
$$E_{۱,۳}(z):=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+۳)}=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^k}{(k+۲)!}=\frac{۱}{z}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{z^{k+۲}}{(k+۲)!}=\frac{e^z-۱-z}{z^۲},$$

و در حالت کلی

$$E_{۱,m}(z)=\frac{۱}{z^{m-۱}}\left\{e^z-\sum_{k=۰}^{m-۲}\frac{z^k}{k!}\right\}.$$

[1] Beta
[2] Mittage-Leffler